Teorema de Frobenius

Luis Guijarro

UAM

19 de octubre de 2010

Sea $F : U \to V$ una aplicación diferenciable entre abiertos de espacios euclídeos. El rango de F en $p \in U$ es el rango de la matriz diferencial $DF(p)$.

Teorema (Teorema del rango)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos. Si $F : U \to V$ es una aplicación diferenciable con rango constante k, entonces para cada $a \in U$, hay

- *abiertos $A \subset U$, $B \subset V$, con $a \in A$ y con $b = F(a) \in B$;*
- *un difeomorfismo $G : A \to A_0$ con $G(a) = 0$,*
- *un difeomorfismo $H : B \to B_0$ con $H(b) = 0$,*

tal que

$$H \circ F \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

Dos casos frecuentes:

- $\text{rango}(F) = n$, $\bar{F}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$
- $\text{rango}(F) = m$, $\bar{F}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$

Definición

Sea $F : N \to M$ una aplicación diferencial. El rango de F en p es el rango de $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ en $\phi(p)$, donde (U, ϕ) es una carta de M en p, y (V, ψ) es una carta de N en $q = F(p)$.

El rango de F no depende de las cartas (U, ϕ), (V, ψ) que aparecen en la definición.
El rango de F en p coincide con el rango de la aplicación lineal $dF_p : T_pM \to T_qN$.

Lema

Si $F : M \to N$ es una aplicación de rango constante k, entonces para todo $p \in M$ existen cartas (U, ϕ) de M en p, (V, ψ) de N en $F(p)$, tal que la expresión local de F en estas cartas es

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

Las cartas anteriores se pueden tomar con $\phi(U) = (-\varepsilon, \varepsilon)^n$, $\psi(V) = (-\varepsilon, \varepsilon)^m$, o con $\phi(U) = B^n_\varepsilon(0)$, $\psi(V) = B^m_\varepsilon(0)$.

Inmersiones y submersiones

Definición

Sea $F : N \to M$ una aplicación diferencial.

- *F es una inmersión si* $\operatorname{rango}(F) = \dim N$;
- *F es una submersión si* $\operatorname{rango}(F) = \dim M$.

Una inmersión es localmente inyectiva, pero hay ejemplos de:

- Inmersiones no inyectivas;
- inmersiones inyectivas con imagen no cerrada;
- inmersiones inyectivas con imagen cerrada, pero con $F : M \to F(M) \subset N$ no siendo un homeomorfismo.

Subvariedades

Ejercicio: Si N es una subvariedad, y si $F : N \to X$ es una aplicación biyectiva sobre un *conjunto* X, podemos poner en X una topología y una estructura diferencial que hacen de f un difeomorfismo.

Definición

Sea $F : N \to M$ una inmersión inyectiva. Su imagen $F(N) = \tilde{N} \subset M$ recibe una topología y una estructura diferencial como en el ejercicio anterior. Con ellas, $\tilde{N}$ se llama una subvariedad de M.

Observación: A menudo, la topología de $\widetilde{N}$ como subespacio, y la que tiene como subvariedad son muy diferentes. Ejemplos típicos son la figura ocho, y la recta de pendiente irracional en el toro.

Subvariedades (cont.)

Definición

Una inmersión inyectiva $F : N \to M$ *donde la topología de* $\tilde{N}$ *como subvariedad coincide con la topología subespacio se llama un embebimiento (encaje). En este caso,* $\widetilde{N}$ *se llama una subvariedad embebida en* M.

Teorema

Si $F : N \to M$ *es una inmersión, entonce todo* $p \in N$ *tiene un entorno* U *tal que* $F : U \to M$ *es un embebimiento.*

Cartas k-adaptadas

Sea M una variedad de dimensión n, $P \subset M$ un subconjunto, $p \in P$

Definición

Una carta (U, ϕ) de M en p se dice que está k-adaptada a P en p si $\phi(U \cap P) = \phi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}\right)$

Notación: Por $\{0\}^{n-k}$ indicamos una $n-k$-tupla de ceros. Cuando escribimos $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ indicamos el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, y un total de $n-k$ ceros al final.

A menudo, en la definición de carta k-adaptada, se requiere que $\phi(p) = 0$, y que $\phi(U) = (-\varepsilon, \varepsilon)^n$; si es necesario, asumiremos ambas propiedades, ya que pueden obtenerse fácilmente componiendo ϕ con traslaciones, restricciones y dilataciones en $\mathbb{R}^n$.

Subvariedad regular de M de dimensión k

Definición

Una **subvariedad regular de** M **de dimensión** k *es un subconjunto* S *de* M *que tiene cartas* k*-adaptadas en cada uno de sus puntos.*

Teorema

Sea S *una subvariedad regular de* M*. Entonces* S *con su topología subespacio tiene una estructura de variedad diferencial de dimensión* k*.*

Demostración: Para cada punto p de S vamos a construir primero una carta de S en p:

- Primero tomamos una carta k-adaptada de S en p, (U, ϕ);
- denotamos por $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ la proyección $\pi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k)$;
- $U \cap S$ es abierto en S;

Subvariedad regular de M de dimensión k

- $\pi \circ \phi : U \cap S \to \mathbb{R}^k$ es continua;
- $\pi \circ \phi(U \cap S)$ es abierto en $\mathbb{R}^k$: para esto observad que la aplicación

  $$i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}, \quad i(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

  es un homeomorfismo cuando a $R^k \times \{0\}^{n-k}$ se le da la topología subespacio desde $\mathbb{R}^n$; su inversa es precisamente $\pi|_{R^k \times \{0\}^{n-k}}$.
  Pero

  $$\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}\right)$$

  es abierto en $R^k \times \{0\}^{n-k}$, así que $\pi \circ \phi(U \cap S)$ es abierto en $\mathbb{R}^k$.
- Como $\pi|_{R^k \times \{0\}^{n-k}}$ es inyectiva y $\phi(U \cap S) \subset R^k \times \{0\}^{n-k}$, entonces $\pi \circ \phi$ es inyectiva en $U \cap S$.

Subvariedad regular de M de dimensión k

- $\pi \circ \phi$ es sobreyectiva sobre su imagen, con lo que es biyectiva por el punto anterior.
- $(\pi \circ \phi)^{-1}$ está dada por

  $$\xi(x_1, \ldots, x_k) = \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

  ya que

  $$\pi \circ \phi \circ \xi(x_1, \ldots, x_k) = \pi \circ (\phi \circ \phi^{-1})(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_k),$$

  así que es continua.

Ahora que tenemos cartas de S en cada uno de sus puntos, vamos a ver que podemos extraer un atlas diferenciable de ellas. Para acortar, denotaremos

$$\widetilde{\phi} = \pi \circ \phi \text{ en cada } U \cap S$$

Subvariedad regular de M de dimensión k

Para cada $p \in S$, tomamos una carta k-adaptada a S en p, y las juntamos a todas en $\mathcal{A} = \{(U_\alpha \cap S, \widetilde{\phi}_\alpha\}$.

Lema

$\mathcal{A}$ es un atlas diferencial en S.

Demostración.

Como hemos escogido una carta adaptada para cada punto de S, es claro que

$$\cup_\alpha (U_\alpha \cap S) = S.$$

Sólo queda por ver que las cartas son compatibles entre sí. Suponemos que $(U_\alpha \cap S) \cap (U_\beta \cap S) = U_\alpha \cap U_\beta \cap S \neq \emptyset$.

$$\widetilde{\phi}_\beta \circ \widetilde{\phi}_\alpha^{-1}(x_1, \ldots, x_k) = \pi \circ \phi_\beta \circ \phi_{\alpha^{-1}}(x_1 \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

que es diferenciable porque $\phi_\beta \circ \phi_{\alpha^{-1}}$ es un cambio de coordenadas en M. $\square$

Subvariedades (cont.)

Teorema

Si S es una subvariedad regular de M, entonces la inclusión $i : S \to M$ es un embebimiento (cuando se le da a S la ED que recibe como subvariedad)

Demostración.

Basta ver que $i : S \to M$ es suave, ya que S tiene la topología subespacio. Para ello, tomamos $p \in S$. Como $i(p) = p$, hay que tomar cartas de S en p, de M en p y hallar la expresión local de i en estas cartas.

- En S tomamos una carta k-adaptada $(U \cap S, \widetilde{\phi})$;
- en M tomamos la carta (U, ϕ) que dió lugar a la carta anterior.

La expresión local queda:

$$\begin{tikzcd}
\phi^{-1}(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \arrow[r, "i"] & \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \arrow[d, "\phi"] \\
(x_1, \ldots, x_k) \arrow[u, "\widetilde{\phi}^{-1}"] \arrow[r, "\bar{i}"] & (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)
\end{tikzcd}$$

□

Embebida es regular

Toda subvariedad regular es embebida. El recíproco es cierto:

Teorema

Si $F : N' \to M$ es un embebimiento, $N = F(N')$ es una subvariedad regular. Además $F : N' \to N$ es un difeomorfismo (donde N tiene la estructura diferencial de subvariedad regular).

Teorema

Si $F : N \to M$ es una inmersión inyectiva y N es compacta, entonces F es un embebimiento y $F(N)$ es una subvariedad regular de M.

Si una subvariedad (inmersa) N no es regular, entonces N no puede ser compacta.

Valores regulares

Teorema

Si $F : N \to M$ *es una aplicación suave con rango constante* k*, y si* $q \in F(N)$*, entonces* $F^{-1}(q)$ *es una subvariedad regular de* M *de dimensión* $\dim(N) - k$

Corolario

Si $F : N \to M$ *es una submersión,* $F^{-1}(a)$ *es una subvariedad de dimensión* $\dim(N) - \dim(M)$ *para todo* $a \in F(N)$.

Algunas diferencias entre los distintos tipos de variedades

- Si $A \subset M$ es una subvariedad, y $F : M \to P$ es una aplicación suave, entonces $F|_A : A \to P$ es suave.
- Si $F : P \to M$ es una aplicación suave (o incluso meramente continua), y si $\widetilde{N} \subset M$ es una subvariedad de M con $F(P) \subset \widetilde{N}$, no es necesario que $G : P \to \tilde{N}$ obtenida como restricción de F a su imagen, sea continua (y mucho menos suave).
- Si $F : P \to M$ es una aplicación suave, y si $\widetilde{N} \subset M$ es una subvariedad regular de M con $F(P) \subset \widetilde{N}$, entonces $G : P \to \tilde{N}$ obtenida como restricción de F a su imagen, es suave.

Campos de vectores

Definición

Sea $\mathcal{O}$ un abierto de M. Un campo de vectores X en $\mathcal{O}$ es una correspondencia que asigna a cada punto $p \in \mathcal{O}$ un vector tangente $X_p \in T_pM$.

Si $(U, \phi = (x_1, \dots, x_n))$ es una carta de M, la *expresión local de X en la carta* es

$$X\big|_U = \sum_{i=1}^{n} X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde cada $X(x_i)$ es la función $X(x_i)(p) = X_p(x_i)$.

Definición

X es suave si para toda función suave $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, la función $X(f) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ (definida como $X(f)(p) = X_p(f)$) es suave.

Fibrado tangente

M una variedad diferencial de dimensión n.

$$TM = \cup_{p \in M} T_p M = \{\, (p, v) \,:\, p \in M, v \in T_p M \,\}$$

es el conjunto formado por todos los posibles vectores tangentes en todos los puntos de M.

Si $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta de M, los vectores tangentes basados en puntos de U se pueden escribir como

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p$$

donde $a_i = v(x_i) \in \mathbb{R}$.

Hay una aplicación natural (*la proyección*) $\pi : TM \to M$ enviando $(p, v) \in TM$ a $p \in M$.

Cartas en TM

Vamos a dotar a TM de una estructura diferencial usando para ello las cartas de M.

- $\pi^{-1}(U) = \{(p, v) \,:\, p \in U\}$;
- $\widetilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ definida como

$$\widetilde{\phi}(q, v) = (x_1(q), \dots, x_n(q), v(x_1), \dots, v(x_n))$$

Es fácil comprobar que estas cartas forman un atlas suave para la que $\pi : TM \to M$ es una submersión.

Definición

Una sección de TM es una aplicación $s : M \to TM$ tal que $\pi \circ s$ es la aplicación identidad.

Ejemplos de secciones son los campos de vectores, ya que $\pi(X_p) = p$ para todo $p \in M$.

Campos de vectores: definiciones equivalentes

Teorema

Son equivalentes:

1. X *es un campo de vectores suave en* $\mathcal{O}$*;*
2. *para todo* $p \in \mathcal{O}$*, hay una carta de* M *en* p *en la que las funciones* $X(x_i)$ *son suaves;*
3. $X : \mathcal{O} \to TM$ *es una sección suave.*

Campos de vectores y subvariedades

Sea $F : \mathbb{N}' \to M$ una inmersión inyectiva con imagen la subvariedad $N \subset M$; para cada $p' \in N'$, la diferencial

$$dF_{p'} : T_{p'}N' \to T_pM$$

es inyectiva (donde $p = F(p')$). Su imagen $dF_p(T_{p'}N')$ es un subespacio de T_pM de la misma dimensión que N, y que denotamos T_pN.

Lema

Si X es un campo suave de vectores en M tal que para cada $p \in N$, $X_p \in T_pN$, entonces hay un campo suave de vectores X' en N' con $dF_{p'}(X'_{p'}) = X_p$ para todo $p' \in N'$.

En el caso de subvariedades dadas como conjuntos de nivel de un valor regular, la condición $v \in T_pS$ es fácil de comprobar:

Lema

Sea $F : M \to N$ suave y $a \in N$ un valor regular de F. El espacio tangente a la subvariedad $S = F^{-1}(a)$ en un punto $p \in S$ coincide con el núcleo de $dF_p : T_pM \to T_{F(q)}N$.

Campos de vectores y aplicaciones

Definición

Sea $F : M \to N$ una aplicación suave entre variedades, y X un campo de vectores en X. Si hay un campo de vectores Y en N tal que para todo $p \in M$, $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$, entonces X e Y están F-relacionados.

Dado un X en M, no tiene por qué existir tal Y; por ejemplo, pueden haber p_1, $p_2 \in M$ con $F(p_1) = F(p_2)$ pero con $dF_{p_1}(X_{p_1}) \neq dF_{p_2}(X_{p_2})$.

Lema

Si $F : M \to N$ es un difeomofismo, para cada X en M existe un y solo un campo Y en N que está F-relacionado con X.

Un caso útil es cuando F es el difeomorfismo $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ que proviene de una carta. En este caso, es fácil ver que

$$\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = E_i$$

donde E_i son los campos de vectores en $\mathbb{R}^n$ asociados a las derivadas parciales (i.e, $E_{i,x}(f) = D_i f(p)$).

Flujo global

Definición

Un flujo global en una variedad M es una acción suave de $\mathbb{R}$ en M, i.e, una aplicación suave $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$, tal que

1. $\theta(0, p) = p$, *para todo* $p \in M$;
2. $\theta(s, \theta(t, p)) = \theta(s + t, p)$ *para todos* $s, t \in \mathbb{R}$, $p \in M$.

Para cada $p \in M$, consideramos el vector X_p tangente en $t = 0$ a la curva $c_p : \mathbb{R} \to M$, $c_p(t) = \theta(t, p)$.

Definición

X se llama el generador infinitesimal del flujo θ.

Lema

El generador infinitesimal de un flujo es un campo suave.

Flujo global (cont.)

Para cada $t \in \mathbb{R}$, consideramos la aplicación $\theta_t : M \to M$ definida como

$$\theta_t(p) = \theta(t, p)$$

Lema

Con la notación anterior,

1. θ_t *es un difeomorfismo de* M *con inversa* θ_{-t}.
2. X *está* θ_t*-relacionado consigo mismo (=invariante); en otras palabras,*

$$(d\theta_t)_p(X_p) = X_{\theta_t(p)}$$

Órbitas

Para cada $p \in M$, la órbita de p mediante el flujo θ es la imagen de la curva

$$c_p : \mathbb{R} \to M, \quad c_p(t) = \theta(t, p),$$

Las órbitas dan una partición de M en conjuntos disjuntos, ya que $\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(s + t, p)$ implica que si $q = c_p(s) = \theta(s, p)$, entonces

$$c_q(t) = \theta(t, q) = \theta(t, \theta(s, p)) = \theta(s + t, p) = c_p(s + t)$$

Teorema

Para cada $p \in M$, su órbita es, o bien un sólo punto, o bien una inmersión de $\mathbb{R}$ en M mediante la aplicación $t \to \theta(t, p)$. El primer caso ocurre si $X_p = 0$, y el segundo si $X_p \neq 0$.

Observación: las curvas $c_p(t)$ satisfacen $c_p'(t) = X_{c_p(t)}$.

Curvas integrales de un campo de vectores

Definición

Una curva integral de un campo de vectores X es una curva suave $c : I \to M$ desde un intervalo I a M con $c_p'(t) = X_{c_p(t)}$.

Para el generador infinitesimal de un flujo global, las curvas $t \in \mathbb{R} \to \theta(t, p)$ son integrales.

Para un campo arbitrario X, sus curvas integrales no necesitan estar definidas en todo $\mathbb{R}$ (por lo que no todo campo de vectores viene de un flujo global).

Ejemplo:

$$X_x = x^2 \frac{\partial}{\partial x} \text{ en } \mathbb{R}.$$

$x'(t) = x(t)^2$, $x(0) = x_0$, $\Longrightarrow x(t) = \dfrac{x_0}{1 - tx_0}$, cuyo intervalo de definición (conteniendo $t = 0$) es $(-\infty, \frac{1}{x_0})$ para $x_0 > 0$, y $(\frac{1}{x_0}, \infty)$ para $x_0 < 0$.

Flujo "local"

Definición

Un flujo "local" de un campo de vectores X cerca de un punto p es una aplicación suave

$$\theta : (-\delta, \delta) \times V \to M$$

donde $\delta > 0$, V es un abierto de p, y tal que para cada $p \in V$, la curva $t \to \theta(t, p)$ es integral para X.

Próximamente:

1. Probar la existencia de flujos locales para todo campo de vectores alrededor de cada punto;
2. construir la curva integral con dominio maximal por cada punto;
3. intentar agrupar todos los flujos locales en una aplicación $\theta : W \to M$, donde W será un abierto en $\mathbb{R} \times M$ conteniendo $(0, p)$ para todo p.

Aplicaciones y curvas integrales

Supongamos que $F : M \to N$ es suave y que $F_* X = Y$; si $c : I \to M$ es una curva integral de X pasando por p, entonces $F \circ c : I \to N$ es una curva integral de Y pasando por $F(p)$:

$$(F \circ c)'(t) = dF_{c(t)}(c'(t)) = dF_{c(t)}(X_{c(t)}) = Y_{F(c(t))}$$

Esto hace que si

$$\theta^X : (-\delta, \delta) \times V \to M$$

es un flujo local de X, entonces

$$F \circ \theta^X(t, F(p))$$

describa curvas integrales para puntos en $F(V)$.

Existencia y unicidad para EDO's

Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Supongamos que tenemos funciones suaves

$$f_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \quad f_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Entonces para cada $x \in \mathcal{O}$, existen $\delta > 0$, y un entorno abierto de x, $V \subset \mathcal{O}$, tal que

1. para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in V$ hay una curva suave $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ con $x : (-\delta, \delta) \to \mathcal{O}$ tal que es solución del sistema

   $$x_i'(t) = f_i(t, x), \quad i = 1, \ldots, n$$

   con condición inicial

   $$x(0) = (a_1, \ldots, a_n)$$

2. Para cada a, la curva $x(t)$ es única, en el sentido de que si otra curva $\bar{x}(t)$ cumple el sistema anterior, entonces $x = \bar{x}$ en su dominio común de definición;
3. si escribimos la solución del sistema $x(t)$ con $x(0) = a$ como $x(t, a)$, entonces $x : (-\delta, \delta) \times V \to U$ es una aplicación suave (dependencia suave de las condiciones iniciales).

Flujo local en $\mathbb{R}^n$

Si

$$Y = Y_1 E_1 + Y_n E_n$$

es un campo en $\mathbb{R}^n$ (donde, como antes, E_i son los campos coordenados asociados a la carta identidad), entonces la curva integral $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ de Y con $x(0) = a$ cumple

$$x_i'(t) = Y_i(x(t)),$$

y podemos usar el resultado anterior para asegurar la existencia de un flujo local del campo Y en algún abierto de $\mathbb{R}^n$ conteniendo a.

Flujo local en variedades

Si X es un campo de vectores suave en una variedad M, y si $p \in M$, el flujo local de X cerca de p se halla combinando lo anterior tras pasar una carta (U, ϕ):

1. $Y = \phi_* X$ es un campo en $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$;
2. Y tiene un flujo local $\theta^Y(t, a)$ en $\mathbb{R}^n$;
3. $X = (\phi^{-1})_* Y$ tendrá el flujo $\theta^X = \phi^{-1} \circ \theta^Y$ en el dominio adecuado.

Teorema

X campo de vectores suave, $p \in M$. Existe un entorno abierto V de p, un $\delta > 0$, y una aplicación suave

$$\theta : (-\delta, \delta) \times V \to M$$

que cumple

$$\theta(0, q) = q, \quad \theta'(t, q) = X_{\theta(t,q)}$$

para todo $q \in V$ ($\theta'(t, q)$ denota el vector tangente a la curva $t \to \theta(t, q)$). Además, si $c(t)$ es cualquier otra curva integral de X con $c(0) = q \in V$, entonces $c(t) = \theta(t, q)$ para $t \in (-\delta, \delta)$.

Curvas integrales maximales

Teorema

X suave, $p \in M$. Hay un único intervalo abierto $I(p)$ conteniendo 0 tal que:

1. *Existe una curva integral $c_p : I(p) \to M$ de X con $c_p(0) = p$.*
2. *Si $c : I \to M$ es otra curva integral de X con $c(0) = p$, entonces $I \subset I(p)$ y $c(t) = c_p(t)$ para todo $t \in I$.*

La $c_p : I(p) \to M$ se llama la *curva integral maximal de X por p*.

Lema

Si $q = c_p(s_0)$, entonces $I(q) = I(p) - s_0$, y en este caso, $c_q(s) = c_p(s + s_0)$.

Dominio de flujo

Para construir el flujo maximal de un campo de vectores X, juntaremos las curvas integrales maximales pasando por cada punto de M.

Definición

X un campo suave. Su dominio (maximal) de flujo es el abierto $W \subset \mathbb{R} \times M$ definido como

$$W = \{\, (t, p) \,:\, t \in I(p),\; p \in M \,\}$$

Teorema

Sea X un campo de vectores suave. Entonces, con la notación anterior,

1. *W es un abierto en $\mathbb{R} \times M$ conteniendo $\{0\} \times M$;*
2. *la aplicación $\theta : W \to M$ definida como*

   $$\theta(t, p) = c_p(t)$$

   es suave.

Flujo de un campo de vectores

Definición

$\theta : W \to M$ se llama el flujo (maximal) de X.

Lema

Sea $t \in \mathbb{R}$. Si X es suave, denotamos por $\theta : W \to M$ su flujo, y por $\theta_t(*)$ a $\theta(t, *)$, entonces:

1. *si $t \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto*

$$W_t = \{ q \in M : (t, q) \in W \}$$

   es un abierto de M;

2. *el mayor conjunto en que puede definirse θ_t es W_t y su imagen es W_{-t};*
3. *$\theta_t : W_t \to W_{-t}$ es un difemomorfismo con inversa θ_{-t}.*

Campos completos

Definición

Un campo X se llama completo si sus curvas integrales maximales están definidas en todo $\mathbb{R}$, i.e, si $W = \mathbb{R} \times M$, i.e, si $\cdot X \cdot$ es el generador infinitesimal de alguna acción global de $\mathbb{R}$ en M..

Lema

Sunpongamos que para un $p \in M$ el intervalo de su curva maximal es de la forma $I(p) = (\alpha(p, \beta(p))$ con $\beta(p) < \infty$. Si $t_n \to \beta(p)$ con $t_n < \beta(p)$, entonces la sucesión de puntos $\theta(t_n, p)$ abandona cualquier subconjunto compacto de M.

Corolario

Si un campo X tiene soporte compacto (i.e, $\overline{\{\, p \in M \,:\, X_p \neq 0\}}$ es compacto), entonces X es completo. Por consiguiente, en una variedad compacta, todo campo es completo.

Derivada de Lie de un campo de vectores

X, Y, campos suaves en M; $\theta : W \to M$ el flujo de X. Vamos a "derivar" Y a lo largo de las curvas integrales de X:

- A lo largo de la curva $t \to \theta(t,p)$ el campo Y toma valores $Y_{\theta(t,p)} \in T_{\theta(t,p)}M$;
- para cada t, usamos $d\theta_{-t}$ para traerlos a p: $d\theta_{-t}(Y_{\theta(t,p)}) \in T_pM$;
- los derivamos de la forma usual en el espacio vectorial T_pM.

Definición

La derivada de Lie de Y con respecto a X es el campo de vectores $L_X Y$ obtenido con este proceso.

Teorema

Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función suave, entonces

$$(L_X Y)_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

Corchete de Lie

Definición

X, Y campos suaves. El corchete de Lie de X e Y es el campo de vectores $[X,Y]$ definido como

$$[X.Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

para cualquier función diferenciable.

- $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$, $a, b \in \mathbb{R}$;
- $[Y,X] = -[X,Y]$;
- $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (identidad de Jacobi).

Corchete de Lie (cont.)

Lema

$F : M \to N$ una aplicación suave. Si X_1, X_2, están F-relacionados con Y_1, Y_2, entonces $[X_1, X_2]$ está F relacionado con $[Y_1, Y_2]$.

Es más fácil recordarlo así:

$$F_*[X_1, X_2] = [F_* X_1, F_* X_2]$$

Teorema

X, Y, campos suaves con flujos θ, σ respectivamente. Entonces $[X, Y] = 0$ sii para cada $p \in M$ hay un $\delta > 0$ tal que $\sigma_s \circ \theta_t(p) = \theta_t \circ \sigma_s(p)$ para $|s|, |t| < \delta$.

Distribuciones de n-planos