Análisis Matemático I. Curso 2010/2011. *Examen Final — 21.01.2011*

NOMBRE: D.N.I.:

Este examen consta de cuatro preguntas y una más opcional que se usará solo para subir nota. La duración es de 2 horas y 30 minutos.

1.- (*2,5 puntos*) Dado $a_0 = 1$ se define por recurrencia $a_n = \sqrt{a_{n-1}} + 1$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

a.- Probar que la sucesión $\{a_n\}_n$ así definida es monótona creciente.

b.- Probar que la sucesión $\{a_n\}_n$ está acotada superiormente, por ejemplo por 4.

c.- Concluir de lo anterior que es convergente y encontrar su límite.

2.- (*2,5 puntos*) Sea $f(x) = 2 + 4\ln x$ para $x > 0$.

a.- Demostrar que la ecuación $f(x) = x$ tiene al menos dos soluciones.

b.- Probar de hecho que la ecuación tiene exactamente dos soluciones.

3.- (*2,5 puntos*) Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\mathbf{A}: \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}; \qquad \mathbf{B}: \int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x - \cos x)^2}\, dx.$$

4.- (*2,5 puntos*) Definimos la función

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1 - \cos t}{t}\, dt.$$

a.- Calcular el valor de los límites: $\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{x}$; $\lim_{x\to\infty} F'(x)$.

b.- Probar que $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

5.- (*Opcional*)

a.- En el ejercicio **4** anterior, encontrar el valor de $F''(0)$.

Mostrar además que $F(x) \le \frac{1}{4}x^4$, para $0 \le x \le 1$.

b.- Calcular las siguiente primitiva:

$$\int x \ln\left(\sqrt{1 + x^2}\right)\, dx.$$

RECUPERACIÓN DEL EXAMEN PARCIAL: *para aquellos alumnos que no pudieron hacer el examen parcial en la fecha indicada.*

ANÁLISIS MATEMÁTICO I. CURSO 2010/2011. *21.01.2011*

NOMBRE: D.N.I.:

1.- **a.-** Encontrar los valores de a, b, c y d de forma que el polinomio $P(x) = a+bx+cx^2+dx^3$ cumpla

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot \arctan x - P(x)}{x^3} = 0.$$

b.- Sea g una función dos veces derivable y supongamos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - 2 - 3x - x^2}{(x-1)^2} = 0.$$

Encontrar los valores de $g(1), g'(1)$ y $g''(1)$.

2.- Determinar si existen los siguientes límites y, en caso afirmativo, encontrar su valor:

$$\mathbf{A} : \lim_{x\to+\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}; \qquad \mathbf{B} : \lim_{x\to 0^+} \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-1/x}\right).$$