UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID	**EDO** **CURSO ACADÉMICO 2008-2009**	NOTA

Nombre y Apellidos ____
Grupo ____

Problema 1 *Resolver la siguiente ecuación diferencial del segundo orden*

$$\frac{1}{4}\, y'' + 3\, y' + 25y = \cos(2t)\,.$$

Solución. El polinomio caractéristico es $p(\lambda) = \frac{1}{4}\lambda^2 + 3\lambda + 25$, y sus soluciones son $\lambda_{\pm} = -6 \pm 8i$. Por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_C(t) = c_1\, \mathrm{e}^{\lambda_+ t} + c_2\, \mathrm{e}^{\lambda_- t} = \mathrm{e}^{-6t}\left[c_1 \mathrm{e}^{8i\,t} + c_2 \mathrm{e}^{-8i\,t}\right]$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ son constantes arbitrarias, pero tales que la solución sea real. Es conveniente encontrar dos soluciones linealmente independientes que sean reales, y eso se puede hacer eligiendo

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y_1(t) = \mathrm{e}^{-6t}\frac{\mathrm{e}^{8i\,t} + \mathrm{e}^{-8i\,t}}{2} = \mathrm{e}^{-6t}\cos(8t)$$

y tambien

$$c_1 = \frac{1}{2i}\,, \quad c_2 = -\frac{1}{2i} \qquad \Rightarrow \qquad y_2(t) = \mathrm{e}^{-6t}\frac{\mathrm{e}^{8i\,t} - \mathrm{e}^{-8i\,t}}{2i} = \mathrm{e}^{-6t}\sin(8t)$$

las dos soluciones son independientes dado que su determinante Wronskiano

$$W(t) = \det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-6t}\cos(8t) & \mathrm{e}^{-6t}\sin(8t) \\ -8\mathrm{e}^{-6t}\sin(8t) - 6\mathrm{e}^{-6t}\cos(8t) & 8\mathrm{e}^{-6t}\cos(8t) - 6\mathrm{e}^{-6t}\sin(8t) \end{bmatrix} \neq 0$$

es distinto de cero en $t = 0$ (támbien en $8t = \pi/2$) entonces es distinto de cero en todo punto. Por lo tanto y_1 y y_2 son independientes y la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_R(t) = k_1\, \mathrm{e}^{-6t}\cos(8t) \;+\; k_2\, \mathrm{e}^{-6t}\sin(8t)$$

para cada $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Ahora tenemos que buscar una solución particular, y la buscamos de la forma

$$\begin{aligned} y_P(t) &= A\cos(2t) + B\sin(2t) \\ y_P'(t) &= -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) \\ y_P''(t) &= -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) \end{aligned}$$

ahora es claro que

$$\frac{1}{4}\, y_P'' + 3\, y_P' + 25y_P = \cos(2t) \iff (24A + 6B)\cos(2t) + (24B - 6A)\sin(2t) = \cos(2t)$$

entonces se llega a la conclusion que y_P satisface la ecuación solo cuando $A = 4/102$ y $B = 1/102$, por lo tanto la solución general de la ecuación es

$$y_G(t) = y_R(t) + y_P(t) = k_1\, \mathrm{e}^{-6t}\cos(8t) \;+\; k_2\, \mathrm{e}^{-6t}\sin(8t) + \frac{4}{102}\cos(2t) + \frac{1}{102}\sin(2t)\,,$$

donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Problema 2 *Dado el siguiente sistema homogéneo con coeficientes constantes*

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X}\,.$$

Hallar la solución general. Encontrar aquella solución tal que $\mathbf{X}(0) = (1, 2, 0)$. *Es unica?*

Solución. El polinomio caractéristico es $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$, entonces tenemos un autovalor $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algebrica y geometrica 1, y un autovalor $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad algebrica 2.
Buscamos una matriz P de cambio de variable que transforme A en su forma de Jordan J:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad J = P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovectores: $\mathbf{v}_1$ es el autovector correspondiente a $\lambda_1 = 2$, por lo tanto es solución del sistema $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$, y tiene la forma $\mathbf{v}_1 = (0, 0, z)$, y elígo $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$. $\mathbf{v}_2$ es un autovector correspondiente a $\lambda_2 = 3$, por lo tanto es solución del sistema $(A-3I)\mathbf{v} = 0$, y tiene la forma $\mathbf{v}_1 = (x, 2x, 3x)$, y elígo $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$. Está claro que la dimension del autoéspacio correspondiente a $\mathbf{v}_2$ es 1, es decir su multiplicidad geometrica es 1. Entonces la matriz no es diagonalizable, siendo la multiplicidad algebrica 2 y la geometrica 1. Busco entonces el autovector generalizado $\mathbf{w}$, que es solución del sistema $(A-3I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$, que tiene la forma $\mathbf{w} = (x, 2x-1, 3x-4)$, y elígo $\mathbf{w} = (1, 1, -1)$. Por lo tanto la matriz P es dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Jordan $J = D + N$,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{D\,t} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{e}^{Nt} = I + Nt + \underbrace{N^2}_{=0}\frac{t^2}{2} + ... = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dado que $N^2 = 0$. Adémas $DN = ND$, es decir las dos matrices N y D comútan, entonces

$$\mathrm{e}^{Jt} = \mathrm{e}^{Dt+Nt} = \mathrm{e}^{Dt}\mathrm{e}^{Nt} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} & t\,\mathrm{e}^{3t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}$$

En fin calculo la matriz exponencial:

$$\mathrm{e}^{At} = P\,\mathrm{e}^{Jt}\,P^{-1} = \begin{bmatrix} (1+2t)\mathrm{e}^{3t} & -t\mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 4\mathrm{e}^{3t} & (1-2t)\mathrm{e}^{3t} & 0 \\ (6t-5)\mathrm{e}^{3t} + 5\mathrm{e}^{2t} & (-3t+4)\mathrm{e}^{3t} - 4\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$$

y la solución general tendrá la forma $\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{At}\mathbf{X}(0)$. Si $\mathbf{X}(0) = (1, 2, 0)$, entonces la unica solución tiene la forma

$$\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{At}\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} (1+2t)\mathrm{e}^{3t} & -t\mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 4\mathrm{e}^{3t} & (1-2t)\mathrm{e}^{3t} & 0 \\ (6t-5)\mathrm{e}^{3t} + 5\mathrm{e}^{2t} & (-3t+4)\mathrm{e}^{3t} - 4\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{3t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} - 3\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$$

.