Problemas de E.D.O. Curso 2009-2010

1. Para cada una de las sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ siguientes, determínese el límite puntual de la sucesión (si existe) en el conjunto o conjuntos indicados, e indíquese si la convergencia es uniforme.

a) $f_n(x) = \exp(-n\,x^2)\,,\quad$ sobre $[-1,1]\,.$

b) $f_n(x) = x^{1/n}\,,\quad$ sobre $[0,1]\,.$

c) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}\quad$ en $[0, 1-\varepsilon]$, en $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, y en $[1+\varepsilon, \infty)$.

d) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le n \\ x-n & \text{si } x \ge n \end{cases}\quad$ en cada $[a,b]$ y en $\mathbb{R}\,.$

e) $f_n(x) = \dfrac{n\,x}{1+n^2\,x^2}\quad$ en $[-1,1]$ y en $[1,\infty)$.

f) $f_n(x) = x^{-n}e^x\quad$ en $(1,\infty)$.

2. Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0,1]$, dada por $f_n(x) = n^2\,x\,e^{-nx^2}$

a) Estúdiese la convergencia puntual e uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) Compruébese que a pesar de que converge puntualmente a una función integrable y que cada f_n es integrable, se tiene $\lim \int_0^1 f_n = \infty$.

3. Encuéntrese una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja uniformemente a f en $[0,\infty)$ para las que existan $\lim \int_0^{\infty} f_n$ y $\int_0^{\infty} f$ pero no coincidan.

4. Sea $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$ en $\mathbb{R}$.

a) Estúdiese a qué función converge puntualmente la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y si la convergencia es uniforme.

b) Descríbase la función $\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(k!x)$.

5. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones dadas por $f_n(x) = x^2 + 1/n$ y $g_n(x) = (nx)^{-1}$.

a) Demuéstrese que ambas convergen uniformemente en $[1,\infty)$ y sin embargo la sucesión de término general $f_n g_n$ no lo hace.

b) Demuéstrese que a pesar de que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función f, $\{f_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a f^2.

6. Sea la sucesión de término general $f_n(x) = x/(1+n\,x^2)$. Compruébese que converge uniformemente a cierta f en $\mathbb{R}$ y que se se verifica $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ para cualquier $x \ne 0$ pero no para $x = 0$.

7. Encuéntrese una sucesión de funciones derivables en $(-1,1)$ que converja uniformemente a $f(x) = |x|$.

8. Dado el problema
$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
hállense al menos tres soluciones. *Indicación*: Combínense las dos soluciones que se pueden obtener de forma sencilla.

9. Calcúlense todos los valores $\alpha \in [0, \infty)$ para los que en el problema
$$\begin{cases} y' = |y|^{\alpha} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
haya existencia y unicidad (para $\alpha = 0$ escríbase $|y|^{\alpha} = 1$).

10. Decídase si cada una de las siguientes implicaciones es cierta para funciones $y, z \in C^1\big([0, \infty)\big)$, dando un contraejemplo o una demostración:
a) $y \geq z \Rightarrow y' \geq z'$.
b) $y' \geq z' \Rightarrow y \geq z$.
c) $y(0) = z(0)$, $y' \geq z' \Rightarrow y \geq z$.

11. Estúdiese la existencia y unicidad para el problema
$$\begin{cases} y' = |y| + x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
y hállense explícitamente las soluciones cuando $y_0 = 1$ y cuando $y_0 = -1$, indicando a qué espacio $C^n(\mathbb{R})$ pertenecen.

12. Estúdiese si para cada x_0, y_0 la solución de
$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2 + y^2 + 2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
se puede definir en toda la recta real.

13. Considérese
$$\begin{cases} y' = y^4 + r \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
donde r es una constante positiva. Hállese un entorno de cero (intentando que sea lo mayor posible) en el que se pueda asegurar existencia y unicidad. Pruébese que si la solución existe en $[0, r^{-3/4}]$ entonces $y(r^{-3/4}) \geq r^{1/4}$ y utilícese este hecho junto con $y' \geq y^4$ para encontrar otro entorno en el que se pueda asegurar que no existe solución regular.

14. Sea y la solución de

$$\begin{cases} y' = y + \operatorname{sen}(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

y sea z la solución de esta ecuación aproximando $\operatorname{sen}(xy)$ por xy.

a) Hállese una cota superior para $\text{máx}\,|z(x) - y(x)|$ cuando $x \in [0, 0'1]$.

b) Usando el apartado anterior, cálculese una aproximación para $y(0'1)$.

c) ¿Qué cota superior se podría dar para $\text{máx}\,|z(x) - y(x)|$ si $x \in [-0'1, 0]$?

15. Sean los problemas

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+x^2} + e^{-y^2} \\ y(0) = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = \dfrac{z}{1+x^2} \\ z(0) = 10 \end{cases}$$

Demuéstrese que $0 \le y(x) - z(x) \le e^{-100}(e^x - 1)$ para $x \in [0, 1]$.

***16.** En este problema se probará que $\pi \notin \mathbb{Q}$ considerando la sucesión de funciones $f_n(x) = a^{2n}x^n(1-x)^n/n!$ y las integrales $I_n = \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx$.

a) Empleando la convergencia uniforme, dedúzcase que para cualquier $a > 0$ se cumple $\text{lím}\, I_n = 0$.

b) Pruébese que todas las derivadas de $a^{-2n} f_n(x)$ en $x = 0$ y en $x = 1$ son números enteros.

c) Suponiendo $\pi = a/b$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, integrando por partes y empleando el apartado anterior, demuéstrese que $\pi I_n \in \mathbb{Z}$.

d) Empléese que una sucesión de enteros (estrictamente) positivos no puede tener límite nulo, para llegar a una contradicción.