UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID	**Correccion - Parcial de EDO - 4/12/2009** **Curso Académico 2009-2010**	NOTA

Problema 1 *Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria del segundo orden*

$$y''(x) = \frac{1}{x}\, y'(x) - x\left[y'(x)\right]^2, \qquad \textit{con} \;\; x \geq 1\,.$$

(a) Reducirla a una ecuación del primer orden y resolverla. Escribir la solución $y(x)$ en forma explicita.
(b) Encontrar aquella solución que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Solución. *(a)* Esta ecuación se puede reducir a una de primer orden con el cambio $z(x) = y'(x)$. Encontramos una ecuación de Bernoulli:

$$z'(x) = \frac{1}{x}\, z(x) - x\, z^2\,.$$

Para resolverla es comodo el cambio de variable $z(x) = u(x)^{-1}$, $u'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}$, que transforma la Bernoulli en una ecuación lineal completa

$$u'(x) = -\frac{1}{x}u(x) + x = -a(x)u(x) - b(x)$$

La ecuación lineal completa tiene la solución general dada por la formula, con $x_0 \geq 1$:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)\mathrm{d}\xi}\left\{u(x_0) - \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi)\mathrm{d}\xi} b(\eta)\mathrm{d}\eta\right\} = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi}\left\{u(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{\eta} \frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi}\,\eta\,\mathrm{d}\eta\right\}\\
&= \mathrm{e}^{-\log(x)+\log(x_0)}\left\{u(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\log(\eta)-\log(x_0)}\,\eta\,\mathrm{d}\eta\right\} = \frac{x_0}{x}\left\{u(x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{\eta^2}{x_0}\,\mathrm{d}\eta\right\}\\
&= \frac{x_0}{x}\left\{u(x_0) + \frac{1}{3x_0}\left(x^3 - x_0^3\right)\right\} = \frac{1}{x}\left\{x_0\, u(x_0) + \frac{x^3 - x_0^3}{3}\right\}.
\end{aligned}$$

Regreso a la variable $y'(x) = z(x) = \frac{1}{u(x)}$, y $u(x_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$, y obtengo $y'(x) = u(x)^{-1} = x\left[\frac{x_0}{y'(x_0)} + \frac{x^3-x_0^3}{3}\right]^{-1}$.
Integrando en $[x_0, x]$ encuentro la forma esplicita de $y(x)$:

$$\begin{aligned}
y(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\xi}{\left[\frac{x_0}{y'(x_0)} + \frac{\xi^3-x_0^3}{3}\right]}\mathrm{d}\xi = y(x_0) + 3\int_{x_0}^{x}\frac{\xi}{K+\xi^3}\mathrm{d}\xi = y(x_0) + \frac{1}{K}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{-1}{K+\xi} + \frac{K+\xi}{K^2-K\xi+\xi^2}\right]\mathrm{d}\xi\\
&= y(x_0) + \frac{1}{K}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{-1}{K+\xi} + \frac{1}{2}\frac{2\xi-K}{K^2-K\xi+\xi^2} + \frac{3K}{2}\frac{1}{K^2-K\xi+\xi^2}\right]\mathrm{d}\xi\\
&= y(x_0) + \frac{1}{K}\log\left[\frac{K+x}{K+x_0}\right] + \frac{1}{2K}\log\left[\frac{K^2-Kx+x^2}{K^2-Kx_0+x_0^2}\right] + \frac{\sqrt{3}}{K}\int_{x_0}^{x}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}\,K}}{1+\left[\frac{2\xi}{\sqrt{3}\,K} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right]^2}\mathrm{d}\xi\\
&= y(x_0) + \frac{1}{K}\log\left[\frac{K+x}{K+x_0}\right] + \frac{1}{2K}\log\left[\frac{K^2-Kx+x^2}{K^2-Kx_0+x_0^2}\right] + \frac{\sqrt{3}}{K}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}\,K} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{2x_0}{\sqrt{3}\,K} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]
\end{aligned}$$

donde $K = 3\left[\frac{x_0}{y'(x_0)} + \frac{-x_0^3}{3}\right]$.
(b) La condición inicial en $x_0 = 0$ no puede ser tomada, dado que la solución seria:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{\xi}{\left[\frac{x_0}{y'(x_0)} + \frac{\xi^3-x_0^3}{3}\right]}\mathrm{d}\xi = 1 + \int_0^x \frac{3}{\xi^2}\mathrm{d}\xi$$

y el integral (impropio) no existe. Se note también que para $x = 0$ los coeficientes de la ecuación degeneran.
(b2) Si consideramos otras condiciones iniciales $x_0 = 1$, $y(x_0) = y(1) = 0$ y $y'(x_0) = y'(1) = 3$, tenemos:

$$y(x) = \int_1^x \frac{3}{\xi^2}\mathrm{d}\xi = 3\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Problema 2 *Dado el siguiente sistema homogéneo con coeficientes constantes*

$$\mathbf{X}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \mathbf{X}\,.$$

Hallar la solución general. Encontrar aquella solución tal que $\mathbf{X}(0) = (1, 2, 0)$.

Solución. El polinomio caractéristico es $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$, entonces tenemos un autovalor $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algébrica y geometrica 1, y un autovalor $\lambda_2 = 4$ con multiplicidad algébrica 2.
Buscamos una matriz P de cambio de variable que transforme A en su forma de Jordan J:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad J = P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovectores: $\mathbf{v}_1$ es el autovector correspondiente a $\lambda_1 = 2$, por lo tanto es solución del sistema $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$, y tiene la forma $\mathbf{v}_1 = (0, 0, z)$, y elígo $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$. $\mathbf{v}_2$ es un autovector correspondiente a $\lambda_2 = 4$, es solución del sistema $(A - 4I)\mathbf{v} = 0$, y tiene la forma $\mathbf{v}_2 = (x, -x, \frac{x}{2})$, y elijo $\mathbf{v}_2 = (2, -2, 1)$. Está claro que la dimension del autoéspacio correspondiente a $\mathbf{v}_2$ es 1, es decir su multiplicidad geometrica es 1. Entonces la matriz no es diagonalizable, siendo 2 la multiplicidad algébrica de λ_2 mientras la geometrica es 1. Busco entonces el autovector generalizado $\mathbf{w}$, que es solución del sistema $(A - 4I)\mathbf{w} = \mathbf{v}_2$, y tiene la forma $\mathbf{w} = (x, -x - 1, \frac{x-1}{2})$, y elijo $\mathbf{w} = (3, -4, 1)$. Por lo tanto la matriz P es dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Jordan $J = D + N$,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad e^{D\,t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{Nt} = I + Nt + \underbrace{N^2}_{=0}\frac{t^2}{2} + ... = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dado que $N^2 = 0$. Adémas $DN = ND$, es decir las dos matrices N y D comútan, entonces

$$e^{Jt} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & t\,e^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$$

En fin calculo la matriz exponencial:

$$e^{At} = P\,e^{Jt}\,P^{-1} = \begin{bmatrix} (1-2t)\,e^{4t} & -2te^{4t} & 0 \\ 2te^{4t} & (2t+1)e^{4t} & 0 \\ -e^{2t} + (1-t)e^{4t} & -\frac{1}{2}e^{2t} + \left(\frac{1}{2} - t\right)e^{4t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

y la solución general tendrá la forma $\mathbf{X}(t) = e^{At}\mathbf{X}(0)$. Si $\mathbf{X}(0) = (1, 2, 0)$, entonces la unica solución tiene la forma

$$\mathbf{X}(t) = e^{At}\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} (1-2t)\,e^{4t} & -2te^{4t} & 0 \\ 2te^{4t} & (2t+1)e^{4t} & 0 \\ -e^{2t} + (1-t)e^{4t} & -\frac{1}{2}e^{2t} + \left(\frac{1}{2} - t\right)e^{4t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-6t)e^{4t} \\ (2+6t)e^{4t} \\ -2e^{2t} + (2-3t)e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Problema 3 *Encontrar una ecuación lineal de coeficientes constantes cuya solución general es:*

$$(a) \qquad \big(c_1 + c_2 x\big)\mathrm{e}^{3x} + 1$$

$$(b) \qquad c_1 \sin(5x) + c_2 \cos(5x) + \frac{x}{8}\,.$$

Solución. *(a)* Dado que la solución general es $y_G(x) = \big(c_1 + c_2 x\big)\mathrm{e}^{3x} + 1$, la ecuación tiene que ser de orden 2. La solución de la omogenea es $y_H(x) = \big(c_1 + c_2 x\big)\mathrm{e}^{3x}$, mientras la solución particular es $y_P(x) = 1$. Como consecuencia el polinomio característico tiene una raíz doble $\lambda = 3$ y es dado por $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$, con lo cual la parte omogenea de la ecuación resulta ser $y'' - 6y' + 9y = 0$. Ahora solo falta encontrar el termino $b(x)$ tal que y_G sea solución de la ecuación $y'' - 6y' + 9y = b(x):$ dado que $y_P''(x) = y_P'(x) = 0$, sustituyendo $y_P(x) = 1$ en la ecuación es evidente que $9y_P = 9 = b(x)$, con lo cual la ecuación diferencial que buscamos resulta ser

$$y'' - 6y' + 9y = 9\,.$$

(b) Dado que la solución general es $y_G(x) = c_1 \sin(5x) + c_2 \cos(5x) + \frac{x}{8}$, la ecuación tiene que ser de orden 2. La solución de la omogenea es $y_H(x) = c_1 \sin(5x) + c_2 \cos(5x)$, mientras la solución particular es $y_P(x) = \frac{x}{8}$. La solución y_H de la parte omogenea de la ecuación, corresponde al polinomio característico $p(\lambda) = (\lambda - 5i)(\lambda + 5i) = \lambda^2 + 25$, con lo cual la parte omogenea de la ecuación resulta ser $y'' + 25y = 0$. Ahora solo falta encontrar el termino $b(x)$ tal que y_G sea solución de la ecuación $y'' + 25y = b(x):$ dado que $y_P''(x) = 0$, sustituyendo $y_P(x) = \frac{x}{8}$ en la ecuación es evidente que $25y_P = \frac{25}{8}x = b(x)$, con lo cual la ecuación diferencial que buscamos resulta ser

$$y'' + 25y = \frac{25}{8}x\,.$$

Problema 4 *Hallar las soluciones de la ecuación diferencial*

$$\underbrace{\big(4x^3 + 3\cos(y)\big)}_{M}(x,y)\,\mathrm{d}x \underbrace{-x\sin(y)}_{N(x,y)}\mathrm{d}y = 0\,.$$

Solución. La ecuación diferencial que estamos considerando no es exacta: $-3\sin(y) = \partial_y M \neq \partial_x N = -\sin y$. Entonces es oportuno buscar un factor integrante. Dado que el cociente $\frac{\partial_y M}{\partial_x N} = 1$, es decir, no depende ni de x ni de y, es comodo buscar un factor integrante μ que dependa solo de una variable, pongamos solo de la x:

$$\partial_y\left[\mu(x)\,M(x,y)\right] = \partial_x\left[\mu(x)\,N(x,y)\right] \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\mu}{N}\left[\partial_y M - \partial_x N\right] = \frac{2}{x}\mu(x)\,.$$

Ahora integramos la ecuación $\mu' = \frac{2}{x}\mu$ y obtenemos como solución $\log\mu(x) = 2\log(x) + K$, y elegimos $K = 0$ (se podría elegir cualquier otro $K \in \mathbb{R}$). El factor integrante resulta ser $\mu(x) = x^2$. Por lo tanto la ecuación

$$\underbrace{\big(4x^5 + 3x^2\cos(y)\big)}_{\widetilde{M}(x,y)}\,\mathrm{d}x \underbrace{-x^3\sin(y)}_{\widetilde{N}(x,y)}\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

resulta ser exacta. Calculamos el potencial $P(x,y)$:

$$P(x,y) = \int \widetilde{M}(x,y)\,\mathrm{d}x + c(y) = \int \big(4x^5 + 3x^2\cos(y)\big)\,\mathrm{d}x + c(y) = \frac{2}{3}x^6 + x^3\cos(y) + c(y)$$

luego queremos que

$$\partial_y P(x,y) = \widetilde{N}(x,y) \qquad\Longleftrightarrow\qquad -x^3\sin(y) + c'(y) = -x^3\sin(y) \qquad\Longleftrightarrow\qquad c'(y) = 0$$

lo cual significa que $c(y) = k_0$, donde k_0 es una constante real. Las soluciones de la ecuación (1) son dadas implicitamente para la ecuación

$$P(x,y) = k_1 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \frac{2}{3}x^6 + x^3\cos(y) + k_0 = k_1 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \cos(y) = \frac{k_1 - k_0}{x^3} - \frac{2}{3}x^3$$

podemos despejar la y

$$y = \arccos\left[\frac{k_1 - k_0}{x^3} - \frac{2}{3}x^3\right] = \arccos\left[\frac{k}{x^3} - \frac{2}{3}x^3\right]$$

donde $k = k_1 - k_0$ es una constante real.
Otra forma de calcular el potencial: Para encontrar el potencial, se puede integrar a lo largo del cualquier camino que va de (x_0, y_0) hasta (x,y), y una elección practica resulta ser integrar sobre el segmento $[x_0, x] \times \{y_0\}$ y luego $\{x\} \times [y_0, y]$:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \int_{x_0}^{x} \widetilde{M}(\xi, y_0)\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} \widetilde{N}(x,\eta)\mathrm{d}\eta = \int_{x_0}^{x}\big(4\xi^5 + 3\xi^2\cos(y_0)\big)\mathrm{d}\xi - \int_{y_0}^{y} x^3\sin(\eta)\mathrm{d}\eta \\ &= \left[\frac{2}{3}\xi^6 + x^3\cos(y_0)\right]_{\xi=x_0}^{\xi=x} + \big[x^3\cos(\eta)\big]_{\eta=y_0}^{\eta=y} = \frac{2}{3}x^6 + x^3\cos(y) \underbrace{-\frac{2}{3}x_0^6 - x_0^3\cos(y_0)}_{k_0} \end{aligned}$$

lo cual lleva a la misma solución que hemos encontrado arriba poniendo $P(x,y) = k_1$.