

---

**Hoja 5 de Problemas**


---

**1.-** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en  $a$ , con  $f(a) = g(a)$  y  $f'(x) < g'(x)$  en cada punto del intervalo  $(a, b]$ . Demostrar que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \in (a, b]$ . Deducir de aquí que  $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ .

**2.-** Considerando la función

$$f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p},$$

demostrar que si  $a, b > 0$  y  $p > 1$  se cumple

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

**3.-** Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \cos x \text{ en } a = \frac{\pi}{4} \quad (b) f(x) = \log x \text{ en } a = 1 \quad (c) f(x) = x^{\frac{1}{2}} \text{ en } a = 1$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ en } a = 0 \quad (e) f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ en } a = 0 \quad (f) f(x) = \arctan x \text{ en } a = 0$$

$$(g) f(x) = x^5 \text{ en } a = 3 \quad (h) f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \text{ en } a = 0 \quad (i) f(x) = \log(1+x) \text{ en } a = 0$$

$$(j) f(x) = 3 + (x-1) + 2(x-1)^2 + 5(x-1)^3 \text{ en } a = 0$$

**4.-** Calcular los siguientes límites utilizando el polinomio de Taylor:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)^4}{(\log(1+x) - x)^6}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{\cos(2x) - 1}.$$

**5.-** Probar que para  $x > 0$  se cumple

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

**6.-** Probar que para  $x > 0$  se cumple

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x.$$

**7.-** Probar que para  $x > 0$  se cumple

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

8.- Sea  $f$  una función 4 veces derivable en un intervalo alrededor del 0. Supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 + 3x - 5x^2}{x^3} = 0.$$

Calcular  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  y  $f'''(0)$ .

9.- Usando la función  $y = \arctan x$ , calcular  $\pi$  con un error menor que  $10^{-3}$ .

10.- Calcular  $\cos(1)$  con un error menor que  $10^{-3}$ .

11.- Estudiar y representar las gráficas de las siguientes funciones en el conjunto de puntos donde estén definidas.

$$\begin{array}{lll} (a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2} & (b) f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} & (c) y = |x^2 - 6x + 5| + |x - 2| \\ (d) f(x) = 1 + \frac{16}{2^{\frac{1}{x}} - 4} & (e) y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & (f) y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ (g) y = \frac{x^2}{2} - \log|x| & (h) y = \log \frac{1+x}{1-x} & (i) f(x) = e^{-x^2} \\ (j) f(x) = \begin{cases} |2x + 1| & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 - 2x + 4 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{array}$$