Problemas de E.D.O. Curso 2009-2010.

1. a) Demostrar que las funciones vectoriales

$$\vec{x_1}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x_2}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes sobre el eje real.

b) Calcular el determinante wronskiano $W(\vec{x_1}, \vec{x_2})$ e interpretar el resultado de acuerdo con el apartado anterior.

2. a) Comprobar que $\mathcal{B} = \{\cos x - \operatorname{sen} x, 2 \operatorname{sen} x\}$ es una base del espacio de soluciones de $y'' + y = 0$.

b) ¿Cuáles son las coordenadas de la solución que cumple $y(0) = y'(0) = 1$ en dicha base?

3. Hallar la solución del sistema

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y}, \qquad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Para el siguiente sistema, hallar una matriz fundamental $\Phi = \Phi(t)$ que cumpla $\Phi(0) = \mathrm{Id}$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

5. Hállese la solución de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Resolver el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

8. Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

9. Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}\,,$$

10. Hallar la solución general $\vec{Y} = \vec{Y}(x)$ de

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} x-1 \\ -5x-2 \end{pmatrix}.$$

Indicación: Es más breve buscar una solución particular de un tipo especial, que aplicar el método de variación de las constantes.

11. Resuélvase

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \operatorname{cosec} t \\ \sec t \end{pmatrix}.$$

12. Hallar la solución $\vec{Y} = \vec{Y}(x)$ del sistema

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & -1 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

y escribir la matriz fundamental Φ en la forma $\Phi(x) = B(x)e^{xL}$ donde $B(x)$ es una matriz cuyos elementos son funciones periódicas y L es una matriz constante.

13. Si no hubiera rozamiento, una partícula de masa $m = 1$, se movería libremente en movimiento armónico simple alrededor del origen con frecuencia $\sqrt{2}/(2\pi)$ oscilaciones por segundo. Pero se ve afectada por una fuerza de rozamiento igual al doble de su velocidad. Hallar la ecuación de movimiento en términos de la posición x_0 y velocidad v_0 en el tiempo $t = 0$.

14. La amplitud de cierto péndulo somentido a oscilaciones forzadas responde a la ecuación

$$x'' + \epsilon x' + 4x = \operatorname{sen}(\omega t)$$

donde $\epsilon > 0$ es muy pequeño. Hállese la solución estacionaria (esto es, sin términos que tiendan a cero cuando $t \to +\infty$) para $\omega = 1$ y $\omega = 2$. Explíquese en qué se manifiesta el fenómeno de la resonancia.

15. Sean $y_1, y_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos soluciones de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.
a) Pruébese que su wronskiano $W = W(y_1, y_2)$ cumple $W' + P(x)W = 0$.
b) Dedúzcase que o bien W es idénticamente nulo o bien no se anula en ningún punto.

16. Compruébese que $y(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ e $y(x) = 0$ son soluciones de

$$\begin{cases} x^2\, y'' - 4\, x\, y' + (x^2 + 6)\, y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Explicar por qué esto no contradice el teorema de unicidad de soluciones para ecuaciones lineales.

17. Resuélvase

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10 \end{cases}$$

18. Considérese la ecuación con coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Demuéstrese que la solución general tiende a 0 cuando $t \to +\infty$ si y sólo si a y b son ambos positivos.

19. Resuélvase

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3 \end{cases}$$

20. Sabiendo que $i - 1$ es raíz del polinomio característico, calcúlese la solución general de

$$y^{(iv)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

21. Demuéstrese que si $a_0 \neq 0$ entonces la ecuación $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = x^k$ tiene una única solución polinómica y ésta es de grado k.

22. Hállese la solución general de $y''' - 2y'' + y' = x^2$.

23. Hállese una solución particular de $y'' + y = \cos(x + \alpha)$ donde α es una constante.

24. Notando que la función identidad es solución de $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, hállese la solución general.

25. Sabiendo que $x_1(t) = t^2$ es solución de

$$t^2\, x'' + t\, x' - 4\, x = 0,$$

hállese una segunda solución $x_2(t)$ linealmente independiente y la solución que verifica $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$.

26. Hállese la solución general de la ecuación lineal no homogénea

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

27. Pruébese que el método de variación de las constantes aplicado a la ecuación

$$y'' + y = f(x),$$

conduce a la solución particular

$$y(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{sen}(x-s)\,ds\,.$$

28. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones de $x'' + P(t)\,x' + Q(t)\,x = 0$

a) Pruébese que si tienen un cero común entonces una de ellas es múltiplo constante de la otra. *Indicación*: Encuéntrese una combinación lineal que satisfaga las mismas condiciones iniciales que la función nula.

b) Demuéstrese que la misma conclusión se obtiene cuando ambas funciones tienen máximos o mínimos relativos en un mismo punto.

29. Sea y_1 una solución no trivial de $y'' + q(x)y = 0$ e y_2 una solución no trivial de $y'' + r(x)y = 0$, donde $q(x) > r(x) > 0$.

a) Pruébese que si y_1, y_2 son positivas en cierto intervalo I, entonces el wronskinado $W = W(y_1, y_2)$ es estrictamente creciente en dicho intervalo.

b) Pruébese que si una función $f \in C^1$ es positiva para $a < x < b$ y $f(a) = f(b) = 0$, entonces $f'(a) \geq 0 \geq f'(b)$.

c) Dedúzcase el teorema de comparación de Sturm: Si y_1, y_2 son como en el enunciado, entonces y_1 se anula al menos una vez entre cada par de ceros consecutivos de y_2.