Examen Final de Geometría III. **17 de Junio de 2010**

Profesor: Luis Guijarro Santamaría.

Instrucciones: Entregue la solución de cada problema en una hoja diferente.

---

1. (2 puntos) Sea S una superficie compacta sin frontera que contiene una banda de Moebius. Demuestre que la suma conexa de S con dos planos proyectivos es homeomorfa a la suma conexa de S y de un toro.

---

2. (4 puntos) En $\mathbb{R}^4$ consideramos el subconjunto S definido como

$$S = \{ (x, y, z, t) \neq (0, 0, 0, 0) \, : \, xt - yz = 0, x + t = 0 \}$$

1. Demuestre que S es una subvariedad de R^4.
2. Demuestre que la aplicación $F : S \to S$, $F(x, y, z, t) = (x, z, y, t)$ es un difeomorfismo.
3. Demuestre que las aplicaciones

$$\xi : A = \{(u, v) : v \neq 0\} \to S, \quad \xi(u, v) = (u, v, -\frac{u^2}{v}, -u); \qquad \eta : A \to S, \quad \eta(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, -\frac{\bar{u}^2}{\bar{v}}, \bar{v}, -\bar{u})$$

   son parametrizaciones de S.
4. Halle la matriz de dF_p en las parametrizaciones anteriores cuando $p = (0, 0, -1, 0)$.
5. Si Z es el campo de vectores de $\mathbb{R}^4$ definido como $Z = z\frac{\partial}{\partial x} + (t - x)\frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial t}$ en la base canónica de vectores coordenados, demuestre que $X = Z|_S$ es un campo de vectores suave en S.

---

3. (3 puntos) Sea $\theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la acción dada por $\theta((k, l), (x, y)) = (x + k, y + l)$. Denotamos por M su espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

1. Demuestre que M es una variedad diferencial tal que la proyección $\pi : \mathbb{R}^2 \to M$ es un difeomorfismo local.
2. Si U es el cuadrado unidad abierto en $\mathbb{R}^2$, demuestre que $(\pi(U), \widetilde{\phi})$ es una carta de M, donde $\widetilde{\phi}([x, y]) = \mathrm{Id} \circ (\pi\big|_U)^{-1}[x, y]$.
3. Demuestre que $f : M \to \mathbb{R}$, $f[x, y] = \sin 2\pi x \cos 2\pi y$ es diferenciable, y halle la expresión local de df en la carta anterior.

---

4. (2 puntos) En M es el octante positivo de $\mathbb{R}^3$ (i.e, $M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x > 0, y > 0, z > 0 \}$) tomamos la métrica g dada en las coordenadas usuales por la matriz

$$\begin{pmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

1. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es la función $f(x, y, z) = xz$, hallar el gradiente $\nabla^g f$.
2. Si $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial z}$, halle el flujo de X y decida si está dado por isometrías (esto es, si para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, $\theta_{t_0} = \theta(t_0, \cdot) : M \to M$ es isometría).
