
Hoja 1 de Problemas

1.- Demostrar por inducción

(i) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(iv) $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

(ii) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(v) $\forall n \geq 10, 2^n \geq n^3$.

(iii) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.

(vi) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$.

(vii) $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, siendo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(viii) El número de rectas determinado por $n \geq 2$ puntos, de los cuales ningún trío pertenece a la misma recta, es $\frac{1}{2}n(n-1)$.

(ix) $4(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$.

(x) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$.

(xi) Si n no es múltiplo de 4 la suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es múltiplo de 10. (Comprobarlo para $n = 1, 2, 3$ y demostrar que si es cierto para n , lo es para $n + 4$.)(xii) $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6.(xiii) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + (n-1)(n-1)! = n!$ para $n \geq 2$.(xiv) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) (\sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx)) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)$.**2.- Demostrar por inducción sobre n que**

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

3.- Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(i) $A = \{\frac{1}{n} + 1 : n \in \mathbb{N}\}$,

(v) $E = \{x : x^2 < 4\}$,

(ii) $B = A \cup \{1\}$,

(vi) $F = \{x : x^2 \geq 4\}$,

(iii) $C = \{\frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$,

(vii) $G = \{x : x^2 \leq 4\}$,

(iv) $D = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 3\}$,

(viii) $H = \{x : 2 < x^2 \leq 4\}$.

4.- Si el conjunto A tiene un supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

5.- Describe explícitamente los siguientes conjuntos. Estudiar su supremo, ínfimo, máximo, mínimo.

- | | |
|---------------------------|--------------------------------------|
| (i) $ x - 2 < 3$, | (vii) $\frac{x-1}{x+2} > 0$, |
| (ii) $ 3x - 2 < 1$, | (viii) $ (x - 2)(x - 3) < 1$, |
| (iii) $ 2x + 5 > 3$, | (ix) $ x - 1 + x - 2 > 1$, |
| (iv) $x^2 - 4x + 6 < x$, | (x) $ x - 3 + x + 1 \leq 1$, |
| (v) $ x^2 - 3 \leq 1$, | (xi) $\frac{ x-2 }{ x-1 } > x $, |
| (vi) $x^2 + x \leq 2$, | (xii) $\frac{ x+1 }{ x-1 } \geq 1$. |

6.- Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\left\{ \frac{n^2}{n+2} \right\}$ | (b) $\left\{ \frac{n^3}{n^3+2n+1} \right\}$ | (c) $\left\{ \frac{n}{n^2-n-4} \right\}$ |
| (d) $\left\{ \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} \right\}$ | (e) $\left\{ \frac{\sqrt{n^3+2n+n}}{n^2+2} \right\}$ | (f) $\left\{ \frac{\sqrt{n+1+n^2}}{\sqrt{n+2}} \right\}$ |
| (g) $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2+2} \right\}$ | (h) $\left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}$ | (i) $\left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^n \right\}$ |
| (j) $\left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^n \right\}$ | (k) $\left\{ \frac{2^n}{4^n+1} \right\}$ | (l) $\left\{ \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} \right\}$ |
| (m) $\left\{ \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right\}$ | (n) $\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$ | (ñ) $\left\{ (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}) \sqrt{n} \right\}$ |
| (o) $\left\{ (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) n^{\frac{1}{4}} \right\}$ | (p) $\left\{ \sqrt{n^2+2n} - n \right\}$ | (q) $\left\{ (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \right\}, \quad a, b > 0.$ |
| (r) $\left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right\}$ | (s) $\left\{ \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right\}$ | |

7.- Encontrar una expresión de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ como cociente de dos polinomios en n . (Indica-

ción: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$). Como aplicación calcular el límite de la sucesión S_n , donde $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

8.- Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n} \right).$$

9.- Sea $a > 1$, se define por recurrencia la sucesión $\{a_n\}$ por la relación $a_n = \sqrt{a \cdot a_{n-1}}$, $a_1 = \sqrt{a}$. Probar que es una sucesión monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

10.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales definida por a_1 un número mayor que $-\frac{3}{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$. Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite. Indicación: distinguir el caso $a_1 \geq 3$ y $a_1 < 3$.

11.- Sea $a_1 = 1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

$$(i) a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n, \quad (ii) a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n, \quad (iii) a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n \quad \text{y} \quad (iv) a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1.$$

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite. (En alguno de los casos puede ser interesante escribir de forma explícita la expresión que tiene la sucesión).

12.- Se define recurrentemente la sucesión $a_1 = a > 0$ y $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$. ¿Es convergente la sucesión?

13.- Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

$$(i) \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}, \quad (ii) 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}, \quad \text{y} \quad (iii) 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}.$$

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

14.- Demostrar que si $a_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

15.- Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right)^{2n^2 - 3}, \quad b_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{2n^2 + 3} \quad \text{y} \quad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

16.- Probar por inducción que para $n = 1, 2, \dots$,

$$2^{n-1} n! \leq n^n \leq e^{n-1} n!.$$

Como aplicación probar las siguientes afirmaciones:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty,$$

17.- Hallar los siguientes límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 1)^{\frac{1}{3n}} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} \right).$$

18.- Demostrar que si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, existe una sucesión $\{a_n\}$ con $a_n \in A$ y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A$.

19.- La sucesión de término general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ cumple que, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ para $n > n_0$. Demostrar que, sin embargo, la sucesión no es de Cauchy.

20.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

21.- Para A y B dos subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} , definimos $C = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Si A y B están acotados superiormente, probar que C también lo está y que $\sup C = \sup A + \sup B$. ¿Puede darse un teorema análogo para el producto? ¿Y si A, B son conjuntos de números positivos?

22.- Sea $A \subset \mathbb{R}$. Probar que $s = \sup A$, si y sólo si, para todo n natural $s - \frac{1}{n}$ no es cota superior de A y $s + \frac{1}{n}$ es cota superior de A .

23.- Donde está el fallo en los siguientes razonamientos:

(a) Sea $x = y$, entonces $x^2 = xy$ y $x^2 - y^2 = xy - y^2$. Así, $(x + y)(x - y) = y(x - y)$, es decir, $x + y = y$. De aquí se sigue que $2y = y$ y por lo tanto $2 = 1$. **Contradicción!!!**

(b) Vamos a hallar los x que verifican

$$\frac{x + 1}{x - 1} \geq 1.$$

Esta desigualdad es equivalente a $x + 1 \geq x - 1$, o lo que es lo mismo $1 \geq -1$. Como esto es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que el conjunto de valores que verifican la desigualdad anterior es \mathbb{R} . De esta forma, tomando en particular $x = -1$ obtenemos

$$0 = \frac{-1 + 1}{-1 - 1} \geq 1. \quad \text{Contradicción!!!}$$