Geometría III, Problemas 3

Primer semestre, 2010/11.

---

1. Demuestre que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, y si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces el grafo de f,

$$\Gamma_f = \{\, (x, f(x)) \,:\, x \in A \,\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

admite una estructura de variedad diferencial construyendo explícitamente un atlas.

---

2. Sean M y N variedades diferenciales de dimensiones m y n respectivamente. Supongamos que $f : M \to \mathbb{R}$, $g : N \to \mathbb{R}$ son funciones suaves. Demuestre que la función

$$h : M \times N \to \mathbb{R}, \qquad h(p, q) = f(p)g(q)$$

es suave.

---

3. Definimos X como el conjunto de las funciones $f(x, y) = \frac{ay}{bx+c}$, donde $a > 0$, $b^2 + c^2 \neq 0$. En X escogemos

- U es el subconjunto de funciones donde $b \neq 0$.
- V el de funciones donde $c \neq 0$.
- $\phi : U \to \mathbb{R}^2$, $\psi : V \to \mathbb{R}^2$ están definidas como $\phi(f(x, y)) = \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{b}\right)$, $\quad \psi(f(x, y)) = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$

Demuestre que X admite estructura de variedad diferencial (si es necesario en el punto adecuado del problema asuma que su topología es Hausdorff).

---

4. Sea X el conjunto de las rectas en el plano afín $\mathbb{R}^2$ (pasen o no pasen por el origen). En X introducimos parametrizaciones como sigue:

- $\xi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \to X$, $\xi(\theta, s)$ es la recta de ecuación $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y + s = 0$
- $\kappa : (0, \pi) \times \mathbb{R} \to X$, $\kappa(\bar{\theta}, \bar{s})$ es la recta de ecuación $(\cos\bar{\theta})x + (\sin\bar{\theta})y + \bar{s} = 0$

Demuestre que estas dos parametrizaciones inducen un atlas para alguna estructura diferencial en X.

---

5. Si $\mathcal{O}$ es el abierto de la variedad X del problema anterior definido como

$$\mathcal{O} = \left\{ \ell, \text{ rectas en el plano afín de ecuación } Ax + By + C = 0 \,:\, \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} > 1 \right\},$$

y si $F : \mathcal{O} \to S^1 \times (1, \infty)$ es la aplicación definida como

$$F(\ell) = \left(\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right), \mathrm{dist}(\ell, 0) \right)$$

donde $\mathrm{dist}(\ell, 0)$ es la distancia euclídea de la recta ℓ al origen de coordenadas,

- decida si F es diferenciable;
- decida si F es un difeomorfismo.

---

6. Sea M una variedad diferencial de dimensión n, $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Denotamos por $\mathbb{R}_2$ la variedad diferencial obtenida cuando consideramos en $\mathbb{R}$ el atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \phi(t) = t^3)\}$. Demuestre que la *aplicación (!!)* $F : M \to \mathbb{R}_2$ definida como $F(p) = (f(p))^{1/3}$ es diferenciable.

---

7. Sea C el cilindro en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

1. Demuestre que C es subvariedad de $\mathbb{R}^3$.
2. Compruebe si la aplicación $\xi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\xi(t, \theta) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$$
induce una parametrización de la estructura diferencial de C.
3. Haga lo mismo para $\kappa : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \to C$, $\kappa(\bar{t}, \bar{\theta}) = (\cos\bar{\theta}, \sin\bar{\theta}, \bar{t})$.
4. Demuestre que las dos cartas construidas anteriormente (que denotaremos (U, ϕ), (V, ψ) respectivamente), dan un atlas diferencial de C.
5. Si $f : C \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, escriba la expresión local de f en la carta (U, ϕ). Decida si f es diferenciable en los puntos de U.

---

8. En S^2 tenemos la estructura diferencial inducida por el atlas $\mathcal{A}$ de las cartas estereográficas. Demuestre que esa estructura diferencial coincide con la que recibe como subvariedad de $\mathbb{R}^3$.
