Análisis Matemático I. Curso 2010/2011. *Ejercicio a entregar el martes 02.11.2010*

NOMBRE: D.N.I.:

Utilizar solo el espacio comprendido en esta hoja por las dos caras.

1.: Dado un número real cualquiera r probar que existe una colección de signos $\epsilon_n = \pm 1$ de forma que la serie $\sum \frac{\epsilon_n}{n}$ es convergente a r, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\epsilon_n}{n} = r.$$

Indicación: Suponiendo que, por ejemplo, $r \geq 0$ elegimos términos de la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ hasta un primer índice N_1 que sobrepase a r. Entonces ponemos $\epsilon_n = 1$ para $n = 1, 2, \ldots, N_1$, y obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{N_1} \frac{\epsilon_n}{n} - \frac{1}{N_1} < r \leq \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\epsilon_n}{n}.$$

Luego restamos términos consecutivos de la serie hasta un primer término N_2 que sobrepase por debajo a r. Es decir, poniendo $\epsilon_n = -1$ para $n = N_1 + 1, N_1 + 2, \ldots, N_2$, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{N_2} \frac{\epsilon_n}{n} = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{n} - \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \frac{1}{n} \leq r < \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\epsilon_n}{n} + \frac{1}{N_2}.$$

Completar el proceso probando cada afirmación hecha (quizás necesitéis usar Inducción).