

Curso de EDO 2008/2009. Hoja de Entrenamiento.

Esta hoja contiene ejercicios elementales que sirven de entrenamiento para las técnicas de integración elemental del curso de EDO. Al final se hallan también las soluciones.

Ex1. Resolver las siguientes EDO con variables separadas

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $y' = -\frac{x^3}{(y+1)^2}$ | 2) $(1+x^3)y' - x^2y = 0$ |
| 3) $y'(x^2 - 4) = 2y + 1$ | 4) $(1+x)y' = y + 1$ |
| 5) $y'(x^2 - 1)\cot y = 1$ | 6) $y' = \frac{1+2y}{4-x}$ |
| 7) $y' \sin y = \sin x + 1$ | 8) $y' = \frac{1}{e^y e^{e^y}}$ |
| 9) $y' = x(1+y^2) \log x$ | 10) $y' = e^{x-y}$ |
| 11) $(1+e^{2x})y' = ye^{2x}$ | 12) $xyy' = -xy - x + y + 1$ |
| 13) $y' = \frac{4y}{x(y-3)}$ | 14) $(1-e^x)\frac{y'}{\sin y} + 3e^x \tan y = 0$ |
| 15) $y'y(e^x + 1) = e^x$ | 16) $y' \tan x = y \log y$ |
| 17) $xyy' = 1 - x^2$ | 18) $x(1+y^2)y' = 3$ |
| 19) $ye^{2x} - (1+e^{2x})y' = 0$ | 20) $y' = \frac{2xy}{x^2-1}$ |
| 21) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$ | 22) $e^{x+y}y' + x = 0$ |

Ex2. Resolver las siguientes EDO homogéneas

- | | |
|---|---|
| 1) $y' = \frac{y}{x}$ | 2) $xy' = 2y + x$ |
| 3) $x^2y' = y^2$ | 4) $x^2y' = y^2 + xy$ |
| 5) $x^2y' = y^2 + xy + x^2$ | 6) $x^2y' = y^2 - xy + x^2$ |
| 7) $y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$ | 8) $xy' = y + x \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ |
| 9) $y' = \frac{y^2+x^2}{xy-x^2}$ | 10) $y' = \frac{7xy+2x^2}{(y+2x)^2}$ |

Ex3. Resolver las siguientes EDO lineales de primer orden

- | | |
|--|--|
| 1) $y' + 2xy = 4x$ | 2) $y' + y \cotan x = 5e^{\cos x}$ |
| 3) $y' + y = 2x + 2$ | 4) $y' + \sin 2x + 2y \frac{\cos x}{\sin x} = 0$ |
| 5) $xy' = y(1 - x \tan x) + x^2 \cos x$ | 6) $xy' = 2y + x^3 e^x$ |
| 7) $y' = e^x y + e^x$ | 8) $y' x^2 + yx + 1 = 0$ |
| 9) $y' = -y \cotan x + 2 \cos x$ | 10) $y' = y \tan x + \sin x$ |
| 11) $y' = \frac{2}{x} y + \frac{x+1}{x}$ | |

Ex4. Resolver las siguientes EDO de Bernoulli

- | | |
|--|---|
| 1) $y' - y = xy^5$ | 2) $y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}y^4(1 - 2x)$ |
| 3) $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ | 4) $y' - y = xy^2$ |
| 5) $xy' + y = x^3 y^6$ | 6) $2xy^5 - y + 2xy' = 0$ |
| 7) $yy' - xy^2 + x = 0$ | 8) $2y' - \frac{y}{x} + y^3 \cos x = 0$ |
| 9) $y' = -\frac{y}{6x} + \frac{x}{2y^5}$ | 10) $y' + xy + x\sqrt{y} = 0$ |
| 11) $y' - y \cotan x = \sqrt[3]{y} \cos x$ | |

Ex5. Resolver las siguientes EDO lineales con coeficientes constantes homogéneas

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| 1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ | 2) $y'' - 4y' = 0$ |
| 3) $y'' + y' - 2y = 0$ | 4) $y'' - 4y' + 3y = 0$ |
| 5) $y'' + 4y' + 4y = 0$ | 6) $y'' + 6y' + 10y = 0$ |
| 7) $y'' - y' + y = 0$ | 8) $y'' + 2y' + 2y = 0$ |
| 9) $y''' - y' = 0$ | 10) $y^{(4)} - y'' = 0$ |
| 11) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ | 12) $y^{(8)} + y = 0$ |

Ex6. Resolver las siguientes EDO lineales con coeficientes constantes completas

1) $y'' + y' - 6y = 2e^{-x}$

3) $y'' - y = \cos x$

5) $y'' + 4y = e^x \cos x$

7) $y''' - y'' = x^2 + 1$

9) $y^{(4)} + y = \sin x$

2) $y'' + 2y' = e^x$

4) $y'' + 4y = \cos x$

6) $y'' + 2y' = e^x$

8) $y'' + y' - 2y = x^2$

10) $y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 + x + 1$

Ex7. Resolver los siguientes problemas de Cauchy

1) $\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y'' - y = x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} y'' + y' - 6y = -4e^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} y^{(4)} - y''' = e^x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y' = xy \\ y(1) = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y'' + y' - 6y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} y'' + 4y = e^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} y^{(4)} - 5y'' + 5y = \frac{1}{5}x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases}$

Soluciones.

Ex1

- | | | |
|--|--|--------------------|
| 1) $3x^4 + 4(y+1)^3 = C$ | 2) $y^3 = C(1+x^3)$ | $y = 0$ |
| 3) $(1+2y)^2 = C\frac{2-x}{2+x}$ | $y = -\frac{1}{2}$ 4) $y = C(x+1) - 1$ | $y = -1$ |
| 5) $\sin^2 y = C\frac{1-x}{1+x}$ | 6) $(x-4)^2(1+2y) = C$ | $y = -\frac{1}{2}$ |
| 7) $\cos y = \cos x - x + C$ | 8) $e^{e^y} = x + C$ | |
| 9) $\arctan y = \frac{x^2}{2}(\log x - \frac{1}{2}) + C$ | 10) $e^y = e^x + C$ | |
| 11) $\log y = \frac{1}{2} \log(1 + e^{2x}) + C$ | $y = 0$ 12) $y + x = \log(Cx(y+1))$ | $y = -1$ |
| 13) $y - 3 \log y = 4 \log x + \log C$ | $y = 0$ 14) $\tan y = C(1 - e^x)^3$ | |
| 15) $\frac{1}{2}y^2 = \log(1 + e^x) + C$ | 16) $\log \log y = \log \sin x + C$ | $y = 1$ |
| 17) $x^2 + y^2 = \log(Cx^2)$ | 18) $y + \frac{y^3}{3} = 3 \log x + C$ | |
| 19) $\log y = \frac{1}{2} \log(1 + e^{2x}) + C$ | $y = 0$ 20) $y = C x^2 - 1 $ | $y = 0$ |
| 21) $ye^{\frac{1}{y}} = Cxe^{-\frac{1}{x}}$ | 22) $y = -x + \log(x+1 + Ce^x)$ | |

Ex2

- | | | |
|--|--|----------|
| 1) $y = Cx$ | 2) $y = Cx^2 - x$ | |
| 3) $y = \frac{x}{1-Cx}$ | $y = 0$ 4) $y = \frac{-x}{\ln x +C}$ | $y = 0$ |
| 5) $y = \arctan [\ln x + C]$ | 6) $y = x - \frac{x}{\ln x +C}$ | $y = x$ |
| 7) $y = -x \ln [\ln x + C]$ | 8) $y = x \sqrt{\arcsin \left(-\frac{1}{2 \ln x +C} \right)}$ | |
| 9) $\frac{y}{x} - 2 \ln \left \frac{y-x}{x} \right = \ln x + C$ | | |
| 10) $-\frac{y}{x} + 7 \ln \left \frac{y}{x} - 2 \right + \frac{4}{\left(\frac{y}{x} + 2\right)^3} = \ln x + C$ | $y = x$ | $y = 2x$ |

Ex3

- | | |
|--|--|
| 1) $y = 2 + Ce^{-x^2}$ | 2) $y \sin x = -5e^{\cos x} + C$ |
| 3) $y = 2x + Ce^{-x}$ | 4) $2y \sin^2 x + \sin^4 x = C$ |
| 5) $y = (x^2 + Cx) \cos x$ | 6) $y = x^2(e^x - C)$ |
| 7) $y = Ce^{(e^x)} - 1$ | 8) $y = 1 - \frac{1}{C} \log x$ |
| 9) $y = \frac{1}{\sin x} \left(C - \frac{1}{2} \cos 2x \right)$ | 10) $y = \frac{1}{\cos x} \left(C + \frac{1}{2} \sin^2 x \right)$ |
| 11) $y = Cx^2 - x - \frac{1}{2}$ | |

Ex4

- 1) $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$ $y = 0$ 2) $\frac{1}{y^3} = -1 - 2x + Ce^x$ $y = 0$
 3) $\frac{1}{y} = -\sin x + Ce^x$ $y = 0$ 4) $\frac{1}{y} = 1 - x + Ce^{-x}$ $y = 0$
 5) $\frac{2}{y^5} = Cx^5 + 5x^3$ $y = 0$ 6) $y^4(4x^3 + C) = 3x^2$ $y = 0$
 7) $y^2 = 1 + Ce^{x^2}$ $y = \pm 1$ 8) $y^{-2}x = \cos x + x \sin x + C$ $y = 0$
 9) $y = \pm \left(\frac{x^3 + C}{x}\right)^{\frac{1}{6}}$ 10) $y = \left(Ce^{-\frac{1}{4}x^2} - 1\right)^2$ $y = 0$
 11) $y = \pm \left(2 \sin x + C(\sin x)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ $y = 0$

Ex5

- 1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ 2) $y = C_1 + C_2 e^{4x}$
 3) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ 4) $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$
 5) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ 6) $y = e^{-3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
 7) $y = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$ 8) $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
 9) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$ 10) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 e^x$
 11) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$ 12) Buen trabajo chicos!

Ex6

- 1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{3} e^{-x}$
 2) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x$
 3) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x$
 4) $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{3} \cos x$
 5) $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{5} e^x \cos x + \frac{1}{10} e^x \sin x$
 6) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x$
 7) $y = C_1 + C_2 x - \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2$
 8) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{3}{4}$
 9) $y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \right] +$
 $\quad + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left[C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \right] + \frac{1}{2} \sin x$
 10) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x + x^2 + x - 3$

Ex7

1) $y = e^{-x}$

3) $y = \sin x$

5) $y = \frac{1}{2e^2}e^{2x} + \frac{1}{2e}e^x$

7) $y = 3 \cos(2x) - \sin(2x)$

9) $y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - x$

11) $y = -\frac{4}{5}e^{2x} - \frac{1}{5}e^{-3x} + e^x$

13) $y = -1 - x - \frac{1}{2}x^2 + e^x$

2) $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$

4) $y = \cos x$

6) $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right]$

8) $y = -e^{-3x}$

10) $y = -\sin x + x$

12) $y = -\frac{1}{5} \cos(2x) - \frac{1}{10} \sin(2x) + \frac{1}{5}e^x$

14) $y = -\frac{2}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-x} + \frac{1}{12}e^{2x} - \frac{1}{12}e^{-2x} + x$