Análisis Matemático I. 1º Físicas. *Curso 2010/2011.*

Hoja 4 de Problemas

1.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$(a)\ y = \log \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $\quad (b)\ y = \operatorname{sen}(\log x)$ $\quad (c)\ y = \log(x^2 \log^3 x)$

$(d)\ y = x^{\tan(2\pi x)}$ $\quad (e)\ y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x^2-1}$ $\quad (f)\ y = \arctan \sqrt{x^2-1}$

$(g)\ y = x^{x^{\cos x}}$ $\quad (h)\ y = x^{\log x}$ $\quad (i)\ y = (\log x)^x$

$(j)\ y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $\quad (k)\ y = \tan(x^2 + \log x + \arctan x)$ $\quad (l)\ y = 2^{\sec(x^3+7x-10)}$

$(m)\ y = \sec(\operatorname{cosec} x)$ $\quad (n)\ y = (x^2+1)^{e^x}$ $\quad (\tilde{n})\ y = \sqrt[5]{\operatorname{cotan}^8(x^2)}$

$(o)\ y = x^{\frac{1}{x}}$ $\quad (p)\ y = \log_x e^x$ $\quad (q)\ y = e^{e^{e^x}}$

2.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

$(a)\ f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $\quad (b)\ f(x) = \arccos x$ $\quad (c)\ f(x) = \dfrac{x^3}{|x|}$

$(d)\ f(x) = 2^{-\frac{1}{|x|}}$ $\quad (e)\ f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ $\quad (f)\ f(x) = \log|x|$

$(g)\ f(x) = \log\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ $\quad (h)\ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ $\quad (i)\ f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

3.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 2, \\ a\cdot x + b & \text{si} \quad x > 2. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} a + b\cdot x^2 & \text{si} \quad |x| \le 2, \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} a\cdot \cos x & \text{si} \quad x \le 0, \\ b - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ c\cdot \arctan x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) + a & \text{si} \quad x \le 0, \\ a + b\cdot x & \text{si} \quad 0 < x < 2, \\ c\cdot e^{x^2} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

4.- Probar que si $y = f(x)$ es derivable en $x = a$ y $f(a) \neq 0$ entonces $y = |f(x)|$ es derivable en $x = a$.

5.- ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcularlas. Hacer los mismo con $g(x) = x\,|x|$.

6.- Sean I un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ un función derivable en cierto $a \in I$. Definimos $t(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$. Probar que $t(x)$ es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, es decir, demostrar:

(i) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-t(x)}{x-a} = 0.$

(ii) Si $l(x) = m \cdot x + n$ y $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-l(x)}{x-a} = 0$, entonces $l(x) = t(x)$.

7.- Calcular el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

8.- Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, encontrar el mínimo valor de la función

$$F(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

9.- Encontrar justificadamente el valor máximo de las siguientes funciones $F(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$ y $G(x) = \frac{1}{1+|x-1|} + \frac{1}{1+|x+1|}$.

10.- Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

11.- Una empresa de tomate frito quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo V. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base R y la altura de la lata h, para que su construcción requiera el mínimo gasto de material?.

12.- Se dice que una función f definida en un intervalo I es Lipschitz si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x, y \in I$, se verifica $|f(x) - f(y)| \le C\,|x - y|$. En general, se dice que es Hölder continua de orden $\beta > 0$ si $|f(x) - f(y)| \le C\,|x - y|^\beta$.

(a) Probar que una función Hölder continua es continua.

(b) Probar que si f es Hölder continua de orden β, $\beta > 1$, entonces f es derivable. Mostrar de hecho que f debe ser constante.

13.- Obtener las siguientes desigualdades usando el Teorema del valor medio:

(a) $1 + x \le e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\log(1 + x) < x$, para todo $x > 0$.

14.- Demostrar que la ecuación $x^3 - 3\,x + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, tiene a lo sumo una solución en $[-1, 1]$. ¿Para que valores de k existe efectivamente la solución?.

15.- Demostrar que la ecuación $6\,x^4 - 7\,x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.

16.- Demostrar que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.