**1.** Sea $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es el plano proyectivo con la estructura diferencial estudiada en clase.

- Si $\alpha : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es la curva cuyo punto $\alpha(t)$ corresponde a la recta $\ell(t)$ de ecuaciones
$$\ell(t) = \begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y = 0, \\ y + z = 0 \end{cases}$$
demuestre que $\alpha$ es una curva diferenciable, y halle sus funciones coordenadas en la carta $(U, \phi)$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definida como
$$U = \{[x, y, z] \,:\, z \neq 0\}, \qquad \phi[x, y, z] = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$
- Sea $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la función definida como $f([x, y, z]) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Halle $\alpha'(0)(f)$.
- Escriba $\alpha'(0)$ en la base de vectores coordenados correspondiente a $(U, \phi)$.

---

**2.** Sea $M$ el conjunto de todas las circunferencias del plano $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $M$ admite una estructura de variedad de dimensión 3 con un atlas de una sola carta. Para la estructura diferencial encontrada, conteste a las siguientes preguntas:

(a) La aplicación $\pi : M \to \mathbb{R}^2$ que lleva una circunferencia a su centro es diferenciable.

(b) Sea $f : M \to \mathbb{R}$ la función que asigna a una circunferencia $C$ el valor del área del círculo con frontera $C$. Decida si $f$ es una función diferenciable.

(c) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to M$ la curva donde $\alpha(t)$ es la circunferencia con centro $(t, t^2)$ y radio $t$. Halle $\alpha'(t_0)(f)$.

(d) Si $C_0$ es la circunferencia unidad centrada en el origen, escriba la matriz de $d\pi_{C_0}$ en las bases de vectores coordenados de la carta global de $M$ y la carta usual en $\mathbb{R}^2$.

---

**3.** Sea $S$ el hiperboloide de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

- Demuestre que $\xi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to S$ dada por $\xi(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, \sinh v)$ es una parametrización de la estructura diferencial de $S$.
- Haga lo mismo para $\chi : \{(\bar{u}, \bar{v}) \,:\, \bar{u}^2 + \bar{v}^2 > 1\} \to S$, $\chi(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 1})$.
- Si $p = (0, \sqrt{2}, 1)$, halle la matriz de cambio de la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial \bar{u}}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial \bar{v}}\right|_p \right\}$ a la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p \right\}$, y viceversa.

---

**4.** Sea $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ una aplicación diferenciable. Supongamos que $\theta(0, p) = p$ para todo $p \in M$. Demuestre que

- para cada $p \in M$ la curva $c_p : \mathbb{R} \to M$ definida como $c_p(t) = \theta(t, p)$ es una curva suave;
- para cada $p \in M$, denotamos por $X_p$ al vector $c_p'(0)$. Demuestre que $X$ es un campo de vectores diferenciable en $M$.

**5.** Identificamos la matrices $2 \times 2$ con entradas reales con $\mathbb{R}^4$ (esto les da una estructura diferencial a partir de la estructura diferencial usual de $\mathbb{R}^4$). Sea $M$ el subconjunto formado por aquellas matrices de rango 1.

1. Demuestre que $M$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 3.
2. Si $C(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, definimos la aplicación

$$\theta : \mathbb{R} \times M \to M, \quad \theta(t, A) = C(t) \cdot A$$

   Compruebe que, efectivamente, $\theta(t, A) \in M$, y que $\theta$ es una aplicación suave. Por el problema 4, $\theta$ induce un campo de vectores $X$ en $M$. Halle la función $X(f)$, donde $f : M \to \mathbb{R}$ es la función que asigna a cada matriz $A$ su traza.

---

**6.** Sea $S$ el subconjunto de $\mathbb{R}^4$ definido como

$$S = \{ (x, y, z, t) \, : \, xy = zt = 1 \}$$

- Demuestre que $S$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^4$;
- Si $Z$ es el campo de vectores de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$Z = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - t\frac{\partial}{\partial t}$$

  demuestre que el campo $X = Z|_S$ es un campo de vectores suave en $S$.
- Si $\xi : (0, \infty) \times (0, \infty) \to S$ es la parametrización $\xi(u, v) = (u, \frac{1}{u}, v, \frac{1}{v})$, halle la expresión local de $X$ con respecto a los vectores coordenados $\dfrac{\partial}{\partial u}, \dfrac{\partial}{\partial v}$.
- Decida en qué puntos $p \in S$, la aplicación $F : S \to S$ definida como $F(x, y, z, t) = (x^2, y^2, z^2, t^2)$ es un difeomorfismo local.

---

**7.** Sea $\pi : S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la proyección $\pi(x, y, z) = [x, y, z]$. Si $X$ es un campo de vectores en $S^2$, identificamos de la forma usual los vectores $X_p$ con vectores $\widetilde{X}(p)$ en $\mathbb{R}^3$. Esto es, para cada $X_p \in T_pS^2$, el vector $di_p(X_p) \in T_p\mathbb{R}^3$, por lo que en la base de vectores coordenados canónicos de $\mathbb{R}^3$ se escribe con unas coordenadas $(a_1(p), a_2(p), a_3(p))$; $\widetilde{X}(p)$ es entonces $(a_1(p), a_2(p), a_3(p)) \in \mathbb{R}^3$.

1. Demuestre que existe un campo de vectores $Z$ en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con $d\pi_p(X_p) = Z_{\pi(p)}$ para todo $p \in S^2$ si y solamente si $\widetilde{X}(p) = -\widetilde{X}(-p)$.
2. Sea $a : S^2 \to S^2$ la aplicación antipodal $a(p) = -p$. Demuestre que $da_p(X_p) = X_{a(p)}$ sii $\widetilde{X}(p) = -\widetilde{X}(-p)$.
3. Supongamos que un grupo discreto $G$ actúa en $M$ y que $M/G$ es una variedad cociente. Conjeture bajo que condiciones un campo de vectores $X$ en la variedad $M$ induce un campo de vectores $Z$ en el cociente $M/G$ mediante la fórmula $Z_{\pi(p)} = d\pi_p(X_p)$.

---