Problemas de E.D.O. Curso 2009-2010

1. Probar que el cambio $z = ax + by + c$ transforma la ecuación $y' = f(ax + by + c)$ en otra de variables separadas. Aplicar este método para resolver

- $y' = (x + y)^2$.
- $y' = \operatorname{sen}\,(x - y - 1)$.

2. Escoger un valor adecuado de k de manera que el cambio $z = y/x^k$ transforme la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}$$

en una ecuación de variables separadas.

3. Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas

- $x \operatorname{sen} \dfrac{y}{x} y' = y \operatorname{sen} \dfrac{y}{x} + x$.
- $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $x^2 y' = y^2 + 2xy$.
- $(x^3 + y^3)dx - xy^2 dy = 0$.

4. Hallar la solución general de :

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Observación: la solución $y = x$ no aparece típicamente representada en la fórmula de la solución general. Trátese de dar una explicación, aunque sea intuitiva, de este hecho. Nótese que $y(x) = x$ e $y(x) = -x$ son dos soluciones de b) bajo la condición $y(0) = 0$, es decir, ni siquiera hay unicidad. Estos temas se tratarán más adelante en el curso.

5. Dada la ecuación

$$y' = F\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$$

a) Si $AE \neq BD$, demostrar que se pueden elegir constantes h y k de modo que el cambio de variables $x = z - h$, $y = w - k$ la transforma en una ecuación homogénea.

b) Si $AE = BD$, hallar un cambio de variables que reduzca la ecuación a una de variables separadas.

c) Aplicar los resultados de los apartados anteriores para resolver:

- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}$

- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+4}{x+y-6}$

6. Calcular la solución de los siguientes problemas de valor inicial

$$a) \quad \begin{cases} x\,(2\,x^2+y^2)+y\,(x^2+2\,y^2)\,y'=0\,, \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} y + y\,\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{x} + \big(x\,\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\big)\,y' = 0 \\ y(\pi)=\pi \end{cases}$$

7. Determinar si las siguientes ecuaciones son exactas, y resolverlas en caso afirmativo.

- $(y-x^3)dx + (x+y^3)dy = 0.$
- $(1+y)dx + (1-x)dy = 0.$
- $2xy^4 + \operatorname{sen}\, y) + (4x^2y^3 + x\cos y)y' = 0.$
- $2x(1+\sqrt{x^2-y}) = \sqrt{x^2-y}\,y'.$
- $3x^2(1+\log y)dx + (\dfrac{x^3}{y} - 2y)dy = 0.$

8. Resolver primero como ecuación exacta y después como ecuación homogénea:

$$\frac{4y^2-2x^2}{4xy^2-x^3} + \frac{8y^2-x^2}{4y^3-x^2y}y' = 0.$$

9. Hallar un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x+y^2)$, para la ecuación

$$3\,y^2 - x + 2\,y\,(y^2-3\,x)\,y' = 0\,.$$

Calcular la solución general de la ecuación.

10. Resolver hallando un factor integrante apropiado:

- $(xy-1)dx + (x^2-xy)dy = 0.$
- $e^x + (e^x\text{cotg}y + 2y\text{cosec}\ y)y' = 0.$
- $ydx + (x - 2x^2y^3)dy = 0.$
- $y + (2x - ye^y)y' = 0.$
- $(y^2-y)dx + xdy = 0.$

11. Demostrar que si $\mu_1(x,y)$ y $\mu_2(x,y) \neq 0$ son dos factores integrantes de la ecuación

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0\,,$$

cuyo cociente no se reduce a una constante, entonces las curvas

$$\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} = C$$

son solución de la ecuación.

12. a) Hallar todas las soluciones de las ecuaciones

$$a) \quad t\,x' + (1-t)\,x = 0\,, \quad b) \quad t\,x' + (1-t)\,x = 1\,,$$

b) Calcular las soluciones que cumplen $x(0) = 0$ y $x(0) = 1$, o demostrar que tales soluciones no existen.

13. Demostrar que si $Q(t)$ es un polinomio de grado n, la ecuación

$$t\,x' + x = Q(t)$$

tiene exactamente una solución polinómica de grado n.

14. Sea $y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Demostrar que si todas las tangentes a su gráfica pasan por un mismo punto, entonces es un segmento de recta, y que si todas las normales pasan por un mismo punto, es un arco de circunferencia.

15. Resolver las ecuaciones lineales:

- $x' + x = 2\,t\,e^{-t} + t^2$
- $y' - 2\,x\,y = 6\,x\,\exp(x^2)$
- $xy' - 3y = x^4$.
- $(2y - x^3)dx = xdy$.
- $y' + y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$.
- $(1+x^2)y' + 2xy = \operatorname{cotg} x$.
- $(x\log x)y' + y = 3x^3$.

16. La ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ recibe el nombre de *Ecuación de Bernoulli* (observar que es lineal en los casos particulares $n = 0$ y $n = 1$). Demostrar que el cambio de variables $z = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.

Aplicar el método anterior para resolver $xy^2y' + y^3 = x\cos x$.

17. Probar que la ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y\log y$ puede resolverse mediante el cambio $z = \log y$, y aplicar este método para resolver la ecuación $xy' = 2x^2y + y\log y$.

18. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo orden:

- $yy'' + (y')^2 = 0$.
- $xy'' = y' + (y')^3$.
- $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$.
- $2yy'' = 1 + (y')^2$.
- $yy'' - (y')^2 = 0$.

19. Resolver

$$a)\quad (y'')^2 + (y''')^2 = 1, \qquad b)\quad y'' + (y')^2 = 2e^{-y}.$$

20. Una extensión natural de la ecuación lineal de primer orden es la *Ecuación de Ricatti*

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$

Aunque, en general, esta ecuación no puede resolverse por métodos elementales, demostrar que si se conoce una solución particular $y_1(x)$, el cambio de variables $z = y - y_1$ la transforma en una ecuación de Bernoulli .

a) Utilizar este método para resolver

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$$

sabiendo que la ecuación anterior tiene una solución particular $y_1(x) = x$.

b) Aplicar lo anterior para resolver la ecuación

$$2\,x^2\,y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2\,x\,y.$$