

Teoría de modelos de cuerpo valuados

por

Margarita Otero*

RESUMEN. En esta exposición se introducen los conceptos básicos de teoría de modelos vistos a través de un ejemplo clásico de aplicación de la teoría de modelos al álgebra, la demostración del Teorema de Ax-Kochen: para cada $d > 0$ existe un conjunto finito de primos Y_d tal que, para todo primo $p \notin Y_d$, cualquier polinomio homogéneo de grado d sobre los números p -ádicos en más de d^2 variables tiene un cero no trivial.

1. INTRODUCCIÓN

La *teoría de modelos* es una parte de la lógica matemática que estudia clases de estructuras que satisfacen ciertas propiedades expresadas en un lenguaje formal. Estas propiedades pueden ser, por ejemplo, los axiomas de cuerpo —y las estructuras a tratar, los cuerpos—; también pueden ser propiedades que se satisfacen en un cuerpo concreto —por ejemplo, el de los números complejos—. Decimos que el conjunto de los axiomas de cuerpo forman una *teoría* y los cuerpos son los *modelos* de esa teoría (véase §3). Así, en teoría de modelos, a diferencia del lenguaje coloquial, los *modelos* son los objetos concretos, mientras que las *teorías* —los axiomas— podríamos decir que representan el papel de los objetos idealizados. El concepto de *estructura* que vamos a considerar es una generalización del de estructura algebraica; nuestras estructuras pueden tener una componente analítica —el cuerpo de los reales junto con funciones analíticas reales—, o geométrica o de otros tipos que veremos más adelante.

La teoría de modelos se divide tradicionalmente en dos partes: *pura* y *aplicada*. La teoría de modelos *pura* estudia teorías abstractas que tengan *buenas propiedades* desde el punto de vista de la teoría de modelos; por ejemplo, teorías cuyos modelos se puedan clasificar, entre ellas está la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados, cuyos modelos se clasifican mediante la característica y el grado de trascendencia —sobre el cuerpo base—. La parte *aplicada* estudia o bien una estructura concreta —por ejemplo el cuerpo ordenado de los números reales—, o clases de estructuras clásicas —estructuras algebraicas, geométricas, etc.—. Ambas partes —pura y aplicada— interaccionan entre sí, y ambas tienen aplicaciones a otras partes de las matemáticas. La demostración de Ehud Hrushovski de la conjetura de Mordell-Lang para cuerpos de funciones —incluyendo característica positiva— es un excelente ejemplo de aplicación de la teoría de modelos pura (véase [8]). A su vez, la reciente

*Subvencionada parcialmente por el proyecto MTM2014-55565 del MICINN.

resolución de Jonathan Pila de la conjetura de André-Oort para productos de curvas modulares utiliza de forma esencial la *o-minimalidad*, que es parte de la teoría de modelos aplicada (véase [11]). La teoría de modelos es no solamente una parte de las matemáticas, sino también una *forma* de hacer matemáticas.

En esta exposición vamos a ver cómo se aplica la teoría de modelos para obtener información sobre cuerpos valuados, en particular sobre los cuerpos \mathbb{Q}_p de los números p -ádicos. Lo que se pretende es, por un lado, dar un ejemplo clásico de aplicación de teoría de modelos y, por otro, introducir los conceptos y técnicas básicas que permitan —incluso al lector no interesado en valoraciones no arquimedianas— leer otras aplicaciones de la teoría de modelos.

Los teoremas de James Ax, Simon Kochen y Yuri Ėrshov que expondremos en las secciones siguientes marcan el inicio de la *teoría de modelos p -ádica*. Estos resultados se publican en la década de los años 60 del siglo XX y a partir de entonces, y hasta nuestros días, la teoría de modelos p -ádica se desarrolla de forma fructífera (véase [10] para una descripción de este desarrollo hasta los años 80, y su continuación en [2] para resultados más recientes). Entre los resultados más relevantes del área —además de los ya mencionados— podemos citar:

- Los resultados de eliminación de cuantificadores de Angus Macintyre en [9] (véase § 3).
- El trabajo de Jan Denef sobre la racionalidad de las series de Poincaré en [5].
- El trabajo de Raf Cluckers y François Loeser en integrales p -ádicas e integración motivica (véanse [3] y [4]).

2. EL TEOREMA DE AKE

Una *valoración* en un cuerpo F es una aplicación sobreyectiva $v: F \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ de F en un grupo abeliano y ordenado Γ (el *grupo de valores*) junto con el símbolo ∞ ($\infty > \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$), que satisface las siguientes propiedades: (i) $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$, (ii) $v(ab) = v(a) + v(b)$ y (iii) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$, para cualesquiera $a, b \in F$. Un *cuerpo valuado* es un cuerpo dotado de una valoración. Veamos algunos ejemplos.

Consideremos un cuerpo K y $F = K(x)$. La aplicación $v(r(x)) = m$, donde $r(x) = x^m \frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x), q(x)$ polinomios con términos constantes no nulos, determina una valoración en F , con \mathbb{Z} como grupo de valores. De forma similar obtenemos una valoración en el cuerpo de las series de Laurent $K((t))$, con el mismo grupo de valores. Consideremos ahora el cuerpo de los números p -ádicos (p primo):

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i \mid m \in \mathbb{Z} \text{ y } a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\} \right\}.$$

A cada $a = \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Q}_p$ no nulo, le asignamos $v(a) = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$, esto determina una valoración en \mathbb{Q}_p .

Asociados a un cuerpo valuado F , con valoración $v: F \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$, tenemos: el grupo de valoración Γ que, con abuso de notación, se denota por $v(F)$; el *anillo*

de valoración $\mathcal{O} = \{a \in F \mid v(a) \geq 0\}$ y el cuerpo residual $\bar{F} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$, donde \mathfrak{m} es el único ideal maximal de \mathcal{O} . Los tres ejemplos de cuerpos valuados que hemos dado tienen a \mathbb{Z} como grupo de valoración; los anillos de valoración son $K[x]$, $K[[x]]$ y el anillo de los enteros p -ádicos \mathbb{Z}_p , respectivamente; los cuerpos residuales son isomorfos a K en los dos primeros casos, y al cuerpo de p elementos, \mathbb{F}_p , en el caso p -ádico.

Un cuerpo K se dice que es un *cuerpo* $C_m(d)$ si todo polinomio homogéneo de grado d en $n > d^m$ variables con coeficientes en K tiene un cero no trivial. Un cuerpo es C_m si es cuerpo $C_m(d)$ para todo $d > 0$. Los cuerpos algebraicamente cerrados son C_1 .

CONJETURA DE ARTIN. *Los cuerpos \mathbb{Q}_p de los números p -ádicos son C_2 .*

E. Artin se basó en las similitudes entre el cuerpo de los números p -ádicos \mathbb{Q}_p y el de las series de Laurent $\mathbb{F}_p((t))$ para establecer su conjetura. Tal como hemos mencionado, ambos cuerpos tienen una estructura natural de cuerpo valuado, con \mathbb{F}_p como cuerpo residual y \mathbb{Z} como grupo de valores. Dado que, para todo p , $\mathbb{F}_p((t))$ es C_2 , cabría esperar que \mathbb{Q}_p también lo fuese. J. Ax y S. Kochen demostraron en [1] que la conjetura de Artin es asintóticamente verdadera:

TEOREMA DE AX-KOCHEN (AK). *Para cada $d > 0$, el cuerpo \mathbb{Q}_p es $C_2(d)$ para todo p , excepto para un número finito de primos p .*

Por otro lado, G. Terjanian ([13]) dio un contraejemplo en \mathbb{Q}_2 que muestra que la conjetura es falsa, con lo que se obtiene que el Teorema de AK es el mejor resultado posible. El Teorema de AK se obtiene de un resultado sobre cuerpos valuados henselianos obtenido por J. Ax y S. Kochen en [1] e independientemente por Yu. Ėrshov en [7]. Un cuerpo valuado K , con anillo de valoración \mathcal{O} y cuerpo residual \bar{K} , es *henseliano* si para todo polinomio mónico $p(x) \in \mathcal{O}[x]$, si existe $a \in \mathcal{O}$ tal que $\bar{p}(a) = 0$ y $\bar{p}'(a) \neq 0$, entonces existe $b \in \mathcal{O}$ tal que $p(b) = 0$ y $a = \bar{b}$, donde \bar{a} denota la clase residual de a en \bar{K} . Esencialmente, estamos pidiendo que todo cero simple de un polinomio mónico en el cuerpo residual se levante a un cero en el anillo de valoración.

TEOREMA DE AX-KOCHEN-ĖRSHOV (AKE). *Sean K y F cuerpos valuados henselianos con $\text{char}(\bar{K}) = 0$. Si tanto los cuerpos residuales \bar{K} y \bar{F} como los grupos de valores $v(K)$ y $v(F)$ son elementalmente equivalentes, entonces los cuerpos valuados K y F también son elementalmente equivalentes.*

Para poder explicar qué significa *elementalmente equivalente* tenemos que introducir un lenguaje formal (véase §3). Basta ahora decir que el Teorema de AKE expresa que las *propiedades elementales* de los cuerpos valuados henselianos están caracterizadas por las de sus cuerpos residuales y sus grupos de valores, siempre que las características de los cuerpo residuales sean ambas cero. Sin embargo, no vamos a poder aplicar directamente el Teorema de AKE para transferir propiedades de $\mathbb{F}_p((t))$ a \mathbb{Q}_p —y así demostrar el Teorema de AK— ya que, aunque tanto \mathbb{Q}_p como $\mathbb{F}_p((t))$ son henselianos, los cuerpos residuales son (isomorfos a) \mathbb{F}_p , y por tanto de característica positiva. Para eludir este problema consideraremos el método de ultra-

productos que nos va a permitir pasar de característica positiva a nula, preservando las otras propiedades, y así deducir el Teorema de AK del de AKE (véase § 4).

La demostración que vamos a dar del Teorema de AKE es esencialmente la que aparece en [12]; para los conceptos de teoría de valoración véase, por ejemplo, [6].

3. EL LENGUAJE DE CUERPOS VALUADOS

Las *propiedades elementales* a las que hemos hecho referencia en la sección anterior son aquellas que se pueden expresar en un lenguaje formal, lenguaje que va a depender del tipo de estructura del que queramos hablar. Un *lenguaje formal* L consta de una serie de símbolos de funciones, símbolos de relaciones, y constantes. Así, por ejemplo, un lenguaje de cuerpos es $L_c = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$, que consta de tres símbolos de funciones binarias y dos constantes. El lenguaje no tiene significado en sí mismo, podíamos considerar como lenguaje de cuerpos el formado por los símbolos f_1, f_2, f_3, c_1 y c_2 , donde los f_i son símbolos de funciones binarias y los c_j constantes; también podríamos haber utilizado un lenguaje más sencillo, con solamente dos símbolos de funciones binarias. Sin embargo, solemos utilizar símbolos que nos recuerden a ciertas funciones, de modo que cuando utilicemos el lenguaje podremos dar una interpretación *natural* del símbolo en cuestión. El lenguaje L_c lo vamos a utilizar para *hablar* del cuerpo residual de un cuerpo valuado.

Los lenguajes pueden ser finitos o infinitos. Por ejemplo, podemos considerar el lenguaje obtenido añadiendo a L_c una constante para cada número real, lo que nos permite expresar ciertas propiedades de los números reales que no se pueden expresar en L_c . Otros lenguajes que vamos a utilizar son: $L_{cv} = \{+, -, \cdot, V, 0, 1\}$, para los cuerpos valuados, donde V es un símbolo de relación unaria que interpretaremos como la relación «*pertenencia al anillo de valoración*», y el lenguaje de grupos ordenados $L_g = \{\cdot, {}^{-1}, <, 1\}$ para el grupo de valores. Pasamos ahora a considerar las estructuras para las que hemos considerado estos lenguajes.

Dado un lenguaje L , una L -estructura consta de lo siguiente:

- un *universo*, que es un conjunto no vacío;
- *funciones*, una para cada símbolo de función de L ;
- *relaciones*, una para cada símbolo de relación de L ;
- *elementos distinguidos del universo*, uno para cada constante de L .

Las fuentes caligráficas de las primeras letras del alfabeto, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$, y estas con subíndices, denotarán estructuras; sus universos se denotarán respectivamente por A, B, \dots , y estas letras con subíndices.

El anillo de los enteros es un ejemplo de L_c -estructura con la interpretación natural de los símbolos. Nótese que lo único que estamos exigiendo a una L_c -estructura es que sea un conjunto no vacío dotado de tres operaciones binarias (que pueden coincidir), en el que estamos distinguiendo dos elementos (que también pueden coincidir). Cualquier cuerpo valuado es una L_{cv} -estructura con la interpretación natural

de los símbolos y, en particular, interpretamos V como la mencionada relación unaria «pertenencia al anillo de valoración». Análogamente, cualquier grupo ordenado es una L_g -estructura.

Fijado un lenguaje L , vamos a considerar dos tipos de expresiones en este lenguaje, los L -términos y las L -fórmulas. Ambos tipos de expresiones son *palabras* en un alfabeto que contiene los símbolos de L y otros símbolos auxiliares. Los L -términos van a representar o bien elementos del universo o bien funciones —obtenidas a partir de las funciones originales de la estructura—. Las L -fórmulas representan a su vez, o bien propiedades de la estructura, o bien relaciones —obtenidas a partir de las relaciones originales de la estructura—. Aquí estamos utilizando *representan* en el mismo sentido que un polinomio *representa* la función polinómica asociada a él y una ecuación *representa* su conjunto de soluciones, una vez que fijemos el universo en el que estamos hablando. Veamos unos ejemplos.

Consideremos el lenguaje L_{co} de cuerpos ordenados, que se obtiene de L_c añadiendo un símbolo ($<$) de relación binaria. Los términos de este lenguaje son polinomios en varias variables con coeficientes en \mathbb{Z} ; dada una L_{co} -estructura natural, asociado a un L_{co} -término tenemos la función polinomial correspondiente. Las L_{co} -fórmulas se obtienen de ecuaciones e inecuaciones polinomiales utilizando conectivos lógicos y cuantificadores; por ejemplo,

$$\forall x(0 < x \rightarrow \exists y(y - x^2 = 0)) \quad \text{y} \quad \exists x(x^2 - y = 0) \vee y + 5 < 0$$

son L_{co} -fórmulas (abreviadas); la primera fórmula expresa una propiedad que una L_{co} -estructura puede tener o no, por ejemplo, el cuerpo ordenado de los reales la tiene, mientras que el de los racionales no; la segunda fórmula tiene una variable libre (y), y dada una L_{co} -estructura con universo A define una relación unaria, es decir, un subconjunto de A , el formado por los elementos que *satisfacen* la fórmula, por ejemplo, sobre cuerpo ordenado \mathbb{R} define el conjunto $(-\infty, 5) \cup [0, +\infty)$. Veamos ahora todos estos conceptos en general, para un lenguaje L arbitrario.

Los L -términos y las L -fórmulas son palabras en un alfabeto formado por los símbolos de L junto con los siguientes símbolos auxiliares: variables, conectivos lógicos, cuantificadores y paréntesis. Un L -término es una palabra construida a partir de las constantes, los símbolos de funciones y las variables v_0, v_1, v_2, \dots de acuerdo con las siguientes reglas:

- cualquier constante y cualquier variable es un L -término;
- si t_1, \dots, t_n son L -términos y f es un símbolo de función n -aria, entonces $f t_1 \cdots t_n$ es un n -término.

A un L -término, t , lo denotamos por $t(x_1, \dots, x_n)$ si las variables que aparecen en t están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$. Dada un L -estructura \mathcal{A} , asociada a un L -término $t(x_1, \dots, x_n)$, tenemos la función n -aria

$$t : A^n \rightarrow A : (a_1, \dots, a_n) \mapsto t(a_1, \dots, a_n),$$

donde $t(a_1, \dots, a_n)$ es:

- la interpretación de c en \mathcal{A} si t es una constante c ;

- a_i si t es la variable x_i ;
- $f(t_1(a_1, \dots, a_n), \dots, t_m(a_1, \dots, a_n))$ si t es $ft_1 \cdots t_m$.

Puesto que estamos utilizando la misma notación para el término y su función asociada, si hay ambigüedad escribiremos t^A para la función asociada al término t . Como es habitual, denotaremos el término ft_1t_2 mediante t_1ft_2 .

Veamos unos ejemplos en el lenguaje de cuerpos ordenados L_{co} , en el que $x, 0, 1$ y $x - (y \cdot y)$ son L_{co} -términos; vistos como $t(x, y)$, sus funciones asociadas en la L_{co} -estructura de los reales son funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} que mandan (a_1, a_2) a $a_1, 0, 1$ y $a_1 - a_2^2$ respectivamente. Tal como hemos mencionado, los L_{co} -términos son polinomios con coeficientes en \mathbb{Z} ; sus funciones asociadas —en una L_{co} -estructura que sea un anillo— son las correspondientes funciones polinomiales.

A veces nos va interesar tener nombres para los elementos de un subconjunto D del universo de una L -estructura, \mathcal{A} , para ello consideramos el lenguaje extendido L_D , donde hemos añadido a L una constante para cada elemento de D . Por ejemplo, en el caso del cuerpo ordenado \mathbb{R} , los términos del lenguaje $L_{\mathbb{R}}$ son polinomios con coeficientes en \mathbb{R} , diremos que son L_{co} -términos con parámetros en \mathbb{R} .

Una L -fórmula es una palabra construida a partir de las constantes, los símbolos de funciones, los de relaciones, las variables, los símbolos $=, \neg, \vee$ y \forall , y paréntesis, de acuerdo con las siguientes reglas:

- si t_1, t_2, \dots, t_m son L -términos y R es un símbolo de una relación m -aria, entonces $t_1 = t_2$ y $Rt_1 \cdots t_m$ son L -fórmulas;
- si φ y ψ son L -fórmulas y x es una variable, entonces $\neg\varphi, (\varphi \vee \psi)$ y $\forall x\varphi$ son L -fórmulas.

Utilizaremos las abreviaturas usuales, por ejemplo, $\exists x\varphi$ abrevia $\neg\forall x\neg\varphi$ y $(\varphi \rightarrow \psi)$ abrevia $(\neg\varphi \vee \psi)$, y las similares con el resto de los conectivos lógicos.

En una fórmula pueden aparecer dos tipos de variables, las afectadas por un cuantificador, que llamaremos *variables ligadas* y las no afectadas que llamaremos *variables libres*; siempre supondremos que no hay variables que sean a la vez libres y ligadas en una misma fórmula (cambiando el nombre de las ligadas si es necesario); $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ denota una fórmula φ si las variables libres de φ están en $\{x_1, \dots, x_n\}$. Pasamos a continuación a definir el conjunto (o relación) asociado a una fórmula en un estructura. Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una L -fórmula y \mathcal{A} una L -estructura. Decimos que una n -upla (a_1, \dots, a_n) de elementos de \mathcal{A} está en el conjunto que define φ , o que (a_1, \dots, a_n) *satisface* φ en \mathcal{A} , y escribimos

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

si efectivamente (a_1, \dots, a_n) satisface en \mathcal{A} las condiciones expresadas mediante φ . Por ejemplo, el par $(3, 2)$ de \mathbb{R}^2 satisface la fórmula $\exists y y^2 + x_1 y + x_2 = 0$ en el cuerpo de los reales, mientras que el par $(1, 2)$ no la satisface, donde la asignaciones de valores a las variables es la natural (a x_1 el valor 3 y a x_2 el valor 2 en el primer caso, y a x_1 el valor 1 y a x_2 el valor 2 en el segundo). La definición formal de *satisfacción* se da por inducción en la complejidad de la fórmula. Poniendo $a := (a_1, \dots, a_n)$:

- $\mathcal{A} \models (t_1 = t_2)(a)$ si las funciones asociadas a t_1 y t_2 coinciden en a ;
- $\mathcal{A} \models (Rt_1t_2 \cdots t_m)(a)$ si la m -upla $(t_1(a), \dots, t_m(a)) \in A^m$ está en la relación asociada a R en \mathcal{A} ;
- $\mathcal{A} \models \neg\psi(a)$ si $\mathcal{A} \not\models \psi(a)$;
- $\mathcal{A} \models (\psi_1 \vee \psi_2)(a)$ si $\mathcal{A} \models \psi_1(a)$ o $\mathcal{A} \models \psi_2(a)$;
- $\mathcal{A} \models \forall y\psi(a)$ si para todo $b \in A$, (a_1, \dots, a_n, b) satisface ψ en \mathcal{A} .

Se comprueba fácilmente —quitando las abreviaturas— que $\mathcal{A} \models \exists y\psi(a)$ si existe $b \in A$, tal que (a_1, \dots, a_n, b) satisface ψ en \mathcal{A} , y análogamente con el resto de la fórmulas abreviadas.

A la realización de φ en A , es decir, al conjunto

$$\varphi(A) := \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}$$

se le llama *conjunto definible*, definido mediante φ (también podríamos decir el conjunto de puntos A -racionales de φ). Se observa fácilmente que los conectivos \wedge, \vee y \neg en las fórmulas corresponden a las operaciones booleanas \cap, \cup y c en los conjuntos que definen, y que el cuantificador existencial corresponde a una proyección. Por ejemplo, el conjunto $\varphi(\mathbb{R})$ que define la L_{co} -fórmula

$$\varphi(y) : \exists x(x^2 - y = 0) \vee x + 5 < 0$$

es la unión del intervalo $(-\infty, 5)$ con la proyección —en y — de la curva $y = x^2$. Se dice que una L -estructura \mathcal{A} admite *eliminación de cuantificadores* si cualquier conjunto definible es definible mediante una fórmula sin cuantificadores. Un resultado clásico de Tarski asegura que la L_{co} -estructura \mathcal{R} del cuerpo ordenado de los reales admite eliminación de cuantificadores. Por ejemplo, el conjunto $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ definido mediante $\varphi(x_1, x_2) : \exists y y^2 + x_1y + x_2 = 0$ también es definible mediante $\psi(x_1, x_2) : x_1^2 - 4x_2 \geq 0$. Nótese que necesitamos el símbolo $<$ en el lenguaje: el cuerpo de los reales como L_c -estructura no admite eliminación de cuantificadores ya que hay conjuntos, como el definido mediante $\exists y x = y^2$, que no pueden ser definidos con fórmulas sin cuantificadores. El resultado de Macintyre en [9] —que hemos mencionado en § 1— nos dice que, si al lenguaje de cuerpos le añadimos un símbolo de relación unaria P_n para cada $n \geq 2$, entonces, el cuerpo de los números p -ádicos dotado de las interpretaciones de los P_n como las potencias n -ésimas en \mathbb{Q}_p^\times admite eliminación de cuantificadores.

Una fórmula sin variables libres se llama *fórmula cerrada*. Este tipo de fórmulas son las que expresan propiedades de la estructura. Podemos ahora definir lo siguiente. Dada una L -fórmula cerrada φ y una L -estructura \mathcal{A} , decimos que φ *se satisface en \mathcal{A}* o que \mathcal{A} *es modelo de φ* o que \mathcal{A} *satisface φ* ($\mathcal{A} \models \varphi$) si, considerada φ como $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, existe $a \in A^n$ que satisface $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ en \mathcal{A} (o equivalentemente cualquier $a \in A^n$ satisface $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ en \mathcal{A}).

Veamos por ejemplo —utilizando la definición— que

$$\varphi := \forall x(0 < x \rightarrow \exists y(y - x^2 = 0))$$

se satisface en el cuerpo ordenado de los reales \mathcal{R} . Consideramos φ como $\varphi(z)$, para una variable z cualquiera que no aparezca en φ y queremos ver que $\mathcal{R} \models \varphi(d)$ para algún (todo) $d \in \mathbb{R}$. Se tiene que $\mathcal{R} \models \varphi(d) \Leftrightarrow$ para todo $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R} \models (0 < x \rightarrow \exists y(y - x^2 = 0))(a, d)$ (donde estamos asignando a x el valor a y a z —que no aparece— el valor d) \Leftrightarrow para todo $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R} \models (0 < x)(a, d)$ implica $\mathcal{R} \models \exists y(y - x^2 = 0)(a, d)$. Vamos a comprobar esto último: sea $a \in \mathbb{R}$, supongamos $a > 0$ (es decir, $\mathcal{R} \models (0 < x)(a, d)$) y tomemos $b \in \mathbb{R}$, $b = +\sqrt{a}$, por lo tanto $\mathcal{R} \models (y - x^2 = 0)(a, b, d)$ (con la asignación a a x , b a y , y d a z); esto último implica que $\mathcal{R} \models \exists y(y - x^2 = 0)(a, d)$, tal como queríamos.

Ya tenemos todos los conceptos necesarios para poder definir el de equivalencia elemental. Se dice que dos L -estructuras \mathcal{A} y \mathcal{B} son *elementalmente equivalentes*, y se denota por

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B},$$

si \mathcal{A} y \mathcal{B} satisfacen las mismas L -fórmulas cerradas. Por ejemplo, $\langle \mathbb{R}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, < \rangle$, en el lenguaje de conjuntos ordenados $L_o = \{<\}$, de hecho cualesquiera dos L_o -estructuras que sean órdenes lineales densos y sin extremos son elementalmente equivalentes (por el teorema de Cantor que establece que son isomorfas si son numerables y el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski que mencionaremos más adelante en § 5).

El concepto de *isomorfismo* entre estructuras es el natural: si \mathcal{A} y \mathcal{B} son L -estructuras, una biyección α de A en B es un isomorfismo ($\alpha: \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) si tanto α como α^{-1} transportan la estructura de un universo al otro. Así se comprueba fácilmente, por inducción en la complejidad de la fórmula, que si $\alpha: \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ entonces

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{B} \models \varphi(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)), \quad (\text{iso})$$

para todo $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$. En particular, si \mathcal{A} y \mathcal{B} son isomorfas satisfacen las mismas fórmulas cerradas, y por lo tanto son elementalmente equivalentes; por el ejemplo de $\langle \mathbb{R}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ sabemos que el concepto de equivalencia elemental es más débil que el de isomorfismo —ambos conceptos coinciden en estructuras finitas—.

Un conjunto de fórmulas cerradas de un lenguaje L se llama *L -teoría* y las L -estructuras que satisfacen todas las fórmulas del mencionado conjunto se llaman *modelos* de la teoría. Con

$$\mathcal{A} \models T$$

denotamos que \mathcal{A} es un modelo de T . Así, por ejemplo, los axiomas de órdenes lineales densos y sin extremos son L_o -fórmulas y forman la L_o -teoría *OLDSE*, para la que el resultado antes mencionado establece que todos los modelos de la teoría son elementalmente equivalentes. Obsérvese que una L -teoría puede ser vacía —cualquier L -estructura será modelo de ella— o puede no tener modelos — $T = \{\varphi \wedge \neg\varphi\}$ —, en este último caso diremos que no es *satisfactible* (volveremos a este último concepto en § 5).

Para desarrollar las propiedades de los cuerpos valuados vamos a considerar las siguientes teorías:

- la L_c -teoría de cuerpos Cu formada por los axiomas de cuerpo en el lenguaje $L_c = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$;

- la L_g -teoría de grupos abelianos ordenados GAO , formada por los correspondientes axiomas en $L_g = \{\cdot, ^{-1}, <, 1\}$;
- la L_{cv} -teoría de cuerpos valuados CV en el lenguaje $L_{cv} = \{+, -, \cdot, V, 0, 1\}$ que consta, además de los axiomas de cuerpos de Cu , de las siguientes L_{cv} -formulas cerradas:

$$\begin{aligned}
 &V(0) \wedge V(1), \quad \forall x, y(V(x) \wedge V(y) \rightarrow V(x - y) \wedge V(x \cdot y)) \quad \text{y} \\
 &\forall x, y(x \cdot y = 1 \rightarrow V(x) \vee V(y)),
 \end{aligned}$$

que expresan que la interpretación de V en un modelo \mathcal{K} de la teoría CV es un anillo de valoración del cuerpo K .

Las teorías que hemos visto hasta el momento tienen un número finito de fórmulas (cerradas). Sin embargo, para expresar la propiedad de ser henseliano en nuestro lenguaje necesitamos un número infinito (numerable) de fórmulas, ya que —al no poder cuantificar sobre polinomios— necesitamos una fórmula para cada posible grado del polinomio. En lo que sigue, $V^\times(x)$ abrevia $V(x) \wedge \exists y(y \cdot x = 1 \wedge V(y))$, por lo que se interpretará como el grupo multiplicativo del anillo de valoración; para cada $n \geq 2$, $p_n(\tilde{x}, w)$ denota el L_c -término $\sum_{i=0}^n x_i w^i$, donde $\tilde{x} := (x_0, \dots, x_{n-1})$, $x_n := 1$ y $p'_n(\tilde{x}, w)$ denota $\sum_{i=0}^n i x_i w^{i-1}$. Así,

- la L_{cv} -teoría de cuerpos valuados henselianos CVH es

$$CV \cup \{\varphi_n \mid n \geq 2\},$$

donde φ_n es

$$\begin{aligned}
 &\forall \tilde{x} \forall y \left(\bigwedge_{i=0}^{n-1} V(x_i) \wedge V(y) \wedge \neg V^\times(p_n(\tilde{x}, y)) \wedge V^\times(p'_n(\tilde{x}, y)) \rightarrow \right. \\
 &\left. \exists z(p_n(\tilde{x}, z) = 0 \wedge \neg V^\times(y - z)) \right).
 \end{aligned}$$

Obsérvese que φ_n expresa la propiedad de ser henseliano restringida a polinomios de grado n .

Con todos estos datos podemos volver a enunciar el Teorema de AKE así:

Sean K y F modelos de la L_{cv} -teoría CVH tal que $\text{char}(\overline{K}) = 0$. Entonces,

$$\overline{K} \equiv \overline{F} \quad \text{y} \quad v(K) \equiv v(F) \quad \text{implica} \quad K \equiv F. \quad (\text{ake})$$

Nótese que la primera equivalencia elemental es de cuerpos, es decir, como L_c -estructuras, y la segunda de grupos ordenados, como L_g -estructuras.

Antes de continuar, observemos que el recíproco de (ake) se satisface trivialmente. Intuitivamente está claro, el recíproco dice que las propiedades (elementales) de un cuerpo valuado determinan las de su grupo de valores y su cuerpo residual, no necesitamos ni que el cuerpo valuado sea henseliano ni que la característica del residual sea cero. Veámoslo formalmente, para ello vamos a expresar las propiedades del

cuerpo residual y del grupo de valores en el lenguaje de cuerpos valuados. Utilizaremos la siguiente notación: si K es un cuerpo valuado —que denotaremos a veces por (K, \mathcal{O}) , donde \mathcal{O} es el anillo de valoración—, su cuerpo residual es $\bar{K} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m} = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^\times$ es el ideal maximal de \mathcal{O} , y su grupo de valores es $v(K) = K^\times / \mathcal{O}^\times$.

Para cada fórmula φ de $L_c = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ existe una fórmula φ_r de L_{cv} tal que, para cualquier cuerpo valuado (K, \mathcal{O}) y para todo $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{O}^n$, se tiene:

$$\bar{K} \models \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \iff K \models \varphi_r(a_1, \dots, a_n). \quad (r)$$

Para cada fórmula φ de $L_g = \{\cdot, ^{-1}, <, 1\}$ existe una fórmula φ_g de L_{cv} tal que, para cualquier cuerpo valuado (K, \mathcal{O}) y para todo $(a_1, \dots, a_n) \in (K^\times)^n$, se tiene:

$$V(K) \models \varphi(a_1\mathcal{O}, \dots, a_n\mathcal{O}) \iff K \models \varphi_g(a_1, \dots, a_n). \quad (g)$$

Dada φ , la fórmula φ_r queda determinada mediante las siguientes reglas:

- si t es un polinomio y φ es $t = 0$, entonces φ_r es $\neg V^\times(t)$, que expresará que el valor que toma la función polinomial t en un cierto argumento del anillo de valoración es un elemento del ideal maximal;
- si φ es $\forall x\psi$, φ_r es $\forall x(V(x) \rightarrow \psi_r)$;
- si φ es $\neg\psi$ o $(\psi \vee \psi')$, φ_r es $\neg\psi_r$ o $(\psi_r \vee \psi'_r)$, respectivamente.

Para obtener la φ_g asociada a una φ de L_g , obsérvese primero que los términos de $L_g = \{\cdot, ^{-1}, <, 1\}$ son de la forma $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$, donde $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$.

- Si φ es $t = 1$ o $1 < t$, φ_g es $V^\times(t)$ ó $\neg V^\times(t)$ respectivamente;
- si φ es $\forall x\psi$, φ_g es $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \psi_g)$;
- los conectivos \neg y \vee se tratan de manera análoga a como lo hemos hecho antes.

Con estas reglas, se comprueba fácilmente, por inducción en la complejidad de la fórmula, que se satisfacen las equivalencias (r) y (g). Obsérvese que, para fórmulas cerradas, (r) y (g) son, respectivamente,

$$\bar{K} \models \varphi \iff K \models \varphi_r \text{ y } V(K) \models \varphi \iff K \models \varphi_g.$$

Así obtenemos el recíproco de (ake) para cualesquiera cuerpos valuados K y F .

Efectivamente, supongamos $K \equiv F$ y veamos que los cuerpos residuales y los grupos de valores son elementalmente equivalentes. Si φ es una L_c -fórmula entonces $\bar{K} \models \varphi \iff K \models \varphi_r \iff F \models \varphi_r \iff \bar{F} \models \varphi$, y por tanto $\bar{K} \equiv \bar{F}$; análogamente para los grupos de valores. (Esta traducción de propiedades del cuerpo residual y del grupo de valores a propiedades del cuerpo valuado que acabamos de hacer podría haberse evitado si utilizáramos un lenguaje —de los llamado de *varias clases*— con tres tipos de variables, pero las definiciones de los objetos formales hubieran sido más complicadas.)

El problema para demostrar el Teorema de AKE es que no toda fórmula del lenguaje de cuerpos valuados es de la forma φ_r o φ_g ; si así lo fuera, habríamos acabado utilizando las equivalencias (r) y (g).

4. DEMOSTRACIÓN DE AK A PARTIR DE AKE

En esta sección introducimos el método de ultraproductos, que junto con el Teorema de AKE nos va permitir demostrar que si, φ es una propiedad expresada en el lenguaje de cuerpos valuados —es decir, una fórmula cerrada del lenguaje L_{cv} —, entonces se tiene la siguiente equivalencia:

$$\{p \mid \mathbb{Q}_p \text{ satisface } \varphi\} \text{ es finito} \iff \{p \mid \mathbb{F}_p((t)) \text{ satisface } \varphi\} \text{ es finito.} \quad (f)$$

Veamos primero cómo se obtiene el Teorema de AK de la equivalencia (f). Fijemos $d > 0$. Tenemos que demostrar que todo polinomio homogéneo de grado d en $n > d^2$ variables con coeficientes en \mathbb{Q}_p tiene un cero no trivial, para todo p excepto para un número finito de ellos. Claramente basta demostrarlo para $n = d^2 + 1$. Así, fijado tanto el grado d , como el número de variables n , tenemos un número fijo de posibles coeficientes, digamos m ; cuantificando sobre esos m coeficientes podemos dar la siguiente fórmula cerrada φ del lenguaje de cuerpos:

$$\varphi : \forall \tilde{y} \left(\bigvee_{j=1}^m y_j \neq 0 \rightarrow \exists \tilde{x} \left(\bigvee_{i=1}^n x_i \neq 0 \wedge f(\tilde{y}, \tilde{x}) = 0 \right) \right),$$

donde $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $f(\tilde{y}, \tilde{x})$ es el polinomio homogéneo general de grado d en x_1, \dots, x_n , con coeficientes y_1, \dots, y_m . Consideremos ahora la fórmula $\neg\varphi$. Claramente, que un cuerpo K satisfaga $\neg\varphi$, es decir, que no satisfaga φ , es equivalente a que exista un polinomio homogéneo de grado d en $n (= d^2 + 1)$ variables con coeficientes en K que tenga solamente el cero trivial. Así, como el conjunto $\{p \mid \mathbb{F}_p((t)) \text{ satisface } \neg\varphi\}$ es vacío, y en particular es finito, deducimos entonces de la equivalencia (f) que solamente hay un número finito de cuerpos \mathbb{Q}_p en los que φ no se satisface, con lo que queda demostrado el Teorema de AK.

Pasamos a continuación a exponer el método de los ultraproductos que nos va a permitir establecer la equivalencia (f) a partir del Teorema de AKE. Un *filtro* (propio) sobre un conjunto I es un conjunto no vacío $\mathcal{U} \subseteq P(I)$ que no contiene al conjunto vacío y es cerrado para intersecciones finitas y superconjuntos. Un *ultrafiltro* sobre I es un filtro \mathcal{U} tal que, para todo $A \subseteq I$, $A \in \mathcal{U}$ o $I \setminus A \in \mathcal{U}$. Por el Lema de Zorn, todo filtro se extiende a un ultrafiltro, o más generalmente, toda familia de subconjuntos de I con la propiedad de la intersección finita —toda intersección finita de conjuntos de la familia es no vacía— se extiende a un ultrafiltro. Dada una familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ de L -estructuras y un ultrafiltro \mathcal{U} sobre I se define la siguiente relación de equivalencia sobre el producto cartesiano $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$:

$$(a_i)_{i \in I} \sim (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{U}.$$

Con el conjunto de clases de equivalencia $(a_i)_{\mathcal{U}}$ como universo, se define la siguiente L -estructura \mathcal{A} :

- $c^{\mathcal{A}} := (c^{\mathcal{A}_i})_{\mathcal{U}}$, para cada constante c de L ;
- $f^{\mathcal{A}}((a_i^1)_{\mathcal{U}}, \dots, (a_i^n)_{\mathcal{U}}) := (f^{\mathcal{A}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n))_{\mathcal{U}}$, para cada símbolo de función f de L ; y

- para cada símbolo de relación R de L ,

$$R^{\mathcal{A}}((a_i^1)_{\mathcal{U}}, \dots, (a_i^n)_{\mathcal{U}}) \text{ si y solo si } \{i \in I \mid R^{\mathcal{A}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)\} \in \mathcal{U}.$$

Esta estructura \mathcal{A} es el *ultraproducto* de $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ con respecto a \mathcal{U} . La denotaremos por $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i$. El hecho de que \mathcal{U} sea un filtro permite comprobar que la L -estructura está bien definida; cuando \mathcal{U} es un ultrafiltro, obtenemos el Teorema fundamental de los ultraproductos demostrado por J. Łos:

TEOREMA DE ŁOS. *Para toda fórmula φ y elementos $(a_i^1)_{\mathcal{U}}, \dots, (a_i^n)_{\mathcal{U}}$ del universo de $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i$ se tiene*

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models \varphi((a_i^1)_{\mathcal{U}}, \dots, (a_i^n)_{\mathcal{U}}) \text{ si y solo si } \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi(a_i^1, \dots, a_i^n)\} \in \mathcal{U}.$$

El Teorema de Łos se demuestra por inducción sobre la complejidad de la fórmula. Veamos, por ejemplo, el caso de la negación. Supongamos que tenemos la equivalencia para una cierta fórmula φ y vamos a demostrarla para $\neg\varphi$. Entonces

$$\begin{aligned} \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models \neg\varphi((a_i^1)_{\mathcal{U}}, \dots, (a_i^n)_{\mathcal{U}}) \\ \iff \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \not\models \varphi((a_i^1)_{\mathcal{U}}, \dots, (a_i^n)_{\mathcal{U}}) \\ \iff \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi(a_i^1, \dots, a_i^n)\} \notin \mathcal{U} \\ \iff \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \neg\varphi(a_i^1, \dots, a_i^n)\} (= I \setminus \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi(a_i^1, \dots, a_i^n)\}) \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

La última equivalencia se tiene por ser \mathcal{U} un ultrafiltro.

Un caso trivial del Teorema de Łos se da cuando el ultrafiltro \mathcal{U} es *principal*, es decir, cuando existe un $i_0 \in I$ tal que $\{i_0\} \in \mathcal{U}$. En este caso, se observa fácilmente que la aplicación inducida por la proyección

$$\pi: \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_{i_0}$$

es un isomorfismo de $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i$ en \mathcal{A}_{i_0} . Obsérvese que si I es finito, todo ultrafiltro sobre I es principal, y que si I es infinito, cualquier familia de subconjuntos de I con la propiedad de la intersección finita y que contenga a los complementarios de los subconjuntos finitos de I se extiende a un ultrafiltro no principal. Por otro lado, dado cualquier ultrafiltro \mathcal{U} , como $I \in \mathcal{U}$, si φ es una fórmula cerrada de L que se satisface en todas las \mathcal{A}_i , el Teorema de Łos nos dice que también se satisface en $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i$. Esto implica que si todas las \mathcal{A}_i son modelos de una cierta L -teoría, entonces $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i$ también lo es.

Demos un ejemplo de ultraproducto. Sea I el conjunto de números primos y sea \mathcal{U} un ultrafiltro no principal sobre I . Para cada $p \in I$, se considera el cuerpo \mathbb{F}_p . Veamos que $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p$ es un cuerpo de característica 0. Por lo ya comentado, $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p$ es un cuerpo. Supongamos $\text{char}(\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p) = q$, para un cierto primo q . Es decir, el

ultraproducto $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p$ satisface la fórmula cerrada $1 + \cdot^q \cdot + 1 = 0$ del lenguaje de cuerpos, y por el Teorema de Łos se tiene que

$$\{q\} = \{p \in I \mid \mathbb{F}_p \models 1 + \cdot^q \cdot + 1 = 0\} \in \mathcal{U},$$

lo que contradice que \mathcal{U} sea no principal. Por lo tanto $\text{char}(\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p) = 0$.

Veamos ahora cómo *el método de ultraproductos nos permite deducir (del Teorema de AKE) la equivalencia (f)*. Sea φ una fórmula cerrada del lenguaje L_{cv} de cuerpos valuados.

Sea I , como antes, el conjunto de los números primos. Supongamos que

$$S_1 = \{p \in I \mid \mathbb{F}_p((t)) \models \varphi\}$$

es infinito y veamos que $S_2 = \{p \in I \mid \mathbb{Q}_p \models \varphi\}$ también es infinito. Al ser S_1 infinito, la familia de subconjuntos de I formada por S_1 junto con los complementarios de los subconjuntos finitos de I tiene la propiedad de la intersección finita; sea \mathcal{U} un ultrafiltro (no principal) sobre I que contenga a esta familia.

Formemos los siguientes ultraproductos de L_{cv} -estructuras $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{Q}_p$ y $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p((t))$. Veamos que satisfacen las hipótesis del Teorema de AKE. En efecto, primero observamos que, dado que tanto todos los \mathbb{Q}_p como todos los $\mathbb{F}_p((t))$ ($p \in I$) son cuerpos valuados henselianos —modelos de la L_{cv} -teoría *CVH*—, por el Teorema de Łos también lo son los ultraproductos $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{Q}_p$ y $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p((t))$. Por otro lado, los cuerpos residuales son isomorfos a sendos ultraproductos de las familias $\{\overline{\mathbb{Q}_p}\}_{p \in I}$ y $\{\overline{\mathbb{F}_p((t))}\}_{p \in I}$ con respecto a \mathcal{U} , y por tanto ambos isomorfos al ultraproducto $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p$; además, al ser \mathcal{U} no principal, tal como hemos observado, $\text{char}(\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p) = 0$. Finalmente, los grupos de valores tanto de los \mathbb{Q}_p como de los $\mathbb{F}_p((t))$ son \mathbb{Z} , de lo que obtenemos que los grupos de valores de $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{Q}_p$ y $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p((t))$ son ambos isomorfos al ultraproducto de la familia $\{\mathbb{Z}\}_{p \in I}$ con respecto a \mathcal{U} (esto es lo que se llama *ultrapotencia*, cuando todas las estructuras de la familia coinciden).

Estamos entonces bajo las hipótesis del Teorema de AKE (de hecho, tal como hemos visto, los grupos de valores y los cuerpos residuales de los dos cuerpos valuados son isomorfos, propiedad más fuerte que la de ser elementalmente equivalentes), y podemos concluir que $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{Q}_p$ y $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p((t))$ son elementalmente equivalentes como cuerpos valuados.

Considerando nuevamente $\varphi \in FC(L_{cv})$, del hecho de que

$$S_1 = \{p \in I \mid \mathbb{F}_p((t)) \models \varphi\} \in \mathcal{U},$$

junto con el Teorema de Łos, obtenemos que $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p((t)) \models \varphi$, y por lo tanto

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{Q}_p \models \varphi,$$

ya que $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{Q}_p$ y $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{F}_p((t))$ son elementalmente equivalentes.

Aplicamos nuevamente Łos al ultraproducto $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{Q}_p$. Como $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{Q}_p \models \varphi$, obtenemos que

$$S_2 = \{p \in I \mid \mathbb{Q}_p \models \varphi\} \in \mathcal{U},$$

con lo que concluimos que $\{p \in I \mid \mathbb{Q}_p \models \varphi\}$ ha de ser infinito, ya que al ser \mathcal{U} ultrafiltro *no principal* no puede contener conjuntos finitos.

El recíproco se demuestra por simetría.

5. EXTENSIONES Y EXTENSIONES ELEMENTALES

Para demostrar el Teorema de AKE necesitamos algunos resultados básicos de teoría de modelos, además de los ya expuestos. Ya hemos hablado del concepto de isomorfismo entre estructuras, ahora vamos a considerar el de inmersión entre L -estructuras, que es una generalización del de monomorfismo de estructuras algebraicas, teniendo en cuenta que en las L -estructuras, además de funciones, podemos tener relaciones. Dadas dos L -estructuras \mathcal{A} y \mathcal{B} , decimos que una aplicación inyectiva α de \mathcal{A} en \mathcal{B} es una *inmersión*, y escribimos

$$\alpha: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B},$$

si para cada constante c , símbolo de función f , de relación R y para cualesquiera $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\alpha(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$, es decir, la imagen mediante α de la interpretación de c en \mathcal{A} es la interpretación de c en \mathcal{B} ;
- $\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$;
- $R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \iff R^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$.

Cuando α es la inclusión, decimos que \mathcal{A} es una *subestructura* de \mathcal{B} o que \mathcal{B} es una *extensión* de \mathcal{A} y escribimos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.¹ Por ejemplo, cualquier subestructura de un cuerpo es un dominio (en el lenguaje de cuerpos L_c). Obsérvese que para cuerpos valuados en el lenguaje L_{cv} , si (K_1, \mathcal{O}_1) es una subestructura de (K_2, \mathcal{O}_2) entonces K_1 es un subcuerpo de K_2 y $\mathcal{O}_2 \cap K_1 = \mathcal{O}_1$ (en particular \mathfrak{m}_2 yace sobre \mathfrak{m}_1). Nótese que abreviamos la notación de L_{cv} -estructura escribiendo solamente la parte más relevante de las mismas.

Si $\alpha: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$, se comprueba fácilmente que tenemos la equivalencia (*iso*) de §3 restringida a fórmulas φ sin cuantificadores. Normalmente identificaremos \mathcal{A} con su imagen isomorfa en \mathcal{B} , y así supondremos que \mathcal{A} es subestructura de \mathcal{B} . En teoría de modelos, los morfismos más naturales son los que preservan no solamente la estructura base, sino también toda la estructura elemental obtenida a partir de las fórmulas, es decir, las aplicaciones $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tales que (a_1, \dots, a_n) pertenece al conjunto que define una fórmula φ en \mathcal{A} si y solamente si $(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$ pertenece al conjunto que define φ en \mathcal{B} ; dicho de otra forma, aquellas α que satisfacen la equivalencia (*iso*) de §3, para todas las L -fórmulas φ ; en particular son inmersiones, se llaman *inmersiones elementales* y se denotan por

$$\alpha: \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}.$$

¹Nótese que estamos usando letras caligráficas a diferencia de la notación $A \subseteq B$ que denota simplemente que el universo de \mathcal{A} es un subconjunto del universo de \mathcal{B} .

Si α es la inclusión decimos que \mathcal{B} es una *extensión elemental* de \mathcal{A} o que \mathcal{A} es una *subestructura elemental* de \mathcal{B} y escribimos

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}.$$

Nótese que $\alpha: \mathcal{A} \xrightarrow{\preceq} \mathcal{B}$ implica que \mathcal{A} y \mathcal{B} son elementalmente equivalentes, es decir, satisfacen las mismas fórmulas cerradas.

En la demostración del Teorema de AKE también vamos a considerar cadenas de estructuras. Sea $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ una familia de L -estructuras, donde ahora I es un conjunto totalmente ordenado. Si $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_j$ para cada $i < j$ en I , entonces la *unión de la cadena*

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

es de forma natural una L -estructura; si $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$ para cada $i < j$, entonces se comprueba fácilmente que $\mathcal{A}_j \preceq \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$, para cada $j \in I$. En este último caso, se obtiene en particular que, si todas las \mathcal{A}_i son modelos de una cierta teoría T , también lo es la unión de la cadena.

Pasamos a continuación a introducir *la herramienta básica* para el desarrollo de teoría de modelos, *el Teorema de compacidad*, que nos va permitir demostrar la existencia de extensiones elementales con propiedades adicionales. Para enunciarlo recordemos primero que una teoría es *satisfactible* si tiene algún modelo, es decir, una L -teoría T es satisfactible si existe una L -estructura que satisface todas las fórmulas (cerradas) de T . Una teoría T es *finitamente satisfactible* si cualquier parte finita de T es satisfactible. Obviamente, en una teoría con un conjunto finito de fórmulas ambos conceptos coinciden. Si una teoría es satisfactible entonces también es finitamente satisfactible.

TEOREMA DE COMPACIDAD. *Si una teoría es finitamente satisfactible entonces es satisfactible.*

El Teorema de compacidad dice que si podemos encontrar un modelo para cada parte finita de una teoría T entonces existe un modelo de T . El Teorema de compacidad se puede demostrar a partir de la completitud de la lógica de primer orden —que es la que estamos utilizando—. También se obtiene con el método de ultraproductos, utilizando un ultraproducto de modelos de partes finitas de la teoría. Su nombre proviene del hecho de que, convenientemente enunciado, nos dice que un cierto espacio topológico es compacto. También vamos a utilizar el siguiente resultado básico:

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI (LST). *Sean \mathcal{B} una L -estructura y S un subconjunto de B (el universo de \mathcal{B}). Entonces, existe una L -estructura \mathcal{A} , cuyo universo contiene a S , tal que \mathcal{A} es una subestructura elemental de \mathcal{B} y la cardinalidad de A es $\leq \max\{\text{card}(L), \text{card}(S), \aleph_0\}$.*

El Teorema de LST en particular nos dice que si L es numerable —incluyendo el caso finito— toda L -estructura tiene una subestructura elemental numerable.

Dado un cardinal κ , κ^+ denota el menor cardinal mayor que κ ; así, por ejemplo, $\aleph_1 = \aleph_0^+$.

Aplicando LST al lenguaje $L_o = \{<\}$ y a la L_o -estructura $(\mathbb{R}, <)$ podemos concluir la equivalencia elemental entre $(\mathbb{R}, <)$ y $(\mathbb{Q}, <)$ que comentábamos en §3: Sea $(A, <)$ la L_o -estructura numerable —subestructura elemental de $(\mathbb{R}, <)$ — que nos da el Teorema de LST (para $S = \emptyset$); $(A, <) \preceq (\mathbb{R}, <)$ implica que $(A, <)$ y $(\mathbb{R}, <)$ son elementalmente equivalentes, en particular que $<$ es un orden lineal denso y sin extremos en A ; así, por el Teorema de Cantor, $(A, <)$ y $(\mathbb{Q}, <)$ son isomorfas, y por lo tanto elementalmente equivalentes, luego $(\mathbb{R}, <)$ y $(\mathbb{Q}, <)$ son también elementalmente equivalentes.

El Teorema de LST tiene multitud de aplicaciones, algunas de ellas bastante sorprendentes; mencionaremos la llamada *Paradoja de Skolem*, aunque no la vamos a utilizar en lo que sigue. Primero obsérvese que si la L -estructura \mathcal{B} del teorema es modelo de una cierta L -teoría T , entonces también \mathcal{A} es modelo de T — \mathcal{A} y \mathcal{B} satisfacen las mismas L -fórmulas cerradas, en particular las de la L -teoría T —. Así, si L es numerable y tiene un modelo, es decir, una L -estructura que satisfice todas las fórmulas de T , entonces tiene un modelo numerable. Tomemos ahora la teoría ZFC que es la teoría de conjuntos de Zermelo-Frankel junto con el axioma de elección, ZFC es una L_{tc} -teoría, donde $L_{tc} = \{\in\}$. La paradoja de Skolem dice que si ZFC tiene un modelo, entonces tiene un modelo numerable, es decir, existe una estructura con universo numerable donde se satisfacen todos los axiomas de ZFC . Realmente no es ninguna paradoja sino un sencillo corolario del Teorema de LST.²

Finalmente introducimos el último concepto de teoría de modelos necesario para la demostración del Teorema de AKE, el de estructura suficientemente saturada. Mediante él vamos a obtener extensiones elementales suficientemente ricas, que representan el papel de *dominios universales*.

Dada una L -estructura \mathcal{A} y un subconjunto D de \mathcal{A} , recordamos que las fórmulas con parámetros en D son las fórmulas del lenguaje L_D obtenido añadiendo a L un símbolo por cada elemento de D (véase §3). Un *tipo de \mathcal{A} sobre D* es un conjunto $\Sigma(x)$ de L -fórmulas $\varphi(x)$ con parámetros en D tal que para toda parte finita $\Sigma_0(x)$ de $\Sigma(x)$ existe un elemento en \mathcal{A} que satisfice todas las fórmulas de $\Sigma_0(x)$.

Aplicando el Teorema de compacidad, se comprueba que, dado un conjunto de L_D -fórmulas $\Sigma(x)$, que $\Sigma(x)$ sea un tipo de \mathcal{A} (sobre D) es equivalente a que exista una extensión elemental \mathcal{B} de \mathcal{A} que *realice* $\Sigma(x)$, es decir, que exista un elemento $b \in \mathcal{B}$ que satisfaga en \mathcal{B} todas las fórmulas de $\Sigma(x)$.

Dado un cardinal infinito κ y un lenguaje numerable L , se dice que una L -estructura \mathcal{A} es κ -saturada si \mathcal{A} realiza todos los tipos de \mathcal{A} sobre D , para cualquier subconjunto D de \mathcal{A} de cardinalidad $< \kappa$. Intuitivamente, \mathcal{A} es κ -saturada si en \mathcal{A} ocurre todo aquello que puede ocurrir en una extensión elemental de \mathcal{A} y puede ser expresado con menos de κ fórmulas; dicho de otra forma, \mathcal{A} satisfice todas aquellas propiedades expresadas por un conjunto de fórmulas de cardinalidad menor que κ .

²Esta versión que hemos dado del Teorema de LST se conoce normalmente como Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski *descendente*. Hay una versión *ascendente* que asegura, para estructuras infinitas, la existencia de extensiones elementales de cualquier cardinalidad suficientemente grande, y que se obtiene a partir de la versión descendente y del Teorema de compacidad, pero no la vamos a utilizar.

y que sea finitamente satisfactible en \mathcal{A} . Por ejemplo, el conjunto ordenado $(\mathbb{Q}, <)$ es \aleph_0 -saturado, lo que se demuestra utilizando que $(\mathbb{Q}, <)$ admite eliminación de cuantificadores. Sin embargo, el cuerpo ordenado de los reales \mathcal{R} (en el lenguaje L_{co}) no es \aleph_0 -saturado, ya que, por ejemplo, no existe ningún número real que satisfaga simultáneamente todas las fórmulas del conjunto

$$\Sigma(x) = \{0 < x < 1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\},$$

conjunto que es claramente finitamente satisfactible en \mathcal{R} y por tanto un tipo de \mathcal{R} sobre el vacío. Obsérvese que, en \mathcal{R} , las fórmulas de $\Sigma(x)$ no tienen realmente parámetros, ya que $x < 1/n$ no es más que una abreviatura de $x + \dots + x < 1$, que es un L_{co} -término sin parámetros. No podemos expresar lo mismo en el lenguaje de conjuntos ordenados, donde no disponemos de la suma.

Las propiedades de saturación que vamos a utilizar son las siguientes, donde suponemos L numerable, \mathcal{A} una L -estructura infinita y κ un cardinal con $\kappa > \text{card}(\mathcal{A})$:

- Existe una extensión elemental \mathcal{B} de \mathcal{A} tal que \mathcal{B} es κ -saturada.
- Sea \mathcal{B} una L -estructura κ -saturada. Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son elementalmente equivalentes entonces existe una inmersión elemental de \mathcal{A} en \mathcal{B} .
- Sea \mathcal{B} una L -estructura κ -saturada. Sea \mathcal{A}_0 una subestructura común de \mathcal{A} y \mathcal{B} . Si para toda \mathcal{D} , $L_{\mathcal{A}_0}$ -subestructura finitamente generada de \mathcal{A} , existe una inmersión de \mathcal{D} en \mathcal{B} , entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0) \hookrightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{A}_0)$, es decir, existe una \mathcal{A}_0 -inmersión de \mathcal{A} en \mathcal{B} .

6. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE AKE

Sean K y F dos cuerpos valuados henselianos con $\text{char}(\overline{K}) = 0$. Sean Γ y Δ sus respectivos grupos de valores. Supongamos que tanto los cuerpos residuales \overline{K} y \overline{F} como los grupos (ordenados) de valores Γ y Δ son elementalmente equivalentes; tenemos que demostrar que K y F son elementalmente equivalentes como cuerpos valuados.

Veamos primero que basta suponer que K y F son \aleph_1 -saturados, es decir, que realizan todos los tipos sobre conjuntos numerables. Sea $\kappa > \max\{\text{card}(K), \text{card}(F)\}$, obsérvese que la hipótesis sobre la característica implica que $\kappa \geq \aleph_1$. Sean K' y F' extensiones elementales κ -saturadas de K y F respectivamente. Entonces, por las propiedades (r) y (g) de §3, tenemos que los correspondientes grupos de valores satisfacen $\Gamma \preceq \Gamma'$ y $\Delta \preceq \Delta'$ como grupos ordenados, y los cuerpos residuales satisfacen $\overline{K} \preceq \overline{K}'$ y $\overline{F} \preceq \overline{F}'$. Así, como la propiedad de ser extensión elemental es más fuerte que la de ser elementalmente equivalente, tenemos que tanto Γ' y Δ' como \overline{K}' y \overline{F}' son elementalmente equivalentes. Por lo tanto, los cuerpos valuados K' y F' satisfacen las hipótesis del Teorema de AKE (y son \aleph_1 -saturados), de lo que concluiríamos que son elementalmente equivalentes. Esto último, como antes, implica que K y F también son elementalmente equivalentes, tal como queríamos demostrar.

Supongamos entonces que K y F satisfacen las hipótesis del Teorema de AKE y además son \aleph_1 -saturados. Para demostrar que son elementalmente equivalentes

vamos a construir dos cadenas

$$(K_n : n \in \mathbb{N}) \quad \text{y} \quad (F_n : n \in \mathbb{N})$$

de cuerpos valuados henselianos, que serán subcuerpos valuados de K y F , respectivamente, tales que $K_n \preceq K$ para todo n impar y $F_n \preceq F$ para todo $n > 0$ par, y una cadena de isomorfismos de cuerpos valuados

$$\sigma_n : K_n \rightarrow F_n.$$

Así, tomando ahora

$$K' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n, \quad F' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \quad \text{y} \quad \sigma' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n$$

tenemos que, por un lado, $\sigma' : K' \cong F'$, y, por otro, $K' \preceq K$, ya que K' también es la unión de las K_n con n impar y cada una de estas K_n es subestructura elemental de K ; de forma similar $F' \preceq F$, considerando las F_n con $n > 0$ par. Por lo tanto, las cuatro estructuras K, K', F' y F son elementalmente equivalentes, en particular lo son K y F , tal como queríamos demostrar.

Construimos las mencionadas cadenas por recursión. Para ello, requerimos además que los cuerpos K_n y F_n sean numerables y que los elementos de los cuerpos residuales y grupos de valores verifiquen las siguientes condiciones para cada $n > 0$:

$$(\overline{K}, \overline{a})_{a \in \mathcal{O}_n} \equiv (\overline{F}, \overline{\sigma_n(a)})_{a \in \mathcal{O}_n}, \quad (r_n)$$

$$(\Gamma, v(a))_{a \in K_n^\times} \equiv (\Delta, v(\sigma_n(a)))_{a \in K_n^\times}, \quad (g_n)$$

donde \mathcal{O}_n es el anillo de valoración de K_n . La propiedad (r_n) expresa que, para toda fórmula φ en m variables del lenguaje de cuerpos y para toda m -upla (a_1, \dots, a_m) de elementos de \mathcal{O}_n , $(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m})$ satisface φ en \overline{K} si y solo si $(\overline{\sigma_n(a_1)}, \dots, \overline{\sigma_n(a_m)})$ satisface φ en \overline{F} . Similarmente para (g_n) y fórmulas del lenguaje de grupos ordenados. Nótese que, como $\text{char}(\overline{K}) = 0$ y \overline{K} y \overline{F} son elementalmente equivalentes, los cuatro cuerpos K, F, \overline{K} y \overline{F} tienen característica nula. Por lo tanto los anillos de valoración de K y F contienen a \mathbb{Q} , ya que, para todo p primo, si p no fuera unidad del anillo de valoración tendría que pertenecer al ideal maximal, contradiciendo que el cuerpo residual tenga característica 0.

Para $n = 0$ definimos $K_0 = F_0 = \mathbb{Q}$, ambos con valoración trivial —es decir, ambos con \mathbb{Q} como anillo de valoración y grupo de valores trivial— y $\sigma_0 = \text{id}$. Así K_0 y F_0 son trivialmente cuerpos valuados henselianos numerables y subcuerpos valuados de K y F , respectivamente. Para el resto de los casos vamos a utilizar el siguiente resultado que es el lema clave de la demostración del Teorema de AKE. Daremos una idea de la demostración del lema más adelante.

LEMA DE INMERSIÓN DE AKE. Sean $K_1 \subseteq K_2$ y $F_1 \subseteq F_2$ extensiones de cuerpos valuados henselianos tales que $\text{char}(\overline{K_2}) = 0$, $v(K_2)/v(K_1)$ es un grupo sin torsión y F_2 es $\text{card}(K_2)^+$ -saturado. Sea $\sigma' : K_1 \rightarrow F_1$ isomorfismo de cuerpos valuados y sean $\sigma'_r : \overline{K_1} \rightarrow \overline{F_1}$ y $\sigma'_g : v(K_1) \rightarrow v(F_1)$ los correspondientes isomorfismos

inducidos por σ' . Si existen inmersiones $\sigma_r: \overline{K_2} \hookrightarrow \overline{F_2}$ y $\sigma_g: v(K_2) \hookrightarrow v(F_2)$ que extienden σ'_r y σ'_g respectivamente, entonces existe una inmersión $\sigma: K_2 \hookrightarrow F_2$ de cuerpos valuados que extiende σ' y que induce σ_r y σ_g .

El lema de inmersión lo vamos a aplicar con todos los cuerpos involucrados de característica nula y K_2 numerable. En particular, la hipótesis sobre F_2 es que sea \aleph_1 -saturado. En esta situación, el lema dice esencialmente lo siguiente: Sean $K_1 \subseteq K_2$ y $F_1 \subseteq F_2$ extensiones de cuerpos valuados henselianos con $v(K_2)/v(K_1)$ sin torsión. Para extender un isomorfismo de K_1 en F_1 a una inmersión de K_2 en F_2 , basta con extender los isomorfismos inducidos en los grupos de valores y los cuerpos residuales a inmersiones de $v(K_2)$ en $v(F_2)$ y de $\overline{K_2}$ en $\overline{F_2}$, respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} \sigma: K_2 \dashrightarrow F_2 & \sigma_r: \overline{K_2} \hookrightarrow \overline{F_2} & \sigma_g: v(K_2) \hookrightarrow v(F_2) \\ \cup & \cup & \cup \\ \sigma': K_1 \xrightarrow{\cong} F_1 & \sigma'_r: \overline{K_1} \xrightarrow{\cong} \overline{F_1} & \sigma'_g: v(K_1) \xrightarrow{\cong} v(F_1) \end{array} .$$

Continuamos con la construcción de las mencionadas cadenas. Para n impar, digamos $n = 2k + 1$, ya tenemos que $\sigma_{2k}: K_{2k} \rightarrow F_{2k}$ es un isomorfismo de cuerpos valuados (numerables) y que se satisfacen (r_{2k}) y (g_{2k}) . Primero aplicamos el Teorema de LST y obtenemos un K_n numerable con $K_n \preceq K$ y $K_{2k} \subseteq K_n$. Así, K_n es un cuerpo valuado henseliano, y tenemos las extensiones elementales $\overline{K_n} \preceq \overline{K}$ y $v(K_n) \preceq \Gamma$. Por lo tanto, de (r_{2k}) y (g_{2k}) obtenemos las propiedades

$$(\overline{K_n}, \bar{a})_{a \in \mathcal{O}_{2k}} \equiv (\overline{F}, \overline{\sigma_{2k}(a)})_{a \in \mathcal{O}_{2k}} \quad \text{y} \quad (v(K_n), v(a))_{a \in K_{2k}^\times} \equiv (\Delta, v(\sigma_{2k}(a)))_{a \in K_{2k}^\times} .$$

Esto último nos permite, utilizando la saturación de \overline{F} y Δ , obtener inmersiones elementales, de $\overline{K_n}$ en \overline{F} y de $v(K_n)$ en Δ , que extienden $(\sigma_{2k})_r$ y $(\sigma_{2k})_g$ respectivamente. Nótese que, en particular, tenemos que el grupo $v(K_n)/v(K_{2k})$ es sin torsión. En efecto, si $m > 0$ y $m\gamma = \delta$ con $\gamma \in v(K_n)$ y $\delta \in v(K_{2k})$, entonces, como $v(K_{2k})$ es o bien trivial o una subestructura elemental de Γ , se tiene que $\Gamma \models \exists x mx = \delta$ y por lo tanto $v(K_{2k}) \models \exists x mx = \delta$; así existe un $\gamma' \in v(K_{2k})$ tal que $m\gamma' = \delta$ y tal γ' ha de ser γ ya que $v(K_n)$ es sin torsión. A continuación aplicamos el lema de inmersión de AKE para obtener una inmersión $\sigma_n: K_n \hookrightarrow F$ extendiendo σ_{2k} y que induzca las extensiones de $(\sigma_{2k})_r$ y $(\sigma_{2k})_g$ mencionadas. Para terminar el caso impar, tomamos finalmente $F_n := \sigma_n(K_n)$. Nótese que de $\overline{K_n} \preceq \overline{K}$ y de $(\sigma_n)_r: \overline{K_n} \xrightarrow{\cong} \overline{F}$ obtenemos (r_n) , y análogamente (g_n) .

El caso $n > 0$ par se realiza de forma simétrica utilizando en este caso el isomorfismo $\sigma_{n-1}^{-1}: F_{n-1} \rightarrow K_{n-1}$ y las propiedades (r_{n-1}) y (g_{n-1}) . Primero se aplica Löwenheim-Skolem-Tarski contra F y F_{n-1} , luego se utiliza la saturación de \overline{K} y Γ y finalmente el lema de inmersión.

Para concluir la demostración del Teorema de AKE, y por tanto del Teorema de AK, falta por demostrar el lema de inmersión. Finalizamos esta exposición dando una idea de su demostración.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA DE INMERSIÓN. Identificando K_1 con su imagen $\sigma'(K_1) = F_1$ podemos suponer que tanto σ' como los isomorfismos inducidos son la identidad,

y que σ_r y σ_g son inclusiones. Cambiando convenientemente la notación nos encontramos en la siguiente situación. Tenemos:

- (F_1, \mathcal{O}_1) y (F_2, \mathcal{O}_2) cuerpos valuados henselianos tales que F_2 es $\text{card}(F_1)^+$ -saturado y $\text{char}(\overline{F_1}) = 0$;
- (1) (K, \mathcal{O}) cuerpo valuado henseliano tal que $(K, \mathcal{O}) \subseteq (F_1, \mathcal{O}_1)$ y existe una K -inmersión $h: (K, \mathcal{O}) \hookrightarrow (F_2, \mathcal{O}_2)$;
- (2) $\overline{K} \subseteq \overline{F_1} \subseteq \overline{F_2}$;
- (3) $v(K) \subseteq v(F_1) \subseteq v(F_2)$ tal que $v(F_1)/v(K)$ sin torsión.

Buscamos extender h a una K -inmersión de (F_1, \mathcal{O}_1) en (F_2, \mathcal{O}_2) . Aplicando el Lema de Zorn a inmersiones $h': (K', \mathcal{O}') \rightarrow (F_2, \mathcal{O}_2)$ que extiendan h y satisfagan las correspondientes (1), (2) y (3), podemos suponer que (K, \mathcal{O}) es maximal con estas condiciones, de modo que nuestro objetivo es demostrar que K es F_1 .

Supongamos que $K \neq F_1$. Tenemos entonces tres casos:

- (I) $\overline{K} \neq \overline{F_1}$;
- (II) $\overline{K} = \overline{F_1}$ y $v(K) \neq v(F_1)$;
- (III) extensión inmediata, es decir, $\overline{K} = \overline{F_1}$ y $v(K) = v(F_1)$.

Caso I $[\overline{K} \neq \overline{F_1}]$. Sea $x_1 \in \mathcal{O}_1^\times$ tal que $\overline{x_1} \in \overline{F_1} \setminus \overline{K}$. Este caso se subdivide en dos dependiendo de que $\overline{x_1}$ sea transcendente, o no, sobre \overline{K} . Se utilizan técnicas puramente de cuerpos valuados —desigualdad fundamental, propiedad de ser henseliano y unicidad de la henselización— y el hecho que $\text{char}(\overline{K}) = 0$ para llegar a una contradicción con la maximalidad de K .

Caso II $[\overline{K} = \overline{F_1} \text{ y } v(K) \neq v(F_1)]$. Sea $\gamma \in v(F_1) \setminus v(K)$ y $x \in F_1$ con $v(x) = \gamma$. Como $v(F_1)/v(K)$ es sin torsión, tenemos que $v(K) \cap \mathbb{Z}\gamma = \{0\}$. El objetivo, como antes, es llegar a una contradicción con la maximalidad de K . A diferencia del caso anterior, el grupo de valores de $K(x)$ contiene propiamente a $v(K)$, ya que $v(K(x)) = v(K) \oplus \mathbb{Z}\gamma$, con lo que hemos podido perder la condición $v(F_1)/v(K(x))$ sin torsión. Ahora bien, utilizando que $\text{char}(\overline{F_1}) = 0$ y que $\overline{K} = \overline{F_1}$, obtenemos una extensión algebraica $K' (\subseteq F_1)$ de $K(x)$ tal que $v(F_1)/v(K')$ es sin torsión. Falta demostrar la existencia de una inmersión de K' en F_2 —así obtendremos una inmersión de la henselización de K' en F_2 , y por tanto la contradicción buscada—. Como F_2 es $\text{card}(F_1)^+$ -saturado basta suponer que la extensión algebraica es finita. La inmersión se obtiene utilizando que $\text{char}(\overline{F_1}) = 0$ y que la henselización (en F_1) es una extensión algebraica inmediata maximal.

Caso III $[\overline{K} = \overline{F_1} \text{ y } v(K) = v(F_1)]$. Sea $x_1 \in F_1 \setminus K$. Como K es henseliano y, tal como hemos dicho antes, la henselización es una extensión algebraica maximal —al ser $\text{char}(\overline{K}) = 0$ —, x_1 ha de ser transcendente sobre K . Buscamos un $x_2 \in F_2$, transcendente sobre K , tal que el morfismo de cuerpos de $K(x_1)$ en F_2 que manda x_1 en x_2 preserve la valoración. Así, extendiendo la inmersión a la henselización de $K(x_1)$ en F_1 , una vez más llegaremos a una contradicción con la maximalidad de K . Para obtener tal elemento, utilizamos la saturación de F_2 que nos asegura que existe un $x_2 \in F_2$ que realiza el siguiente tipo de F_2 con parámetros en K :

$$\Sigma(x) = \{p(x) \neq 0 \mid p(x) \in K[x]^*\} \cup \{\exists z(V^\times(z) \wedge x - a = zb_a) \mid a \in K\}$$

donde, para cada $a \in K$, b_a es un elemento fijo de K tal que $v(b_a) = v(x_1 - a)$, que existe por ser $v(K) = v(F_1)$. El primer conjunto de fórmulas nos dice que x_2 es transcendente sobre K ; el segundo, que la valoración de $x_2 - a$ coincide con la de $x_1 - a$, para cada $a \in K$. Nótese que, al no tener K extensiones algebraicas inmediatas, $v(K(x_1))$ queda determinado conociendo los $v(x_1 - a)$ ($a \in K$). Con esto acaba la demostración de este caso y, por tanto, del lema de inmersión. \square

REFERENCIAS

- [1] JAMES AX Y SIMON KOCHEN, Diophantine problems over local fields. I, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 605–630.
- [2] LUC BÉLAIR, Panorama of p -adic model theory, *Ann. Sci. Math. Québec* **36**(1) (2012), 43–75.
- [3] RAF CLUCKERS Y FRANÇOIS LOESER, Ax-Kochen-Eršov theorems for p -adic integrals and motivic integration, *Geometric methods in algebra and number theory, Progr. Math.* **235**, 109–137, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005.
- [4] RAF CLUCKERS Y FRANÇOIS LOESER, Constructible motivic functions and motivic integration, *Invent. Math.* **173**(1) (2008), 23–121.
- [5] J. DENEFF, The rationality of the Poincaré series associated to the p -adic points on a variety, *Invent. Math.* **77**(1) (1984), 1–23.
- [6] ANTONIO J. ENGLER Y ALEXANDER PRESTEL, *Valued fields*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [7] JU. L. ERŠOV, On elementary theories of local fields, *Algebra i Logika Sem.* **4**(2) (1965), 5–30.
- [8] EHUD HRUSHOVSKI, The Mordell-Lang conjecture for function fields, *J. Amer. Math. Soc.* **9**(3) (1996), 667–690.
- [9] ANGUS MACINTYRE, On definable subsets of p -adic fields, *J. Symbolic Logic* **41**(3) (1976), 605–610.
- [10] ANGUS MACINTYRE, Twenty years of p -adic model theory, *Logic colloquium '84 (Manchester, 1984)*, *Stud. Logic Found. Math.* **120**, 121–153, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [11] JONATHAN PILA, O-minimality and the André-Oort conjecture for \mathbb{C}^n , *Ann. of Math. (2)* **173**(3) (2011), 1779–1840.
- [12] ALEXANDER PRESTEL Y CHARLES N. DELZELL, *Mathematical logic and model theory*, Universitext, Springer, London, 2011. (Traducción ampliada del original en alemán de 1986.)
- [13] GUY TERJANIAN, Un contre-exemple à une conjecture d'Artin, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **262** (1966), A612.

MARGARITA OTERO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID, 28049 MADRID

Correo electrónico: margarita.otero@uam.es