UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID	**EDO** **CURSO ACADÉMICO 2008-2009**	NOTA

Nombre y Apellidos ______________________________

Grupo ______________________________

Problema 1 *Dado el sistema*

$$\begin{cases} x'(t) = y(t)\, e^{x^2(t)-1} - x(t)\, e^{x(t)-y(t)} = F\big(x(t), y(t)\big) \\ y'(t) = x^2(t)\, y(t) - y(t) = G\big(x(t), y(t)\big) \end{cases}$$

Determinar la naturaleza de los (tres) puntos críticos utilizando el método de la linealización.
Dibujar las trayectorias (en el plano de fase (x, y)) de los sistemas linealizados, y también del sistema completo.
¿ Qué sabes decir sobre la estabilidad de estos puntos críticos, para los sistemas lineales y para el completo ?

Solución. Los puntos críticos son los puntos (x, y) tales que $F(x, y) = G(x, y) = 0$. Es facíl averiguar que los unícos puntos críticos son: $P_0(0, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-1, -1)$. La ecuación diferencial de las trayectorias en el plano de fases:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} = \frac{x^2\, y - y}{y\, e^{x^2-1} - x\, e^{x-y}}$$

las soluciones representan, en el plano de fases (x, y), las trayectorias del sistema"lejos" de los puntos críticos. Se puede integrar lejos de los puntos críticos? es exacta? (ejercicio de la parte 2).
Antes que continuar es practico calcular unas derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \partial_x F(x, y) = 2xye^{x^2-1} - (x+1)e^{x-y}, & \partial_x F(P_0) &= -1, & \partial_x F(P_1) &= 0, & \partial_x F(P_2) &= 2,\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \partial_y F(x, y) = e^{x^2-1} + xe^{x-y}, & \partial_y F(P_0) &= e^{-1}, & \partial_y F(P_1) &= 2, & \partial_y F(P_2) &= 0,\\
\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) &= \partial_x G(x, y) = 2xy, & \partial_x G(P_0) &= 0, & \partial_x G(P_1) &= 2, & \partial_x G(P_2) &= 2,\\
\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) &= \partial_y G(x, y) = x^2 - 1, & \partial_y G(P_0) &= -1, & \partial_y G(P_1) &= 0, & \partial_y G(P_2) &= 0,
\end{aligned}$$

Para intender lo que pasa en los puntos críticos, se tiene que linealizar al rededor de ellos: pongo $P_i = (x_i, y_i)$ y

$$\begin{cases} x' = F\big(x(t), y(t)\big) = \partial_x F(P_i)(x - x_i) + \partial_y F(P_i)(y - y_i) + Err[F](x, y) \\ y' = G\big(x(t), y(t)\big) = \partial_x G(P_i)(x - x_i) + \partial_y G(P_i)(y - y_i) + Err[G](x, y) \end{cases}$$

donde he definido $Err[H](x, y) := F(x, y) - \partial_x H(P_i)(x - x_i) - \partial_y H(P_i)(y - y_i)$.
La traslación $(x - x_i) \mapsto X$ y $(y - y_i) \mapsto Y$ nos da el sistema lineal:

$$\begin{cases} X'(t) = \partial_x F(P_i) X + \partial_y F(P_i) Y \\ Y'(t) = \partial_x G(P_i) X + \partial_y G(P_i) Y \end{cases}$$

cuyo comportamiento alrededor de $(X, Y) = (0, 0)$, nos dice el comportamento del sistema no-lineal al rededor del punto critico P_i, siempre cuando los errores son pequeños, es decir cuando

$$\frac{Err(F)(x, y)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \to 0\,, \qquad \text{y} \qquad \frac{Err(G)(x, y)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \to 0\,, \qquad \text{para } (x, y) \to (x_i, y_i)$$

Dado que las funciones F y G son regulares (al menos de clase C^2), entonces el desarrollo de Taylor de orden 1 (es decir, la linealización) tiene un error pequeño:

$$Err[H](x, y) = o\left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}\right) \qquad \text{para } H = F, G.$$

En el caso de P_0 es facíl averiguarlo directamente:

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to P_0} \left| \frac{Err(F)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{y\,\mathrm{e}^{x^2-1} \; - \; x\,\mathrm{e}^{x-y} + x - \mathrm{e}^{-1} y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x\,(\mathrm{e}^{x}-1) + \mathrm{e}^{-1}\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right) y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + \mathrm{e}^{-2} x^2 |y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(1+\mathrm{e}^{-2} y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

dado que $(\mathrm{e}^{x}-1) \sim x$ y $(\mathrm{e}^{x^2}-1) \sim \mathrm{e}^{-1} x^2$ cuando $x \to 0$. El error de G es analogo. En los otros puntos hay que tener cuidado si se quiere hacerlo en las variables $(X,Y) = \big(x - x_i, y - y_i\big) \to (0,0)$.
Ahora analizamos separadamente los sistemas lineales correspondientes a P_0, P_1, P_2.

- $P_0 = (0,0)$. Analizamos alrededor de $(X,Y) = (0,0)$ el comportamiento del sistema lineal

$$\begin{cases} X' = -X + \mathrm{e}^{-1} Y \\ Y' = -Y \end{cases} \qquad \text{un autovalor doble } \lambda = -1 \text{ y un solo autovector } v_1 = (1,0)$$

Estamos en el caso "Jordan", y la solución general es dada con la matriz exponencial $Z(t) = \mathrm{e}^{At} Z(0)$, donde $\overrightarrow{Z} = \big(X(t), Y(t)\big)$ y A es la matriz del sistema:

$$Z(t) = \exp\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-1} t\right] Z(0) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-1} t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z(0) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & e^{-1} t \mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} Z(0)$$

la solución general se puede escribir también como

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 e^{-1} t \mathrm{e}^{-t} \\ c_2 \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-1} t \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

con $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (\mathrm{e}^{-1} t, 1)$. Por lo tanto el punto critico $(X,Y) = (0,0)$ es un nodo impropio estable (lineas rectas que se van hace al origen) y es un atractor para el sistema lineal.
Usando el Teorema de linealización, cuyas hypótesis están verificadas, podemos garantizar que el punto critico nolineal $P_0 = (0,0)$ o bien es un *nodo impropio estable* o bien *nodo estable* para el sistema nolineal, de todas formas se queda un atractor. (Dibujar el lineal y las dos posibilidades del nolineal)

- $P_1 = (1,1)$. Analizamos alrededor de $(X,Y) = (0,0)$ el comportamiento del sistema lineal

$$\begin{cases} X' = 2Y \\ Y' = 2X \end{cases} \qquad \text{dos autovalores } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1 \text{ y dos autovectores } v_1 = (1,1)\ \ v_2 = (1,-1)$$

La solución general es dada por

$$Z(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t} v_1 + c_2\,\mathrm{e}^{-2t} v_2$$

Por lo tanto el punto critico $(X,Y) = (0,0)$ es un *punto de silla* con ejes principales $v_1 = (1,1)$ (repulsor) y $v_2 = (1,-1)$ (atractor) y en general no es ni atractor ni repulsor, por lo tanto es inestable. Las unicas soluciones que lo alcanzarán son las que corresponden a $c_1 = 0$, es decir $Z(t) = c_2\,\mathrm{e}^{-2t} v_2$.
Usando el Teorema de linealización, cuyas hypótesis están verificadas, podemos garantizar que el punto critico nolineal $P_0 = (1,1)$ es un punto de silla para el sistema nolineal, por lo tanto no es ni atractor ni repulsor, tambien para el sistema no-lineal. (Dibujar el lineal y el nolineal)

- $P_2 = (-1,-1)$. Analizamos alrededor de $(X,Y) = (0,0)$ el comportamiento del sistema lineal

$$\begin{cases} X' = 2X \\ Y' = 2X \end{cases} \qquad \text{dos autovalores } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2 \text{ y dos autovectores } v_1 = (0,1)\ \ v_2 = (1,1)$$

La solución general es dada por

$$Z(t) = c_1\,\mathrm{e}^{0t} v_1 + c_2\,\mathrm{e}^{2t} v_2 = c_1\, v_1 + c_2\,\mathrm{e}^{2t} v_2$$

Por lo tanto el punto critico $(X,Y) = (0,0)$ es un *nodo impropio inestable*, dado que repele a lo largo de cualquier dirección menos v_1. De hecho cuando $c_2 = 0$ la solución es constante.
Usando el Teorema de linealización, cuyas hypótesis están verificadas, podemos garantizar que el punto critico nolineal $P_0 = (-1,-1)$ o bien es un *nodo inestable* o bien en un *foco inestable* para el sistema nolineal, de todas formas se queda un repulsor, y repele tambien a lo largo de la dirección $v_1 = (0,1)$. (Dibujar el lineal y las dos posibilidades del nolineal)

- Dibujar el sistema nolineal global: ojo que sea coerente el dibujo.