Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NOTA

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Segundo Curso de Matemáticas.
Febrero 2009

Apellidos .... Nombre ....
D.N.I. .... Grupo ....

Ejercicio 1. Se considera la ecuación

$$xyy' + y^2 = e^x \tag{1}$$

a) Hacer el cambio $y^2 = z$ para transformar la ecuación en una lineal. Resolver la ecuación lineal resultante. Utilizar esto para resover (1).
b) Hallar un factor integrante para (1). Resolver (1) usando ese factor.

Ejercicio 2.
Resolver el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Dado el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \begin{cases} \sqrt{1-y^2}\,, & \text{si } |y| \leq 1 \\ 0\,, & \text{si } |y| \geq 1 \end{cases} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué datos iniciales $y_0 \in \mathbb{R}$ la solución existe y/o es unica (localmente)?
b) Resolver la ecuación y contrastar los resultados con los obtenidos en el apartado (a).

Ejercicio 4. Se considera el sistema,

$$\begin{cases} x' = & -x^3 - y^3 \\ y' = & x^3 - 2y^3 + 3y^5 \end{cases}$$

a) Esbozar razonadamente las trayectorias en un entorno del punto crítico $(1, -1)$.
b) Probar que el punto crítico $(0, 0)$ es asintóticamente estable, utilizando un funcional de Lyapunov del tipo $V(x, y) = x^\alpha + y^\beta$. *Indicación: observar que si* $|y| < \frac{1}{2}$, *entonces* $y^8 \leq \frac{1}{4}y^6$.

Atención: El ejercicio (***), escrito al dorso de esta página sólo se calificará a aquellos alumnos que hayan obtenido una nota superior a 9 puntos en los cuatro problemas anteriores, y, en su caso, servirá para asignar las posibles Matrículas de Honor.

Ejercicio (***).

$$\begin{cases} y' = \left(\alpha + y^4\right)^{\frac{1}{2+\alpha}} + |y|^{\frac{2}{\pi}} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) Pongamos $\alpha = 1$. ¿Qué sabes decir de existencia y unicidad local? Comparando con oportunas sub/super soluciones, probar que la solución existe al menos en $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ y no existe para $t > 3$.

b) Pongamos $\alpha = 0$. ¿Qué sabes decir de existencia y unicidad local?
c) Pongamos $\alpha = 2$. ¿Qué sabes decir de existencia y unicidad local?
