UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID	**EDO** **CURSO ACADÉMICO 2008-2009**	NOTA

Nombre y Apellidos ____________________

Grupo ____________________

Problema 1 *Sea la sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dada por*

$$f_n(x) = n\left(1 + x^{\frac{1}{n}}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-nx}.$$

Probar que converge uniformemente en $[1,\infty)$. *Probar que converge puntualmente, pero no uniformemente, en* $[0,\infty)$.

Solución. Antes que todo miramos la convergencia puntual en $[0,+\infty)$: para cada $x \in [0,+\infty)$ fijo, la sucesión numerica $f_n(x)$ converge a

$$f_n(x) = \begin{cases} n\left(1 + x^{\frac{1}{n}}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-nx} & \to \quad 0 \qquad \text{si } x > 0 \\ n\sin\left(\frac{1}{n}\right) & \to \quad 1 \qquad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

dado que la exponencial domina si $x > 0$ y dado que $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ para $n \to +\infty$. El limite es discontinuo en $[0,+\infty)$ por lo tanto la sucesión no puede converger uniformemente en todo $[0,+\infty)$: si la sucesión f_n de funciones continuas, fuese uniformente convergente en todo $[0,+\infty)$, el limite deberia ser continuo en todo $[0,+\infty)$, y ya sabemos que no lo es.

De otra manera se podia comprobar que el estremo superior

$$0 \le \sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = 1$$

por lo tanto no puede converger a cero en $[0,+\infty)$ y la convergencia no puede ser uniforme.

Analizamos ora si hay convergencia uniforme en $[1,+\infty)$: es suficiente provar que

$$0 \le \sup_{x\in[1,+\infty)} |f_n(x)| \le c_n \to 0$$

para una sucesión c_n positiva y independiente de x. Para todo $x \ge 1$,

$$|f_n(x)| = n\left(1 + x^{\frac{1}{n}}\right)\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|\mathrm{e}^{-nx} \le_{\textbf{(i)}} 2nx^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{-nx} \le_{\textbf{(ii)}} 2nx^{\frac{1}{n}}\frac{c_1}{(nx)^5} = \frac{2c}{n^4}\frac{1}{x^{5-\frac{1}{n}}} \le_{\textbf{(iii)}} \frac{2c}{n^4} \to 1$$

donde:

(i) he usado el hecho que $x \ge 1$, así que $1 + x^{1/n} \le 2x^{1/n}$, y que $|\sin(1/n)| \le 1$.

(ii) he usado el hecho que $\mathrm{e}^{-nx} \le c/(nx)^6$ para una constante $c > 0$.

(iii) he usado el hecho que $x \ge 1$, así que $1/x^{5-\frac{1}{n}} \le 1$.

Elijo $c_n = 2c/n^4$ y eso me garantiza la convergencia uniforme en todo $[1,+\infty)$.

Problema 2 *Se considera el problema:*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{3}y^4 + \dfrac{1}{6}\dfrac{y}{1+t} + \dfrac{1}{3}|y|^{\frac{1}{4}} = f(t,y) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

a) ¿ Qué puedes decir sobre existencia y unicidad de las soluciones ?
b) Demostrar que $y(t) \geq (1+t)^{\frac{1}{6}}$ para todo $t \geq 0$. (Indicación: comparar y' con $\frac{1}{6}\frac{y}{1+t}$.)
c) Supongamos que $y(t)$ es una solución definida en un intervalo $[0,T)$. Demostrar que $T \leq 1$. (Indicación: comparar y' con $\frac{1}{3}y^4$.)
d) Demostrar que la solución está definida en el intervalo $[0, \frac{1}{3})$. (Indicación: comparar y' con y^4.)

Solución. (a) La función $f(t,y)$ es continua para $(t,y) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$, por lo tanto el Teorema de Peano garantiza la existencia local en un intervalo maximal $[0,T) \subseteq [0,+\infty)$. La función $f(t,y)$ no es Lipschitz para todo $(t,y) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$, dado que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{6}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{12}\frac{y}{|y|^{\frac{7}{4}}}$$

y es claro que $\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = \infty$. Pero el dato inicial es $y(0) = 1$, y la función $f(t,y)$ es Lipschitz en la banda $(t,y) \in [0,+\infty) \times [1,Y]$, para todo $Y \geq 1$, de hecho

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq \sup_{(t,y)\in[0,+\infty)\times[1,Y]} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| |y_1 - y_2| \leq \left|\frac{4}{3}Y^3 + \frac{1}{3}\right| |y_1 - y_2| = L|y_1 - y_2|.$$

lo cual asegura la unicidad local.
Entonces concluimos que hay existencia y unicidad local en $[0,T)$, pero no tenemos informaciones acerca de $T > 0$.

(b) Dado que $f(t,y) \geq \dfrac{1}{6}\dfrac{y}{1+t}$ entonces tenemos que

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{3}y^4 + \dfrac{1}{6}\dfrac{y}{1+t} + \dfrac{1}{3}|y|^{\frac{1}{4}} = f(t,y) \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{se compara con} \quad \begin{cases} \underline{y}' = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{1+t}\underline{y} \\ \underline{y}(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

y sabemos que $y(t) \geq \underline{y}(t)$ para todo $t \geq 0$, dado que $y(0) = \underline{y}(0) = 1$. Integrando la ecuación para $\underline{y}$ encuentro que $\underline{y}(t) = (1+t)^{\frac{1}{6}} \geq 1$ y puedo concluir que $y(t) \geq \underline{y}(t) = (1+t)^{\frac{1}{6}} \geq 1$, para todo $t \geq 0$.

(c) Dado que $f(t,y) \geq \dfrac{1}{3}y^4$ entonces tenemos que

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{3}y^4 + \dfrac{1}{6}\dfrac{y}{1+t} + \dfrac{1}{3}|y|^{\frac{1}{4}} = f(t,y) \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{se compara con} \quad \begin{cases} \underline{y}' = \dfrac{1}{3}\underline{y}^4 \\ \underline{y}(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

y sabemos que $y(t) \geq \underline{y}(t)$ para todo $t \geq 0$, dado que $y(0) = \underline{y}(0) = 1$. Integrando la ecuación para $\underline{y}$, encuentro que $\underline{y}(t) = (1-t)^{-\frac{1}{3}}$ y descubro que $\underline{y}(t) \to +\infty$ cuando $t \to 1$, por lo tanto $y(t)$ (que es mayor que $\underline{y}(t)$) támbien explota cuando $t \to 1$. Eso quiere decir que, siendo $y(t)$ definida en todo $[0,T)$, entonces necesariamente $T \leq 1$.

(d) Dado que $f(t,y) \leq y^4$, siendo siempre $y(t) \geq 1$ gracias al apartado (b), entonces tenemos que

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{3}y^4 + \dfrac{1}{6}\dfrac{y}{1+t} + \dfrac{1}{3}|y|^{\frac{1}{4}} = f(t,y) \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{se compara con} \quad \begin{cases} \overline{y}' = \overline{y}^4 \\ \overline{y}(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

y sabemos que $y(t) \leq \overline{y}(t)$ para todo $t \geq 0$, dado que $y(0) = \overline{y}(0) = 1$. Integrando la ecuación para $\overline{y}$, encuentro que $\overline{y}(t) = (1-3t)^{-\frac{1}{3}}$ y descubro que $\overline{y}(t) \to +\infty$ cuando $t \to 1/3$, por lo tanto $y(t)$ (que es menor que $\overline{y}(t)$) esta acotada cuando $t < 1/3$. Eso quiere decir que, siendo $y(t)$ definida en todo $[0,T)$, entonces estoy seguro que $T \geq 1/3$.

Concluyendo, hemos garantizado que existe una unica solución $y(t) \geq 1$ en un intervalo $[0,T)$, donde $1/3 \leq T \leq 1$.