Convocatoria Extraordinaria de Geometría III. **4 de Septiembre de 2010**
Profesor: Luis Guijarro Santamaría.

Instrucciones: Entregue la solución de cada problema en una hoja diferente.

---

1. (2) Clasifique todas las superficies compactas y conexas, con o sin borde, con $\chi(S) = -1$.

---

2. (4) Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}^4$ dado como

$$S = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, e^x \cos y - z = 0, e^x \sin y - t = 0 \}.$$

- Demuestre que S es una subvariedad de $\mathbb{R}^4$;
- demuestre que la aplicación $\xi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S$ dada por
$$\xi(u, v) = (u, v, e^u \cos v, e^u \sin v)\,, \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
es una parametrización asociada a una carta (U, ϕ) de la estructura suave de subvariedad.
- demuestre que el campo de vectores de $\mathbb{R}^4$
$$Z = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z} + t\frac{\partial}{\partial t}$$
es tangente a S, y que por tanto el campo $X = Z|_S$ es un campo suave en S;
- si $\Theta : \mathbb{R} \times S \to S$ es el flujo de X, halle el punto $\Theta(1, p)$, donde $p = (0, 0, 1, 0)$.

---

3. (2) Sea $S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$. Consideramos en S^2 la métrica g que induce la métrica euclídea en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que la aplicación antipodal

$$a : S^2 \to S^2, \quad a(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

es una isometría.

---

4. (2) Sea M el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 con entradas reales. Consideramos en M la estructura de variedad diferencial inducida por el atlas cuya aplicación coordenada es

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = (x, y, z, t)$$

y cuyo entorno coordenado es todo M.

- Si $F : M \to M$ es la aplicación que lleva una matriz A a la matriz A^2, escriba la expresión local de F en la carta anterior.
- Si I es la matriz identidad, escriba la matriz de la diferencial dF_I en la base de vectores coordenados $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right\}$
