Problemas de Geometría Diferencial, Máster

Primer semestre, 2009/2010. Hoja 7.
Entrega: jueves 21 de diciembre.

---

1. Sean X, Y, campos de vectores en M. Si $\alpha : I \to M$ es la curva integral de X por p, demuestre que

$$(\nabla_X Y)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P^{-1}_{\alpha,0,t}(Y(\alpha(t)))$$

donde $P_{\alpha,0,t} : T_pM \to T_{\alpha(t)}M$ es el transporte paralelo a lo largo de α.

---

2. Una métrica Riemanniana en un grupo de Lie G se llama invariante por la izquierda (derecha) si para todo $g \in G$,

$$\langle\, u, v \,\rangle = \langle\, dL_g u, dL_g v \,\rangle (= \langle\, dR_g u, dR_g v \,\rangle)$$

La métrica es *biinvariante* si es invariante por ambos lados. En esta situación, demuestre que si X,Y,Z son campos invariantes por la izquierda se tiene que

$$\langle\, [X, Y], Z \,\rangle = \langle\, X, [Z, Y] \,\rangle$$

Demuestre asimismo, que la conexión de Levi Civita de una métrica biinvariante satisface

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g}$$

Use esto para demostrar que el grupo uniparamétrico correspondiente a un $X \in \mathfrak{g}$ es una geodésica de G.
