

INTRODUCCIÓN A LAS VARIEDADES DIFERENCIABLES

Antonio Díaz Miranda

Índice general

1. Notación y complementos de cálculo	5
1.1. Notación	5
1.2. Funciones analíticas y funciones meseta	9
1.3. Inmersiones, submersiones y difeomorfismos	12
1.4. Variaciones sobre el teorema de la función inversa	17
1.5. Subvariedades de \mathbb{R}^n	20
1.6. Ejercicios complementarios	23
2. Variedades diferenciables	27
2.1. Atlas de un conjunto	27
2.2. Variedades diferenciables	29
2.3. Topología de variedad	34
2.4. Subvariedades de \mathbb{R}^n	39
2.5. Aplicaciones diferenciables	40
2.6. Difeomorfismos	49
2.7. Variedad producto	53
2.8. Particiones de la unidad	54
2.9. Ejercicios complementarios	58
3. Espacio tangente a una variedad	63
3.1. Introducción	63
3.2. Vectores tangentes	64
3.2.1. Cambio de sistema de coordenadas	70
3.3. Diferencial de una función en un punto	71
3.4. Aplicación tangente	72
3.5. Caso de las subvariedades de \mathbb{R}^n	75
3.6. Algunos teoremas	80
3.7. Aplicación tangente y curvas	84
3.8. Espacio tangente de una variedad producto	90
3.9. Ejercicios complementarios	93

4. Campos de vectores	97
4.1. Fibrado tangente	97
4.2. Concepto	98
4.3. Curvas integrales de campos de vectores	110
4.4. Flujo y corchete de Lie	124
4.5. Ejercicios complementarios	138
5. Teorema de Frobenius	143
5.1. Subvariedades	143
5.1.1. Espacio tangente a una subvariedad.	156
5.2. Sistemas diferenciales.	158
5.3. Teorema de Frobenius local.	161
5.4. Teorema de Frobenius global.	166
5.5. Ejercicios complementarios	169

Capítulo 1

Notación y complementos de cálculo

1.1. Notación

Un punto genérico de \mathbb{R}^n será designado en este capítulo por $x = (x^1, \dots, x^n)$. Se denota por $r^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $r^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$, $i = 1, \dots, n$. Si $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$, $\{r^1, \dots, r^n\}$ es la base dual de la $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Sea U un abierto de \mathbb{R}^m y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación. Se designa por f^i la aplicación compuesta $r^i \circ f$, de forma que, si $x \in U$, $f(x) = (r^1(f(x)), \dots, r^n(f(x))) = (f^1(x), \dots, f^n(x))$; por este motivo se suele escribir $f = (f^1, \dots, f^n)$. Si (y^1, \dots, y^n) denota un punto genérico de la imagen de f se tiene

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m) \\ \vdots \\ y^n = f^n(x^1, \dots, x^m) \end{cases} \quad (1.1)$$

y se dice que 1.1 son las ecuaciones de f . Por ejemplo, la aplicación de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^2 que consiste en multiplicar por la izquierda por la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

viene dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y^1 &= 2x^1 - x^2 + 4x^3 \\ y^2 &= x^1 + 3x^2 - 2x^3. \end{aligned}$$

Si L es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales y u es un elemento del espacio vectorial origen, se designa por $L \cdot u$ a la imagen de u por L .

Se dice que f es **derivable** en $x_0 \in U$ si existe una aplicación lineal de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n , $Df(x_0)$, tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - (f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0))\|}{\|x - x_0\|} = 0 \quad (1.2)$$

donde $\|\cdot\|$ representa la norma euclídea de \mathbb{R}^h para todo h . Aquí es útil recordar que todas las normas de un espacio vectorial real de dimensión finita son equivalentes.

Si existe $Df(x_0)$, queda definida de manera única por 1.2 y se llama **derivada** de f en x_0 .

Se puede demostrar que, si f es derivable en x_0 , todas las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \partial_j f^i(x_0) &= \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f^i(x_0^1, \dots, x_0^{j-1}, x_0^j + \Delta, x_0^{j+1}, \dots, x_0^n) - f^i(x_0^1, \dots, x_0^{j-1}, x_0^j, x_0^{j+1}, \dots, x_0^n)}{\Delta} \end{aligned}$$

existen, y se tiene

$$Df(x_0) \cdot \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^m \end{pmatrix} = J_{x_0} f \cdot \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^m \end{pmatrix}, \text{ para todo } \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

donde $J_{x_0} f$ es la matriz jacobiana de f en x_0 ,

$$J_{x_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(x_0) \end{pmatrix}$$

El recíproco no es cierto, pero, si existen las derivadas parciales en un entorno de x_0 y son continuas en x_0 , entonces f es derivable en x_0 .

Sea U' un abierto contenido en U . Se dice que f es derivable en U' si lo es en todo punto de U' . Si tal cosa ocurre se llama derivada de f en U' a la aplicación $Df : U' \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ representa al conjunto de las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n , que hace corresponder a cada $u \in U'$ la derivada de f en u .

Sea M el espacio vectorial real formado por las matrices reales $n \times m$. La aplicación de M en $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ que a cada matriz

$$\begin{pmatrix} a_1^1, & \dots, & a_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n, & \dots, & a_m^n \end{pmatrix}$$

hace corresponder $(a_1^1, \dots, a_m^1, \dots, a_1^n, \dots, a_m^n)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales. La composición de este isomorfismo con el que resulta de hacer corresponder a cada elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ su matriz en la base canónica, nos proporciona un isomorfismo de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ sobre $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. Si identificamos estos espacios vectoriales mediante él, Df puede ser considerada como una aplicación de U' en $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. Diremos que Df es continua o que es diferenciable en un punto de U' si lo es como aplicación en $\mathbb{R}^{m \cdot n}$.

Con esta identificación se puede escribir

$$Df = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f^1}{\partial x^m}, \dots, \frac{\partial f^n}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \right)$$

Diremos que f es de clase C^1 en U si es derivable en U y su derivada es continua. Vemos que f es de clase C^1 sii sus derivadas parciales existen y son continuas.

Si Df existe y es derivable en U , su derivada se llama derivada segunda de f y se designa por D^2f . De manera similar se definen, si existen, las derivadas de orden superior. La derivada p -ésima, $D^p f$, tiene por funciones componentes las derivadas parciales de orden p de las funciones componentes de f .

Se dice que f es de clase C^p en U si existen sus derivadas sucesivas hasta el orden p y son continuas. La función f es de clase C^p si existen y son continuas en U las derivadas parciales de orden p de cada componente de f .

Se dice que f es de clase C^∞ si es de clase C^p para todo p .

Sea f de clase C^r , $r \geq 1$, en U y $h : V \rightarrow \mathbb{R}^p$, donde V es un abierto de \mathbb{R}^n que contiene a $f(U)$, de clase C^r en V . Entonces $h \circ f$ es de clase C^r en U y se tiene (regla de la cadena)

$$D(h \circ f)(u) = Dh(f(u)) \circ Df(u)$$

para todo $u \in U$. En realidad la regla de la cadena dice algo más: dice que si f es derivable en u y h lo es en $f(u)$, entonces se tiene la relación anterior aunque las derivadas no sean continuas.

Obsérvese que las ecuaciones de $h \circ f$ son

$$\begin{cases} y^1 = h^1(f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m)) \\ \vdots \\ y^p = h^p(f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m)) \end{cases} \quad (1.3)$$

y la regla de la cadena nos dice que

$$J_u(h \circ f) = J_{f(u)}h \cdot J_u f$$

es decir

$$\frac{\partial(h \circ f)^i}{\partial x^k}(u) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h^i}{\partial x^j}(f^1(u), \dots, f^n(u)) \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(u).$$

Sean A, B^1, \dots, B^k conjuntos y $g^i : A \rightarrow B^i$, $i = 1, \dots, k$, aplicaciones. Designaremos por (g^1, \dots, g^k) a la aplicación de A en $B^1 \times \dots \times B^k$ definida por $(g^1, \dots, g^k)(a) = (g^1(a), \dots, g^k(a))$, para todo $a \in A$. Se dice que g^i es la función componente i -ésima de (g^1, \dots, g^k) .

Sea g una aplicación de U en \mathbb{R}^s , V un abierto de \mathbb{R}^{n+s} que contiene a $(f, g)(U)$ y $h : V \rightarrow \mathbb{R}^q$. Si (f, g) y h son de clase C^p , $p \geq 1$, entonces $h \circ (f, g)$ es de clase C^p y se tiene (regla de derivación parcial)

$$D(h \circ (f, g))(u) = D(h(\cdot, g(u)))(f(u)) \circ Df(u) + D(h(f(u), \cdot))(g(u)) \circ Dg(u)$$

donde $h(\cdot, g(u))$ es una aplicación de un entorno de $f(u) \in \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^q dada por $h(\cdot, g(u))(v) = h(v, g(u))$ y $h(f(u), \cdot)$ es una aplicación de un entorno de $g(u) \in \mathbb{R}^s$ en \mathbb{R}^q dada por $h(f(u), \cdot)(t) = h(f(u), t)$.

En las condiciones anteriores, las ecuaciones de $h \circ (f, g)$ son

$$\begin{cases} y^1 = h^1(f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m), g^1(x^1, \dots, x^m), \dots, g^p(x^1, \dots, x^m)) \\ \vdots \\ y^q = h^q(f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m), g^1(x^1, \dots, x^m), \dots, g^p(x^1, \dots, x^m)) \end{cases}$$

las de $h(\cdot, g(u))$ son

$$\begin{cases} y^1 = h^1(x^1, \dots, x^n, g^1(u), \dots, g^p(u)) \\ \vdots \\ y^q = h^q(x^1, \dots, x^n, g^1(u), \dots, g^p(u)) \end{cases}$$

y las de $h(f(u), \cdot)$ son

$$\begin{cases} y^1 = h^1(f^1(u), \dots, f^n(u), x^{n+1}, \dots, x^{n+p}) \\ \vdots \\ y^q = h^q(f^1(u), \dots, f^n(u), x^{n+1}, \dots, x^{n+p}) \end{cases}$$

La regla de derivación parcial dice que

$$J_u(h \circ (f, g)) = J_{f(u)}(h(\cdot, g(u))) \cdot J_u f + J_{g(u)}(h(f(u), \cdot)) \cdot J_u g$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h \circ (f, g))^i}{\partial x^j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial h^i}{\partial x^k}(f^1(u), \dots, g^p(u)) \frac{\partial f^k}{\partial x^j} + \\ &\quad \sum_{r=1}^p \frac{\partial h^i}{\partial x^{n+r}}(f^1(u), \dots, g^p(u)) \frac{\partial g^r}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Vemos aquí que la fórmula puede obtenerse como consecuencia de la regla de la cadena.

Si $A^1, \dots, A^k, B^1, \dots, B^k$ son conjuntos y $g^j : A^j \rightarrow B^j$ aplicaciones, $j = 1, \dots, k$, denotaremos por $g^1 \times \dots \times g^k$ la aplicación definida por

$$g^1 \times \dots \times g^k : (a^1, \dots, a^k) \in A^1 \times \dots \times A^k \rightarrow (g^1(a^1), \dots, g^k(a^k)) \in B^1 \times \dots \times B^k.$$

1.2. Funciones analíticas y funciones meseta

Otra familia importante de funciones es la constituida por las analíticas: si U es un abierto de \mathbb{R}^m , la aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f^1, \dots, f^n)$ se dice **analítica** en $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m) \in U$ si existen series de potencias P^1, \dots, P^n tales que $f^j(x^1, \dots, x^m) = P^j(x^1 - x_0^1, \dots, x^m - x_0^m)$ para todo (x^1, \dots, x^m) en un entorno abierto de x_0 . Se dice que f es analítica en un abierto, U' , de U si lo es en cada uno de sus puntos.

Si f es analítica en U' , es C^∞ en él, pero el recíproco está lejos de ser verdad, pese al teorema de Taylor: si una función es C^∞ en un entorno de un punto, se puede construir su serie de Taylor alrededor de ese punto, pero ésta no tiene por qué converger a la función.

Si f es analítica en U' , nula en un abierto contenido en U' y U' es un abierto conexo, entonces f es nula en U' . En cambio existen funciones C^∞ en \mathbb{R}^n , no nulas, que se anulan en abiertos. Un ejemplo son las funciones meseta, que describimos a continuación.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. Se designan por B_a y B_b las bolas abiertas de centro 0 y radios a y b respectivamente en \mathbb{R}^n , $n \geq 1$.

Teorema 1.2.1 *Existe una función con valores en $[0, 1]$ y C^∞ en \mathbb{R}^n que vale 1 en $\overline{B_a}$ y 0 en el complementario de B_b .*

Para demostrarlo usaremos el lema siguiente

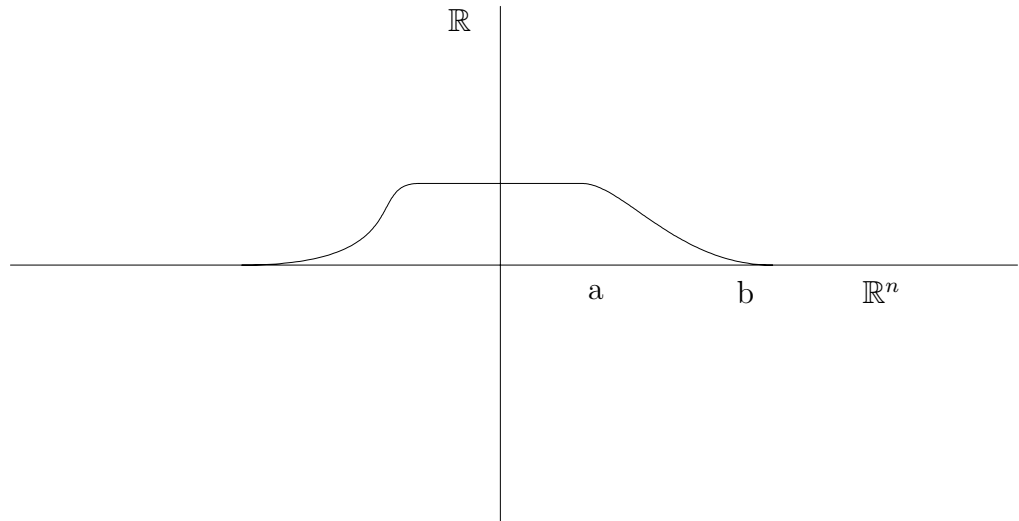


Figura 1.1: Función meseta

Lema 1.2.2 *La función*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es C^∞ .

Demostración. Veamos por inducción que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ P_n \left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

donde P_n es un polinomio.

Se cumple para $n=0$. Admitámoslo para n . Se tiene obviamente

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P_{n+1} \left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

para algún polinomio P_{n+1} .

En $x = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} &= 0\end{aligned}$$

luego $f^{(n+1)}(0)$ existe y es 0, de forma que $f^{(n+1)}(x)$ tiene la forma indicada.

□

Demostración de 1.2.1. La función $f(x-a) + f(b-x)$ no se anula nunca, coincide con $f(x-a)$ para $x > b$ y con $f(b-x)$ para $x < a$, por lo que

$$g(x) = \frac{f(b-x)}{f(x-a) + f(b-x)}$$

es una función con valores en $[0, 1]$, vale 1 para $x < a$ y 0 para $x > b$.

Si definimos

$$F : (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow g\left(\sqrt{x^{1^2} + \dots + x^{n^2}}\right) \in \mathbb{R}$$

obtenemos una función con valores en $[0, 1]$, que es obviamente C^∞ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Pero F vale 1 en B_a , por lo que sus derivadas parciales en B_a , existen y son continuas. En particular existen y son continuas en 0.

De manera similar, si consideramos los hipercubos de aristas $2a$ y $2b$:

$$P_a = \{x \in \mathbb{R}^n : -a < x^i < a, i = 1, \dots, n\}$$

y

$$P_b = \{x \in \mathbb{R}^n : -b < x^i < b, i = 1, \dots, n\},$$

tenemos el siguiente teorema

Teorema 1.2.3 *Existe una función con valores en $[0, 1]$ y C^∞ en \mathbb{R}^n que vale 1 en \overline{P}_a y 0 fuera de P_b .*

Demostración. La función $L(x^1, \dots, x^n) = g(|x^1|) \dots g(|x^n|)$ cumple lo pedido.

□

1.3. Inmersiones, submersiones y difeomorfismos

Definición 1.3.1 Sea U un abierto de \mathbb{R}^m y f una aplicación de U en \mathbb{R}^n de clase C^p , $p \geq 1$. Dado $x \in U$ se dice que f es una **inmersión** C^p en x si su derivada en x es inyectiva. Se dice que f es una **inmersión** C^p si lo es en cada punto de U .

Puesto que la derivada de f es una aplicación lineal de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n , si f es una inmersión en algún punto, ha de ser $m \leq n$.

Ejemplo 1.3.2 Sea $m \leq n$. La aplicación

$$j(m, n) : (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

viene dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} y^1 = x^1 \\ \vdots \\ y^m = x^m \\ y^{m+1} = 0 \\ \vdots \\ y^n = 0 \end{cases}$$

luego es C^∞ y su matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} I_{m \times m} \\ O_{(n-m) \times m} \end{pmatrix}$$

donde $I_{m \times m}$ es la matriz unidad $m \times m$ y $O_{(n-m) \times m}$ es la matriz nula $(n-m) \times m$. Esta matriz tiene un menor maximal no nulo, luego la aplicación lineal asociada, que es la derivada de $j(m, n)$, es inyectiva. Vemos así que $j(m, n)$ es una inmersión C^∞ , que se llama **inmersión canónica** de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.3.3 Veamos en qué puntos es inmersión C^∞ la aplicación

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x^2 + y^2, x^2y + y^2, x^2 - y^2) \in \mathbb{R}^3.$$

La matriz jacobiana de f es

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy & x^2 + 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

y los puntos en que no es inmersión vendrán dados por las soluciones del sistema dado por la anulación de los tres menores de orden 2:

$$\begin{aligned}x^3 + 2xy - 2xy^2 &= 0 \\xy &= 0 \\x^3 + 2xy + 2xy^2 &= 0.\end{aligned}$$

Este sistema es equivalente al

$$\begin{aligned}x^3 &= 0 \\xy &= 0\end{aligned}$$

de forma que las soluciones son los puntos dados por $x = 0$. Vemos así que f es inmersión en el complementario del eje y .

Definición 1.3.4 Sea U un abierto de \mathbb{R}^m y f una aplicación de U en \mathbb{R}^n de clase C^p , $p \geq 1$. Dado $x \in U$ se dice que f es una **submersión** C^p en x si su derivada en x es suprayectiva. Se dice que f es una submersión C^p si lo es en cada punto de U .

Si f es submersión en algún punto ha de ser $m \geq n$.

Ejemplo 1.3.5 Sea $m \geq n$. Definimos

$$\pi : (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Esta aplicación viene dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned}y^1 &= x^1 \\&\vdots \\y^n &= x^n,\end{aligned}$$

donde se ve que es C^∞ y que su jacobiano viene dado por

$$(I_{n \times n} \quad O_{n \times (m-n)})$$

que tiene un menor de orden maximal, el correspondiente a $I_{n \times n}$, no nulo.

Vemos entonces que la derivada de π en todo punto es suprayectiva, por lo que π es una submersión C^∞ , que se llama **proyección canónica** de \mathbb{R}^m sobre las n primeras componentes.

Ejemplo 1.3.6 Nos proponemos averiguar en qué puntos es submersión la aplicación

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (xyz, x + y + z) \in \mathbb{R}^2.$$

La jacobiana es

$$\begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que solo dejará de ser submersión en las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} yz - xz &= 0 \\ yz - xy &= 0 \\ xz - xy &= 0 \end{aligned}$$

que puede escribirse

$$\begin{aligned} (y - x)z &= 0 \\ (z - x)y &= 0 \\ (z - y)x &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones con $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ vienen dadas por $x = y = z \neq 0$, las que cumplen $x = 0$ también cumplen $y = 0$ ó $z = 0$, con lo que obtenemos los ejes y y z y de manera similar vemos que las restantes soluciones son los puntos del eje x . Así pues, f es submersión salvo en los ejes coordenados y en la recta $x = y = z$.

Definición 1.3.7 Sea U un abierto de \mathbb{R}^m y f una aplicación de U en \mathbb{R}^m de clase C^p , $p \geq 1$. Se dice que f es un **difeomorfismo C^p sobre su imagen**, o **difeomorfismo C^p de U sobre $f(U)$** , si $f(U)$ es abierto, f es inyectiva y $f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ es de clase C^p .

Supongamos que f es difeomorfismo C^p sobre su imagen, $p \geq 1$. Entonces, dado x en U , la relación $f^{-1} \circ f = Id_U$ y la regla de la cadena implican $Df^{-1}(f(x)) \circ Df(x) = Id_{\mathbb{R}^m}$, ya que la derivada de Id_U en x es $Id_{\mathbb{R}^m}$, luego $Df(x)$ es un automorfismo de \mathbb{R}^m , siendo su inversa $Df^{-1}(f(x))$.

Cuando existe un difeomorfismo como el de la definición anterior, se dice que U es difeomorfa a $f(U)$ (en clase C^p).

Ejemplo 1.3.8 La aplicación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n dada por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}$$

es un difeomorfismo sobre su imagen, que es la bola abierta de centro 0 y radio 1, $B(0, 1)$.

La inversa se calcula escribiendo

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}},$$

de donde se obtiene $x = y\sqrt{1 + \|x\|^2}$, que implica

$$\|x\| = \|y\| \sqrt{1 + \|x\|^2} \text{ y } x = \|x\| \frac{y}{\|y\|},$$

De la primera de estas ecuaciones se deduce

$$\|x\| = \frac{\|y\|}{\sqrt{1 - \|y\|^2}},$$

y entonces la segunda proporciona

$$x = \frac{y}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}.$$

Vemos así que **la bola $B(0, 1)$ es difeomorfa a \mathbb{R}^n** . Ver el ejercicio 1.6.13.

Ejemplo 1.3.9 Sea σ una permutación del conjunto $\{1, \dots, m\}$ y consideremos la aplicación

$$\Phi_\sigma : (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow (x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(m)}) \in \mathbb{R}^m$$

que viene dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y^1 &= x^{\sigma(1)} \\ &\vdots \\ y^n &= x^{\sigma(n)}, \end{aligned}$$

donde se ve que es C^∞ . Si σ^{-1} es la permutación inversa de σ , $\Phi_{\sigma^{-1}}$ es la aplicación inversa de Φ_σ y por la misma razón es C^∞ , luego Φ_σ es un difeomorfismo C^∞ sobre su imagen, que es todo \mathbb{R}^m .

Los difeomorfismos C^p sobre su imagen que son biyecciones de \mathbb{R}^m sobre \mathbb{R}^m , se llaman simplemente difeomorfismos C^p de \mathbb{R}^m .

Las aplicaciones Φ_σ se llaman **cambios de numeración del sistema de coordenadas**.

Ejemplo 1.3.10 Consideremos la aplicación que se usa habitualmente para definir las coordenadas polares:

$$p : (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \longrightarrow (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta).$$

La imagen de p es el complementario en \mathbb{R}^2 de la semirecta cerrada $x \leq 0, y = 0$. Las ecuaciones de p son:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \tag{1.4}$$

lo que muestra en particular que p es C^∞ .

La aplicación p es inyectiva. Vamos a ver que es un difeomorfismo sobre su imagen.

Su inversa viene dada por

$$p^{-1}(x, y) = \begin{cases} (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arc} \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) & \text{si } (x, y) \in \{y > 0\} \\ (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arc}' \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) & \text{si } (x, y) \in \{y < 0\} \\ (x, 0) & \text{si } (x, y) \in \{y = 0, x > 0\} \end{cases}$$

donde $\operatorname{Arc} \cos$ es la determinación de arco coseno con valores en $(0, \pi)$ y $\operatorname{Arc}' \cos$ la que toma valores en $(-\pi, 0)$.

Vemos en la expresión anterior que p^{-1} es C^∞ en el abierto $y \neq 0$. Para ver que también es C^∞ en los puntos de $\{y = 0, x > 0\}$, basta observar que su restricción a $x > 0$ coincide con

$$(x, y) \in \{x > 0\} \longrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arc} \operatorname{sen} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}),$$

donde $\operatorname{Arc} \operatorname{sen}$ es la determinación de arco seno con valores en $(-\pi/2, \pi/2)$.

Queda así demostrado que p es un difeomorfismo.

Ejemplo 1.3.11 La aplicación p del ejemplo anterior puede ser extendida a

$$\bar{p} : (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta).$$

cuyas ecuaciones siguen siendo 1.4.

La aplicación \bar{p} no es un difeomorfismo porque no es inyectiva, al ser $\bar{p}(\rho, \theta + 2\pi) = \bar{p}(\rho, \theta)$. Sin embargo, conserva una propiedad común con los difeomorfismos: su derivada es un isomorfismo. En efecto, el determinante de su jacobiana en un punto genérico (ρ, θ) es $\rho \neq 0$.

El teorema que es objeto de la sección siguiente, afirma que, en estas circunstancias, existe un entorno de cada punto tal que la restricción de \bar{p} a

1.4. VARIACIONES SOBRE EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA 17

él es un difeomorfismo sobre su imagen. En nuestro caso particular esto se puede comprobar directamente observando que, dado $(\rho_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ la restricción de \bar{p} a $\mathbb{R}^+ \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$, p_0 , es una biyección C^∞ sobre \mathbb{R}^2 privado de la semirecta cerrada

$$r_0 = \{\lambda(x_0, y_0) : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \leq 0\}$$

donde

$$\begin{aligned} x_0 &= \rho_0 \cos \theta_0 \\ y_0 &= \rho_0 \operatorname{sen} \theta_0. \end{aligned}$$

Evidentemente

$$r_0 = \{(x, y) : -y_0x + x_0y = 0, x_0x + y_0y \leq 0\}$$

Para ver que la inversa de la restricción p_0 es C^∞ , se puede proceder como sigue. Se trata de ver que de las ecuaciones 1.4, con las condiciones $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - r_0$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $-\pi < \theta - \theta_0 < \pi$, podemos obtener ρ y θ en función de x e y de manera C^∞ . Podemos escribir $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta_0 \cos(\theta - \theta_0) - \rho \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen}(\theta - \theta_0) = \frac{\rho}{\rho_0} (x_0 \cos(\theta - \theta_0) - y_0 \operatorname{sen}(\theta - \theta_0)) \\ y &= \rho \operatorname{sen} \theta_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho \cos \theta_0 \operatorname{sen}(\theta - \theta_0) = \frac{\rho}{\rho_0} (y_0 \cos(\theta - \theta_0) + x_0 \operatorname{sen}(\theta - \theta_0)) \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta_0) \\ \operatorname{sen}(\theta - \theta_0) \end{pmatrix} = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ -y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\rho_0 x}{\rho} \\ \frac{\rho_0 y}{\rho} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho_0 \rho} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ -y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que implica

$$\theta = \begin{cases} \theta_0 + \operatorname{Arc} \cos \frac{x_0 x + y_0 y}{\rho_0 \sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } -y_0 x + x_0 y > 0 \\ \theta_0 + \operatorname{Arc}' \cos \frac{x_0 x + y_0 y}{\rho_0 \sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } -y_0 x + x_0 y < 0 \\ \theta_0 + \operatorname{Arc} \operatorname{sen} \frac{-y_0 x + x_0 y}{\rho_0 \sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } x_0 x + y_0 y > 0. \end{cases}$$

1.4. Variaciones sobre el teorema de la función inversa

Teorema 1.4.1 (de la función inversa o de inversión local) *Sea U un abierto de \mathbb{R}^n y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^p , $p \geq 1$. Si, dado x en U , $Df(x)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, existe un entorno abierto, U' , de x en U tal que la restricción de f a U' es un difeomorfismo C^p sobre su imagen.*

Un ejemplo es dado en 1.3.11. En ese caso el teorema de la función inversa dice, solo con observar que la derivada en todo punto es isomorfismo, que existe un entorno de cada punto tal que la restricción de la aplicación a él es un difeomorfismo sobre su imagen, pero no dice cómo calcularlo.

Definición 1.4.2 *Sea U un abierto de \mathbb{R}^n y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que f es un **difeomorfismo local C^p** si, para todo $x \in U$, existe un entorno abierto de x en U tal que la restricción de f a él es un difeomorfismo C^p sobre su imagen.*

No es difícil demostrar con lo ya visto las dos siguientes proposiciones

Proposición 1.4.3 *Sea U un abierto de \mathbb{R}^n y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^p , $p \geq 1$. Entonces f es un difeomorfismo local si su derivada en todo punto es un isomorfismo.*

Proposición 1.4.4 *Un difeomorfismo local C^p inyectivo es difeomorfismo C^p sobre su imagen.*

El siguiente teorema se puede demostrar como consecuencia del teorema de inversión local, y proporciona modelos locales válidos para toda inmersión. En su enunciado identificamos, si $n > m$, \mathbb{R}^n con $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, mediante la biyección

$$J : (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow ((x^1, \dots, x^m), (x^{m+1}, \dots, x^n)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$$

de forma que consideraremos que $x \in \mathbb{R}^n$ y $J(x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ representan lo mismo. Designaremos por π y π' a las proyecciones canónicas de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ sobre el primer y segundo factores respectivamente.

Teorema 1.4.5 (de inmersión) *Sea $n > m$, U un abierto de \mathbb{R}^m y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión C^p , $p \geq 1$, en $x_0 \in U$. Entonces existe un entorno abierto, U' , de x_0 en U , un entorno abierto, V , de $f(x_0)$ en \mathbb{R}^n y un difeomorfismo sobre su imagen, $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, tales que $f(U') \subset V$ y las restricciones a U' de $\Phi \circ f$ y de $j(m, n)$ coinciden. Además U' , V y Φ pueden ser elegidos de forma que se tenga*

$$\Phi(f(U')) = j(m, n)(U') = U' \times \{0\} = \Phi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Obsérvese que el enunciado del teorema se traduce en la existencia de U' , V y Φ tales que el diagrama indicado en la figura 1.2 es conmutativo en U' .

A continuación vemos un modelo local válido para cada submersión: toda submersión de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m coincide localmente, salvo un difeomorfismo, con la proyección sobre las m primeras componentes.

1.4. VARIACIONES SOBRE EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA 19

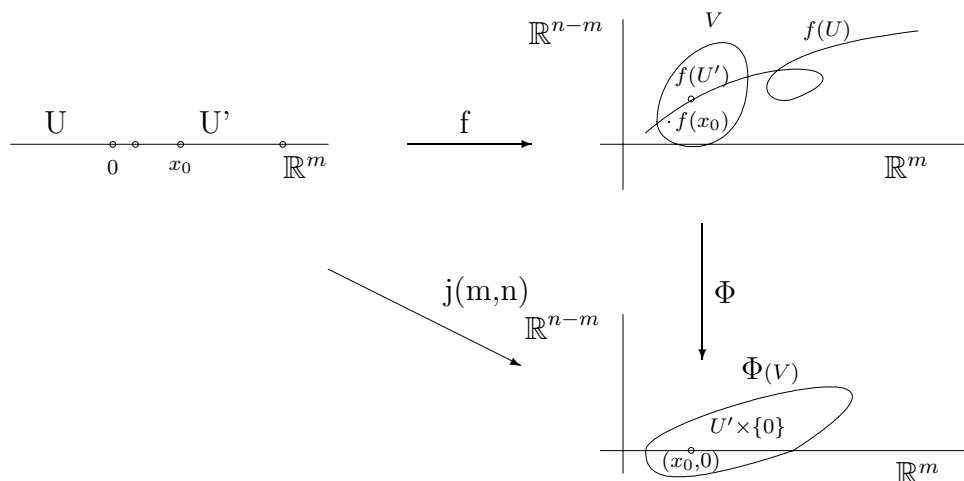


Figura 1.2: Inmersión

Teorema 1.4.6 (de submersión) Sea $n > m$, U un abierto de \mathbb{R}^n y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una submersión C^p , $p \geq 1$, en $x_0 \in U$. Entonces existe un entorno abierto, U' , de x_0 en U y un difeomorfismo C^p , Φ , de U' sobre su imagen, tales que la restricción de f a U' coincide con $\pi \circ \Phi$.

El teorema afirma la existencia de U' y Φ tales que el diagrama indicado en la figura 1.3 es conmutativo en U' .

Damos por último un enunciado de fácil manejo del teorema de la función implícita.

Teorema 1.4.7 (de la función implícita) Sea $n > m$, U un abierto de \mathbb{R}^n identificado con $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^p , $p \geq 1$. Dado $(a, b) \in U$ supongamos que $f(a, b) = 0$ y que la matriz $m \times m$ cuyos elementos son $\partial_j f^i(a, b)$, $i, j = 1, \dots, m$ es no singular. Entonces existen entornos V de a en \mathbb{R}^m y W de b en \mathbb{R}^{n-m} con la propiedad de que, para todo $w \in W$ existe un único $v \in V$ tal que $f(v, w) = 0$ y la aplicación $w \in W \rightarrow v \in V$ es C^p .

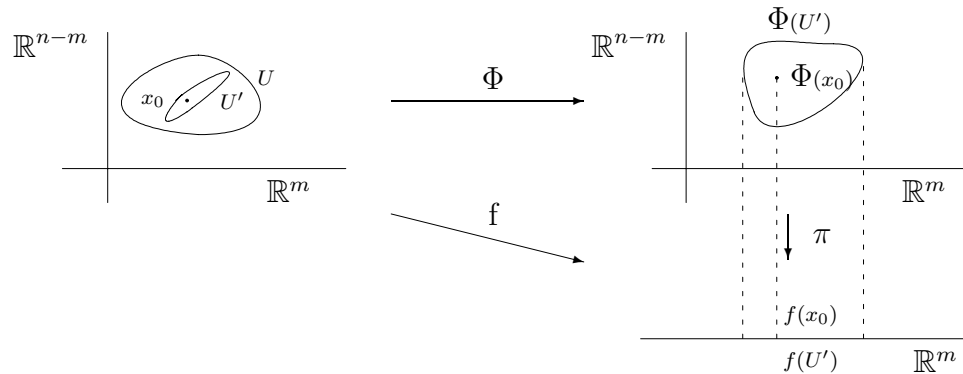


Figura 1.3: Submersión

1.5. Subvariedades de \mathbb{R}^n .

En esta sección recordamos algunas cosas vistas en Cálculo de 2º curso, que también fueron utilizadas en Geometría II.

Definición 1.5.1 Un subconjunto, S , de \mathbb{R}^n se dice **subvariedad C^p de dimensión d** de \mathbb{R}^n si, para todo $p \in S$, existe un entorno abierto de p , A , y un difeomorfismo C^p de A sobre su imagen, ψ , tal que

$$\psi(A \cap S) = \psi(A) \cap \left(\mathbb{R}^d \times \left\{ (0, \dots, 0) \right\} \right).$$

Ejemplo 1.5.2 Si $f^i(r^1, \dots, r^n)$, $i = 1, \dots, h$ son funciones C^∞ en un abierto, A , de \mathbb{R}^n , el gráfico de la función $f = (f^1, \dots, f^h)$ es subvariedad C^∞ de dimensión n de \mathbb{R}^{n+h} . En efecto, para todo punto del gráfico consideramos el difeomorfismo de $A \times \mathbb{R}^h$ sobre $A \times \mathbb{R}^h$

$$\begin{aligned} r'^1 &= r^1 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ r'^n &= r^n \\ r'^{n+1} &= r^{n+1} - f^1(r^1, \dots, r^n) \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ r'^{n+h} &= r^{n+h} - f^h(r^1, \dots, r^n) \end{aligned}$$

y se ve que la imagen del gráfico es el conjunto de puntos cuyas h últimas componentes son 0, *i.e.*, si designamos por Γ el gráfico y por φ el difeomorfismo se tiene

$$\varphi((A \times \mathbb{R}^h) \cap \Gamma) = \varphi(A \times \mathbb{R}^h) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Ejemplo 1.5.3 La esfera S^2 es una subvariedad de \mathbb{R}^3 . La semiesfera superior es el gráfico de $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, así que en cada uno de sus puntos se puede tomar un difeomorfismo como el construido en 1.5.2. En cada una de las semiesferas determinadas por los planos coordenados se puede hacer una construcción similar. Por ejemplo, para cada punto de la semiesfera “oeste”, $y < 0$, se puede tomar el difeomorfismo del conjunto dado por $x^2 + z^2 < 1$ sobre sí mismo definido mediante

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= z \\ z' &= y + \sqrt{1 - x^2 - z^2}. \end{aligned}$$

También se obtienen subvariedades como antiimágenes de puntos por submersiones ya que, como consecuencia inmediata del teorema de submersión, se tiene

Teorema 1.5.4 Sea $n > m$ y A un abierto de \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^p . Si, dado $(a^1, \dots, a^m) \in f(A)$, f es una submersión en todo punto de $f^{-1}(a^1, \dots, a^m)$, entonces $f^{-1}(a^1, \dots, a^m)$ es subvariedad C^p de dimensión $n - m$ de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.5.5 La esfera S^n es subvariedad C^∞ de \mathbb{R}^{n+1} porque es la antiimagen de 1 por $f(r^1, \dots, r^n) = (r^1)^2 + \dots + (r^n)^2$, y esta función es una submersión en cada punto de S^n .

Ejercicio 1.5.6 Demostrar que el conjunto dado por $x^5 + y^2 + z^4 + t^3 = 1$, donde (x, y, z, t) es el sistema canónico de coordenadas de \mathbb{R}^4 , es una subvariedad C^∞ de dimensión 3 de \mathbb{R}^4 .

Otra forma de ver que algo es subvariedad es mediante parametrizaciones

Definición 1.5.7 Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n y $x \in S$. Se llama (p, d) -parametrización de S en x a todo par (U, g) , formado por un abierto, U , de \mathbb{R}^d y una inmersión C^p , $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$, tales que $g(U)$ sea entorno abierto de x en S (S dotado de la topología relativa) y g sea homeomorfismo de U sobre $g(U)$ ($g(U)$ dotado de la topología relativa).

A lo largo de la asignatura Geometría II se han estado manejando parametrizaciones de subvariedades de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 : superficies.

Proposición 1.5.8 *Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n . S es subvariedad C^p de dimensión d de \mathbb{R}^n , $p \geq 1$, sii para todo $x \in S$ existe una (p, d) -parametrización de S en x .*

Esta proposición nos permite decidir que son subvariedades las imágenes de las inmersiones que sean parametrización de su imagen:

Corolario 1.5.9 *Sea U un abierto de \mathbb{R}^d y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión C^p que sea homeomorfismo sobre su imagen dotada de la topología relativa, entonces $f(U)$ es subvariedad C^p de dimensión d de \mathbb{R}^n .*

Ejemplo 1.5.10 Se considera la aplicación $f : (x, y, z) \rightarrow (xy + z, x + y + z, y, y + z)$. Su matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} y & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego f es inmersión en todo punto.

Para ver si es inyectiva y homeomorfismo planteamos el sistema de ecuaciones

$$u = xy + z \tag{1.5}$$

$$v = x + y + z \tag{1.6}$$

$$t = y \tag{1.7}$$

$$r = y + z. \tag{1.8}$$

De las tres últimas ecuaciones obtenemos

$$x = v - r \tag{1.9}$$

$$y = t \tag{1.10}$$

$$z = r - t \tag{1.11}$$

lo que quiere decir que f es inyectiva y que su inversa coincide con la restricción a la imagen $f(\mathbb{R}^3)$ de

$$g(u, v, t, r) = (v - r, t, r - t).$$

Dado que g es continua como aplicación de \mathbb{R}^4 en \mathbb{R}^3 , su restricción a la imagen de f , que es f^{-1} , es continua cuando en la imagen se considera la topología relativa.

Deducimos del corolario anterior que $f(\mathbb{R}^3)$ es subvariedad C^∞ de dimensión 3 de \mathbb{R}^4 .

Las siguientes proposiciones son importantes

Proposición 1.5.11 *Sea S una subvariedad C^p de dimensión d de \mathbb{R}^n y $(U, g), (U', g')$ dos (p, d) -parametrizaciones de S tales que $g(U) \cap g'(U') \neq \emptyset$. Entonces $g^{-1} \circ g'$ es un difeomorfismo C^p de $g'^{-1}(g(U) \cap g'(U'))$ sobre su imagen.*

Proposición 1.5.12 *Si S es una subvariedad C^p de dimensión d de \mathbb{R}^n , U un abierto de \mathbb{R}^d y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión C^p inyectiva tal que $f(U) \subset S$, entonces (U, f) es una (p, d) -parametrización de S .*

Sea S una subvariedad C^p de dimensión d de \mathbb{R}^n , A un abierto de \mathbb{R}^n y ψ un difeomorfismo C^p de A sobre su imagen, tales que $\psi(A \cap S) = \psi(A) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Entonces $\psi(A) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ es de la forma $V \times \{0\}$, con V abierto de \mathbb{R}^d , y entonces la aplicación

$$\psi^{-1} \circ j(d, n)|_V : (r^1, \dots, r^d) \in V \longrightarrow \psi^{-1}(r^1, \dots, r^d, 0, \dots, 0) \in \psi(A \cap S)$$

define una parametrización de S .

La inversa de $\psi^{-1} \circ j(d, n)|_V$ es $\pi \circ \psi|_{A \cap S}$, donde π es la proyección canónica de \mathbb{R}^n sobre las d primeras componentes.

Estas aplicaciones tienen un papel importante en este curso. Para manejarlas es útil observar que, si $\psi = (y^1, \dots, y^n)$, entonces

$$\pi \circ \psi|_{A \cap S} = (y^1|_{A \cap S}, \dots, y^d|_{A \cap S}).$$

Es a veces útil para la intuición pensar en la aplicación $\pi \circ \psi|_{A \cap S}$ como si fuese simplemente $\psi|_{A \cap S}$, considerada como una aplicación en \mathbb{R}^d simplemente “olvidando” los últimos $n - d$ ceros de cada imagen.

1.6. Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.6.1 Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, xy)$. Se pide

- Encontrar el mayor abierto de \mathbb{R}^3 en el que f sea submersión.
- Determinar $f(\mathbb{R}^3)$.
- Describir $f^{-1}\{(K, C)\}$ para cada $(K, C) \in f(\mathbb{R}^3)$. Decir cuales de estos conjuntos son subvariedades de \mathbb{R}^3 .

Ejercicio 1.6.2 Se considera la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g(x, y) = (x^2 + y^2, xy, x^2 - y^2)$. Se pide

- Encontrar el mayor abierto de \mathbb{R}^2 en que g sea inmersión.
- Determinar $g(\mathbb{R}^2)$.
- Determinar $g^{-1}\{(A, B, C)\}$ para cada $(A, B, C) \in g(\mathbb{R}^2)$.
- Determinar un abierto U , de \mathbb{R}^2 tal que $g|_U$ sea inmersión inyectiva y que no esté contenido estrictamente en otro abierto que tenga la misma propiedad.

Ejercicio 1.6.3 Sea $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(x, y) = (x^2y, xy^2)$. Se pide

- Determinar el mayor abierto, U , para el que $h|_U$ es difeomorfismo sobre su imagen.
- Sean U_1, \dots, U_n las componentes conexas de U . Determinar $h(U_i)$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Ejercicio 1.6.4 Dada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mediante $f(x, y) = (x + y, xy)$, se pide

- Determinar $f(\mathbb{R}^2)$.
- Determinar un abierto conexo, U , de \mathbb{R}^2 tal que $f|_U$ sea difeomorfismo sobre su imagen y no esté contenido en otro abierto que tenga la misma propiedad.

Ejercicio 1.6.5 Si $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ viene dada por $g(x, y) = (e^x + e^y, e^x + e^{-y})$, se pide

- Determinar $g(\mathbb{R}^2)$.
- Mostrar que g es un difeomorfismo sobre su imagen.
- Determinar la matriz jacobiana de g^{-1} en $(2, 2)$.

Ejercicio 1.6.6 Decir cuales de los siguientes subconjuntos son subvariedades C^p , $p > 0$, de dimensión d de \mathbb{R}^n , para algún n , indicando p y d en los casos favorables.

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^5 + y^3 - z^2 + 2xyz = 1\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, -x + y - 2z = 0\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, -x + y - 2z = -2\}$.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$.
- $\{(\cos t, \sin t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$.
- $\left\{\left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\right) : t \in \mathbb{R}^+\right\}$.

7. $\left\{ \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.
8. $\{(3e^{-t} \cos t, 3e^{-t} \operatorname{sen} t) : t \in \mathbb{R}\}$.
9. $\{(u \cos t, u \operatorname{sen} t, t) : t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^+\}$.
10. $\{(t, t^2) : t \leq 0\} \cup \{(t, -t^2) : t \geq 0\}$.

Ejercicio 1.6.7 Sea P una subvariedad C^∞ de dimensión p de \mathbb{R}^n y Q una subvariedad C^∞ de dimensión q de \mathbb{R}^m . Se identifica $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con \mathbb{R}^{n+m} de la manera canónica. Demostrar que $P \times Q$ es subvariedad C^∞ de dimensión $p + q$ de \mathbb{R}^{n+m} .

Ejercicio 1.6.8 Se considera un plano, P , de \mathbb{R}^3 tal que $S^2 \cap P \neq \emptyset$. Demuéstrese que $P \cap S^2$ es subvariedad C^∞ de dimensión 1 de \mathbb{R}^3 sii P no es tangente a S^2 .

Ejercicio 1.6.9 Generalizar el resultado anterior demostrando que, si f es una función C^k definida sobre \mathbb{R}^3 tal que $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ si $f(x) = 0$ y P es un plano de \mathbb{R}^3 , el subconjunto $\{x \in P : f(x) = 0\}$ es una subvariedad C^k de dimensión 1 de \mathbb{R}^3 si P no es tangente a $\{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0\}$.

Ejercicio 1.6.10 Sea f la aplicación de $(\mathbb{R}^+)^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u > 0, v > 0, w > 0\}$ en \mathbb{R}^4 , dada por $f(u, v, w) = (uv, uv, vw, u+v+w)$. Se designa por S la imagen de f . Se pide

- a) Demostrar que S es subvariedad C^∞ de dimensión 3 de \mathbb{R}^4 y que $((\mathbb{R}^+)^3, f)$ es una parametrización de S .
- b) Demostrar que $((\mathbb{R}^+)^3, q)$ es otra parametrización de S , donde q viene dada por $q(u', v', w') = (u'^3 v'^3, u'^2 v' w', u' v'^2 w', u'^2 v' + w' + u' v'^2)$.
- c) Determinar $f^{-1} \circ q$.

Ejercicio 1.6.11 Se considera la aplicación, C , de $(0, \pi) \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^2 , dada por $C(t) = (\operatorname{sen} t \cos t, \operatorname{sen}^2 t \cos t)$. Demostrar que C es inmersión inyectiva, pero su imagen no es subvariedad de \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 1.6.12 Sea f la aplicación de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 definida por $f(\varphi, \theta) = (\cos \theta(2 + \cos \varphi), \operatorname{sen} \theta(2 + \cos \varphi), \operatorname{sen} \varphi)$. Se pide

- a) Demostrar que f es inmersión.
- b) Demostrar que $f(\mathbb{R}^2)$ es subvariedad C^∞ de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 . (Indicación: demuéstrese que $f(\mathbb{R}^2)$ está constituido por los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $(x^2 + y^2 + z^2 - 5)^2 = 16(1 - z^2)$).
- c) Encontrar para cada $(\varphi_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$ un entorno abierto, V , tal que $(V, f|_V)$ sea parametrización de $f(\mathbb{R}^2)$.

Ejercicio 1.6.13 Demostrar que todas las bolas abiertas y todos los hipercubos de \mathbb{R}^n son difeomorfos a \mathbb{R}^n .

Ejercicio 1.6.14 Demostrar que la aplicación de la bola abierta de radio 1 y centro 0 de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|^2}$$

es suprayectiva y un difeomorfismo sobre su imagen.

Capítulo 2

Variedades diferenciables

2.1. Atlas de un conjunto

Definición 2.1.1 Sea M un conjunto. Se llama **carta local n-dimensional de M** a todo par (U, φ) donde U es una parte de M y φ es una biyección de U sobre un abierto de \mathbb{R}^n .

En las condiciones anteriores se suelen designar por x^i , $i = 1, \dots, n$ las funciones componentes de φ , i.e. $x^i = r^i \circ \varphi$, $i = 1, \dots, n$. Se dice que $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ es el **sistema de coordenadas** de M y U el **dominio de coordenadas**, correspondientes a la carta. A veces se confunde, por abuso de lenguaje, la propia carta con el sistema de coordenadas.

Si el dominio es todo M , se dice que la carta es global y define un **sistema global de coordenadas**.

Ejemplo 2.1.2 Si M es una superficie y (V, ψ) es una parametrización de M , $(\psi(V), \psi^{-1})$ es una carta local 2-dimensional de M , que se llamará inversa de la parametrización. El sistema de coordenadas correspondiente se designa frecuentemente en este caso por (u, v) .

Ejemplo 2.1.3 Se considera la circunferencia unidad del plano complejo $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$. Si $U = \mathbb{S}^1 - \{1\}$ y se define $\varphi(e^{i\theta}) = \theta$ para todo $\theta \in (0, 2\pi)$, (U, φ) es una carta local 1-dimensional. Lo mismo ocurre con (V, ψ) si $V = \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ y $\psi(e^{i\theta}) = \theta$ para todo $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Otra carta local 1-dimensional de \mathbb{S}^1 es el par formado por el conjunto, A , de los elementos con parte imaginaria positiva y la aplicación, ρ , que a cada uno de esos números complejos hace corresponder su parte real.

En cambio no es carta local el par $(\mathbb{S}^1, \bar{\varphi})$, donde $\bar{\varphi}(e^{i\theta}) = \theta$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, ya que la imagen no es abierta.

Ejemplo 2.1.4 Sea $M_{m \times n}$ el conjunto de las matrices reales $m \times n$. La aplicación

$$L : \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \longrightarrow (a_1^1, \dots, a_n^1, \dots, a_1^m, \dots, a_n^m)$$

es un sistema global de coordenadas mn -dimensional de $M_{m \times n}$.

Definición 2.1.5 Dos cartas (U, φ) y (V, ψ) se dicen **compatibles** C^p si $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son abiertos y $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo C^p del primero sobre el segundo.

En la definición anterior se admite la posibilidad de que $U \cap V$ sea vacío. En caso contrario, los difeomorfismos $\psi \circ \varphi^{-1}$ se llaman **cambios de coordenadas**. Ver la figura 2.1.

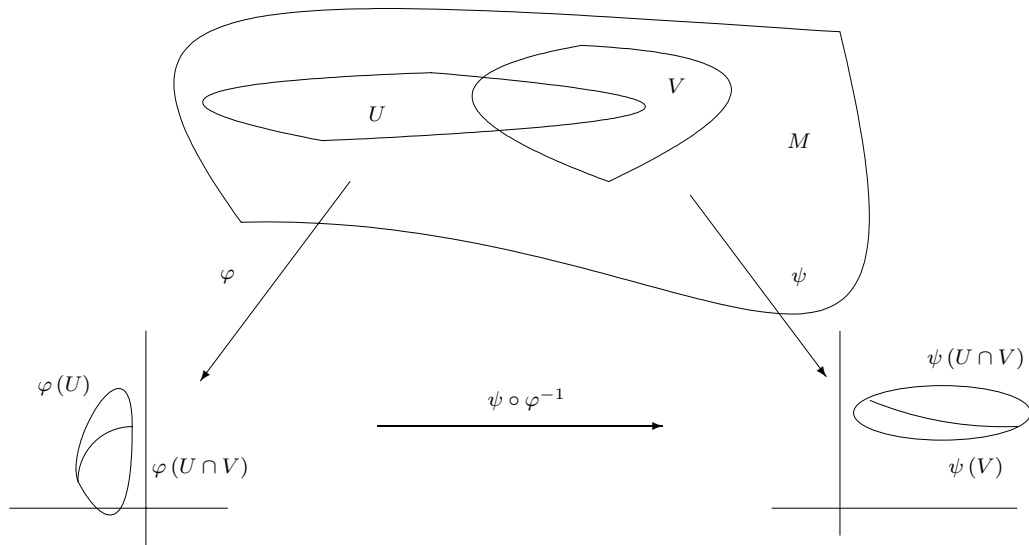


Figura 2.1: Cambio de coordenadas

Definición 2.1.6 Se llama **atlas n -dimensional** de clase C^p de M a toda familia de cartas locales n -dimensionales de M , $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$, tales que:

1. Los U_α forman un recubrimiento de M .
2. Las cartas son compatibles C^p dos a dos.

Cuando hablemos de atlas a secas, nos referiremos a atlas C^∞ . Esta es la clase de atlas que consideraremos casi exclusivamente durante este curso.

Ejemplo 2.1.7 Una carta global define por si sola un atlas.

Ejemplo 2.1.8 En el caso de 2.1.3, las cartas componen un atlas de \mathbb{S}^1 . En efecto, $\{U, V, A\}$ es un recubrimiento de \mathbb{S}^1 , y

1. $U \cap V = \{z \in \mathbb{S}^1 : \text{Im } z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{S}^1 : \text{Im } z < 0\}$, $\varphi(U \cap V) = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, $\psi(U \cap V) = (0, \pi) \cup (-\pi, 0)$,

$$\varphi \circ \psi^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } \theta \in (0, \pi) \\ \theta + 2\pi & \text{si } \theta \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

$$\psi \circ \varphi^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } \theta \in (0, \pi) \\ \theta - 2\pi & \text{si } \theta \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

2. $U \cap A = A$, $\rho(U \cap A) = (-1, 1)$, $\varphi(U \cap A) = (0, \pi)$, $\rho \circ \varphi^{-1}(\theta) = \cos \theta$, $\varphi \circ \rho^{-1}(x) = \arccos x$, donde \arccos es la determinación de arco coseno con valores en $(0, \pi)$.
3. $V \cap A = A$, $\rho(V \cap A) = (-1, 1)$, $\psi(U \cap A) = (0, \pi)$, $\rho \circ \psi^{-1}(\theta) = \cos \theta$, $\psi \circ \rho^{-1}(x) = \arccos x$.

2.2. Variedades diferenciables

Definición 2.2.1 Dos atlas en M se dicen **equivalentes** si su unión es un atlas.

Obsérvese que para comprobar que dos atlas son equivalentes, basta ver que toda carta del primero es compatible con toda carta del segundo.

Ejemplo 2.2.2 Otras dos cartas locales de \mathbb{S}^1 son (B, β) y (C, γ) donde $B = \{z \in \mathbb{S}^1 : \text{Re } z > 0\}$, $\beta(z) = \text{Im } z$, y $C = \{z \in \mathbb{S}^1 : \text{Re } z < 0\}$, $\gamma(z) = \text{Im } z$. Tanto $\{(U, \varphi), (B, \beta)\}$ como $\{(V, \psi), (C, \gamma)\}$ son atlas de \mathbb{S}^1 . Es un ejercicio comprobar que son equivalentes.

Lema 2.2.3 La definición anterior establece una relación de equivalencia en la familia de los atlas de M .

Demostración. Evidentemente cada atlas es equivalente a sí mismo y, si un atlas, \mathcal{A} , es equivalente a otro, \mathcal{A}' , entonces \mathcal{A}' es equivalente a \mathcal{A} .

Vamos a demostrar que se cumple la propiedad transitiva. Supongamos que \mathcal{A} , \mathcal{A}' , y \mathcal{A}'' son atlas tales que el primero es equivalente al segundo y el segundo equivalente al tercero. Tenemos que probar que el primero es equivalente al tercero y, para ello, basta ver que si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(V, \psi) \in \mathcal{A}''$, (U, φ) es compatible con (V, ψ) . De hecho, es suficiente demostrar que $\varphi(U \cap V)$ es abierto y $\psi \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ , ya que, entonces, intercambiando los papeles de \mathcal{A} y \mathcal{A}'' , se deduce que $\psi(U \cap V)$ es abierto y $\varphi \circ \psi^{-1}$ es C^∞ .

Dado $p \in \varphi(U \cap V)$, consideremos $(T, \eta) \in \mathcal{A}'$ tal que $\varphi^{-1}(p) \in T$. Vemos que $\eta(U \cap T \cap V)$ es abierto por ser la intersección de $\eta(U \cap T)$ con $\eta(T \cap V)$, que lo son. Entonces $\varphi(U \cap T \cap V)$ es abierto por ser la imagen de $\eta(U \cap T \cap V)$ por el homeomorfismo $\varphi \circ \eta^{-1}$, contiene a p y está contenido en $\varphi(U \cap V)$. Esto muestra que este último conjunto contiene un entorno de cada uno de sus puntos y es, por tanto, abierto.

Ahora, basta demostrar que $\psi \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ en un entorno de p , pero, con la notación de antes podemos escribir

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap T \cap V)} &= \psi|_{U \cap T \cap V} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap T \cap V)} = \\ &= \psi|_{U \cap T \cap V} \circ \eta^{-1}|_{\eta(U \cap T \cap V)} \circ \eta|_{U \cap T \cap V} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap T \cap V)} = \\ &= (\psi \circ \eta^{-1})|_{\eta(U \cap T \cap V)} \circ (\eta \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap T \cap V)} \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\psi \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ en $\varphi(U \cap T \cap V)$.

Definición 2.2.4 Cada una de las clases de equivalencia para esta relación recibe el nombre de **estructura diferenciable de M** . Si los atlas que la componen son de dimensión n , se dice que la estructura diferenciable es de dimensión n .

Ejercicio 2.2.5 Dada una estructura diferenciable de M , se considera en ella la relación de orden dada por la inclusión. Demostrar que no existen dos elementos maximales diferentes.

Ejercicio 2.2.6 Dado un atlas n -dimensional, $\mathcal{L} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$, demostrar que la familia formada por las cartas locales n -dimensionales, (U, φ) , tales que $\mathcal{L} \cup \{(U, \varphi)\}$ es un atlas, es un elemento maximal de la estructura diferenciable que representa \mathcal{L} .

De los ejercicios 2.2.5 y 2.2.6 se deduce que cada estructura diferenciable tiene un único representante maximal para la inclusión. El segundo de ellos

dice como construirlo a partir de un representante cualquiera. Tales atlas se llaman **máximos** o **completos**. Existe por tanto una correspondencia biunívoca entre estructuras diferenciables y atlas completos.

Ejemplo 2.2.7 Se define la *carta canónica* de \mathbb{R}^n como el par $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$. Es un sistema global de coordenadas y la estructura diferenciable que define se llama *estructura diferenciable canónica de \mathbb{R}^n* .

El atlas máximo correspondiente está formado por las cartas locales (U, φ) tales que junto a la carta canónica forman un atlas. Vemos así que el atlas máximo está formado por las cartas locales (U, φ) tales que U es un abierto y φ un difeomorfismo de U sobre su imagen.

Ejemplo 2.2.8 Un sistema global de coordenadas de \mathbb{R} es la función x^3 . La estructura diferenciable que define no es la canónica, porque x^3 no es un difeomorfismo: su inversa es la función $x^{1/3}$ que no es diferenciable en 0. Encontramos así al menos dos estructuras diferenciables diferentes en \mathbb{R} .

Ejemplo 2.2.9 Llamaremos *Figura de Ocho*, y será designado por \mathcal{K} , al conjunto imagen de la aplicación $\Phi : s \in \mathbb{R} \longrightarrow (\sin 2s, \sin s) \in \mathbb{R}^2$. La restricciones de Φ a $(0, 2\pi)$ y $(-\pi, \pi)$, son biyecciones sobre \mathcal{K} , cuyas inversas designaremos por \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente. Ambas son sistemas globales de coordenadas, con lo que cada una de ellas da lugar a un atlas, pero las estructuras diferenciables que definen son diferentes.

Para verlo, basta considerar el conjunto formado por las dos cartas y demostrar que no es un atlas, observando que los cambios de coordenadas no son diferenciables. En efecto, si escribimos $\omega = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1}(\theta)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$, $\omega \in (0, 2\pi)$ ha de ser $\mathbf{y}^{-1}(\theta) = \mathbf{x}^{-1}(\omega)$ es decir, $\sin \theta = \sin \omega$ y $\sin 2\theta = \sin 2\omega$ o, lo que es lo mismo, $\sin \theta = \sin \omega$ y $\sin \theta \cos \theta = \sin \omega \cos \omega$. Ha de ser pues $\sin \theta = \sin \omega = 0$ ó $\sin \theta = \sin \omega$ y $\cos \theta = \cos \omega$. La primera de estas condiciones equivale a $\theta = 0$ y $\omega = \pi$ y la segunda a $\omega = \theta + 2K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$. En este último caso, tiene que ser $\omega = \theta$, si $\theta \in (0, \pi)$ y $\omega = \theta + 2\pi$, si $\theta \in (-\pi, 0)$. Vemos que la correspondencia $\theta \longrightarrow \omega$ viene dada por

$$\omega = \begin{cases} \theta + 2\pi & \text{si } -\pi < \theta < 0 \\ \pi & \text{si } \theta = 0 \\ \theta & \text{si } 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

por lo que no es ni siquiera continua.

Definición 2.2.10 Se llamará **variedad diferenciable de dimensión n** a todo conjunto M en el que se haya fijado una estructura diferenciable de dimensión n .

Sea M una variedad diferenciable. Cuando hablemos de cartas de M sin explicitar a continuación una estructura diferenciable, nos referiremos sólo a las cartas del atlas máximo de la estructura diferenciable elegida. Por dominio coordinado o sistema de coordenadas de M entenderemos el dominio o el sistema de coordenadas correspondiente a una de estas cartas.

Si $m \in M$, con *carta en m* nos referiremos a una carta de M cuyo dominio contenga a m , tal dominio se llamará *entorno coordinado de m* y del sistema de coordenadas correspondiente se dirá que es un *sistema de coordenadas en m* .

Ejemplo 2.2.11 Sea $P^2(\mathbb{R})$ el conjunto formado por las rectas de \mathbb{R}^3 que pasan por el origen.

Observese que $P^2(\mathbb{R})$ es biyectivo con la unión de la semiesfera abierta $\{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}$ con $\{(x, y, 0) \in S^2 : y > 0\}$ y con $\{(1, 0, 0)\}$

Designemos por P_1 el subconjunto de $P^2(\mathbb{R})$ formado por las rectas que no están contenidas en el plano $x = 0$. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, designaremos por $[x, y, z]$ al elemento de $P^2(\mathbb{R})$ que lo contiene, de forma que P_1 se compone de los $[x, y, z]$ con $x \neq 0$. Dado $[x, y, z] \in P_1$, se tiene $[x, y, z] = [1, y/x, z/x]$, y definimos $\varphi_1 : P_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante $\varphi_1([x, y, z]) = (y/x, z/x)$. Se tiene $\varphi_1^{-1}(x^1, x^2) = [1, x^1, x^2]$.

De la misma forma, se definen P_2 (respectivamente P_3) como el conjunto formado por las $[x, y, z]$ tales que $y \neq 0$ (resp. $z \neq 0$) y las aplicaciones biyectivas $\varphi_2 : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\varphi_3 : P_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $\varphi_2([x, y, z]) = (x/y, z/y)$ y $\varphi_3([x, y, z]) = (x/z, y/z)$. Se tiene $\varphi_2^{-1}(x^1, x^2) = [x^1, 1, x^2]$ y $\varphi_3^{-1}(x^1, x^2) = [x^1, x^2, 1]$.

Las (P_i, φ_i) son cartas locales. Veamos cómo son los cambios de coordenadas.

El conjunto $P_1 \cap P_2$ está formado por los $[x, y, z]$ tales que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, $\varphi_1(P_1 \cap P_2)$ y $\varphi_2(P_1 \cap P_2)$ por los $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que $a \neq 0$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x^1, x^2) = (1/x^1, x^2/x^1)$.

De manera similar se encuentran los otros cambios de coordenadas y entonces se comprueba que las cartas citadas componen un atlas y por tanto definen una estructura diferenciable. Cuando $P^2(\mathbb{R})$ está dotado de esta estructura diferenciable, la variedad resultante se llama **plano proyectivo**.

Ejercicio 2.2.12 Se designa por $P^n(\mathbb{R})$ el conjunto de las rectas de \mathbb{R}^{n+1} que pasan por el origen. Para cada $(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, $[x^1, \dots, x^{n+1}]$ denota la recta que lo contiene. Se define $P_i = \{[x^1, \dots, x^{n+1}] \in P^n(\mathbb{R}) : x^i \neq 0\}$ y φ_i mediante

$$\varphi_i([x^1, \dots, x^{n+1}]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right).$$

Mostrar que $\{(P_i, \varphi_i) : i \in \{1, \dots, n+1\}\}$ es un atlas.

Dotado de la estructura diferenciable que contiene a ese atlas, $P^n(\mathbb{R})$ se llama **espacio proyectivo real**. Los sistemas de coordenadas que hemos definido se llaman homogéneos.

Ejemplo 2.2.13 Se considera en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x \\ \frac{dy}{dt} &= y \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sea \mathcal{M} el conjunto de las trayectorias (imágenes de soluciones) maximales (para la inclusión) de 2.1. Las soluciones son $x(t) = x(0)e^{-t}$, $y(t) = y(0)e^t$, por lo que cada trayectoria es una rama de una hipérbola o una semirecta enteramente contenida en uno de los semiespacios $\{x > 0\}$, $\{x < 0\}$, $\{y > 0\}$ o $\{y < 0\}$. Designaremos por X^+ , X^- , Y^+ e Y^- a los subconjuntos de \mathcal{M} formados por las trayectorias contenidas en los semiespacios respectivos. Si definimos, con abusos de lenguaje obvios, las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \mu^+ : t \in X^+ &\longrightarrow y(t \cap \{x = 1\}) \in \mathbb{R} \\ \mu^- : t \in X^- &\longrightarrow y(t \cap \{x = -1\}) \in \mathbb{R} \\ \eta^+ : t \in Y^+ &\longrightarrow x(t \cap \{y = 1\}) \in \mathbb{R} \\ \eta^- : t \in Y^- &\longrightarrow x(t \cap \{y = -1\}) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

obtenemos cuatro cartas locales.

Se tiene $X^+ \cap X^- = \emptyset$, $Y^+ \cap Y^- = \emptyset$. $X^+ \cap Y^+$ está constituido por las ramas de hipérbola $xy = cte$ contenidas en el primer cuadrante. Las otras intersecciones no vacías de dominios coordinados, son también familias formadas por las ramas de hipérbola contenidas en un cuadrante. Las imágenes por los sistemas de coordenadas de estas intersecciones son \mathbb{R}^+ o \mathbb{R}^- .

Para calcular el cambio de coordenadas $\eta^+ \circ (\mu^+)^{-1}$ escribimos $\eta^+ \circ (\mu^+)^{-1}(s) = r$ y vemos que $(\mu^+)^{-1}(s) = (\eta^+)^{-1}(r)$ ha de ser la rama en el primer cuadrante de la hipérbola $xy = cte$ con $cte = 1 \cdot s = r \cdot 1$ luego $r = s$, *i.e.* el cambio de coordenadas es la identidad.

Si escribimos $\eta^- \circ (\mu^+)^{-1}(s) = r$ la rama de hipérbola $(\mu^+)^{-1}(s) = (\eta^-)^{-1}(r)$ corresponde a la constante $1 \cdot s = r \cdot (-1)$, así que $r = -s$. Los demás cambios de coordenadas calculan de manera similar, viendo así que las cartas dadas componen un atlas y definen por tanto una estructura diferenciable en \mathcal{M} .

2.3. Topología de variedad

En lo sucesivo si no se dice nada en contra M designará una variedad diferenciable de dimensión n .

Teorema 2.3.1 *Sea (U, φ) una carta de M y $A \subset U$ tal que $\varphi(A)$ es abierto. Entonces $(A, \varphi|_A)$ es carta de M .*

Demostración. Para ver que pertenece al atlas máximo basta ver que si (V, ψ) es otra carta de M , entonces $\varphi(A \cap V)$ y $\psi(A \cap V)$ son abiertos y $\varphi|_A \circ \psi^{-1}$ es difeomorfismo sobre su imagen. Pero $\varphi(A \cap V) = \varphi(A \cap V \cap U) = \varphi(A) \cap \varphi(U \cap V)$, de donde se deduce que es abierto. Por otra parte $\psi(A \cap V)$ es abierto por ser la imagen recíproca de $\varphi(A \cap V)$ por la aplicación continua $\varphi \circ \psi^{-1}$. La aplicación $\varphi|_A \circ \psi^{-1}$ es difeomorfismo por ser la restricción de $\varphi \circ \psi^{-1}$ al abierto $\psi(A \cap V)$.

□

Corolario 2.3.2 *La intersección de dos dominios coordenados es un dominio coordenado.*

Teorema 2.3.3 *Existe una única topología en M para la que todo dominio coordenado es abierto y todo sistema de coordenadas es homeomorfismo sobre su imagen.*

Demostración. Existencia. El conjunto formado por los dominios coordenados, \mathcal{B} , es base de una topología. En efecto, recordemos que para que \mathcal{B} sea base de una topología ha de cumplir:

1. Es un recubrimiento de M .
2. Dados $C, D \in \mathcal{B}$ y $x \in C \cap D$, existe $E \in \mathcal{B}$ tal que $x \in E \subset C \cap D$.

La primera se cumple por la definición de atlas y la segunda es consecuencia de 2.3.2.

Consideremos a M dotado de la topología, \mathcal{T} , definida por \mathcal{B} i.e. los abiertos son el vacío y las uniones de elementos de \mathcal{B} .

Para esta topología todo dominio coordenado es abierto. Veamos que los sistemas de coordenadas son homeomorfismos sobre su imagen.

Como consecuencia de 2.3.1, todo sistema de coordenadas es continuo. Veamos que aplica abiertos en abiertos, lo que demostrará que es homeomorfismo sobre su imagen.

Si (U, φ) es una carta, y A es abierto de M contenido en U , sea $A = \cup_{i \in I} U_i$, donde los U_i , $i \in I$, son dominios coordenados. Se tiene

$$\varphi(A) = \varphi\left(\cup_{i \in I} U_i\right) = \cup_{i \in I} \varphi(U_i) = \cup_{i \in I} \varphi(U_i \cap U),$$

que es una unión de abiertos.

Unicidad.-Sea \mathcal{T}' otra topología que cumpla la condición. \mathcal{T}' contiene a \mathcal{B} , luego contiene a \mathcal{T} .

Veamos que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Si $P \in \mathcal{T}'$, sea $\{(U_a, \varphi_a) : a \in I\}$ un atlas. Los U_a son abiertos de \mathcal{T}' , luego cada $P \cap U_a$ pertenece a \mathcal{T}' y, por ser los φ_a homeomorfismos sobre su imagen para \mathcal{T}' , resulta que $\varphi_a(P \cap U_a)$ es abierto. Pero entonces 2.3.1 asegura que $P \cap U_a$ pertenece a \mathcal{B} , luego

$$P = \cup_{a \in I} P \cap U_a \in \mathcal{T}.$$

□

En lo sucesivo, salvo aviso en contra, cuando hablemos de una variedad, supondremos que está dotada de la topología cuya existencia asegura el teorema anterior, que se llamará **topología de variedad**.

Corolario 2.3.4 *Si (U, φ) es una carta y A un abierto, $(A \cap U, \varphi_{A \cap U})$ es una carta.*

Demostración. El subconjunto $A \cap U$ es abierto y φ un homeomorfismo, con lo que el resultado se deduce de 2.3.1.

□

Proposición 2.3.5 *Si una topología en una variedad es tal que existe un atlas con la propiedad de que todos los sistemas de coordenadas son homeomorfismos sobre su imagen, esa topología es la de variedad.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ un atlas que tiene esa propiedad y (U, φ) una carta del atlas máximo. Basta ver que U es abierto y φ homeomorfismo sobre su imagen para la topología dada, para que la unicidad en 2.3.3 implique el resultado.

Para cada $\alpha \in I$, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$ es abierto por la compatibilidad de las cartas, luego $U_\alpha \cap U$ es abierto al ser su antiimagen por φ_α , que es continua. Entonces $U = \cup_{\alpha \in I} U \cap U_\alpha$ es abierto.

Por otra parte, para cada $\alpha \in I$, $\varphi|_{U_\alpha \cap U} = (\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U})$ es homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos. Esto implica que φ es homeomorfismo por ser biyección y recubrir los $U \cap U_\alpha$ a U .

□

Se recuerda que un espacio topológico es T_1 cuando todo conjunto formado por un solo punto es cerrado *i.e.* sii para cada par de puntos arbitrarios, existe un entorno de cada uno que no contiene al otro.

Teorema 2.3.6 *Toda variedad es T_1 .*

Demostración. Dado p en la variedad, vamos a ver que el complementario de $\{p\}$ es abierto. Si q es uno de sus puntos, tomemos una carta, (U, φ) , en él. Hay dos alternativas:

1. El dominio U contiene p .
2. El dominio U no contiene p .

En el primer caso, existe una bola abierta de centro $\varphi(q)$, B , contenida en $\varphi(U)$, que no contiene a $\varphi(p)$ y entonces $\varphi^{-1}(B)$ es un entorno de q contenido en el complementario de p .

En el segundo caso, U es un entorno de q contenido en el complementario de p .

□

Un espacio topológico se dice T_2 o separado Hausdorff, si todo par de puntos diferentes admiten entornos disjuntos. Evidentemente, si un espacio es T_2 , es T_1 . El siguiente ejemplo muestra que el recíproco no es cierto: una variedad que no es T_2 .

Ejemplo 2.3.7 Volvamos al ejemplo 2.2.13. Para la topología de variedad, \mathcal{M} no es separada Hausdorff. En efecto, $(\mu^+)^{-1}(0) = \{(x, 0) : x > 0\} \in X^+$ y $(\eta^+)^{-1}(0) = \{(0, y) : y > 0\} \in Y^+$. Vamos a demostrar que, si A y B son entornos en \mathcal{M} de $\{(x, 0) : x > 0\}$ y $\{(0, y) : y > 0\}$ respectivamente, no son disjuntos.

El conjunto $\mu^+(X^+ \cap A)$ es un entorno de 0, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mu^+(X^+ \cap A)$, de forma que $(\mu^+)^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset A$. Igualmente, existe $\delta > 0$ tal que $(\eta^+)^{-1}((-\delta, \delta)) \subset B$. Sea $\rho = \min\{\varepsilon, \delta\}$. La rama que está en el primer cuadrante de la hipérbola $xy = \rho/2$ pertenece tanto a A como a B .

Obsérvese que la antiimagen por un sistema de coordenadas de una bola cerrada, por ejemplo $(\mu^+)^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$, que tiene que ser compacto y cerrado en el dominio coordinado, por ser imagen de un compacto y cerrado por un homeomorfismo, no es cerrado en el espacio total: $\{(0, y) : y > 0\}$ y $\{(0, y) : y < 0\}$ están en la adherencia y no pertenecen a la antiimagen.

Recordemos que un espacio topológico es localmente compacto si todo punto admite un entorno con clausura compacta.

Lema 2.3.8 *Toda variedad separada Hausdorff es un espacio topológico localmente compacto.*

Demostración. Sea M una variedad separada Hausdorff, $p \in M$ y (U, φ) una carta en p . Existe un $r > 0$, tal que la bola abierta de centro $\varphi(p)$ y radio r , $B(\varphi(p), r)$, está contenida en $\varphi(U)$. En consecuencia, la bola cerrada $\overline{B(\varphi(p), r/2)}$ está contenida en $\varphi(U)$, $\varphi^{-1}(\overline{B(\varphi(p), r/2)})$ es compacto en U por ser φ^{-1} continua, luego es compacto en M (y es la clausura en U de $\varphi^{-1}(B(\varphi(p), r/2))$, por ser φ homeomorfismo, pero puede no ser la clausura en M). Al ser M Hausdorff, $\varphi^{-1}(\overline{B(\varphi(p), r/2)})$ es cerrado, luego $\overline{\varphi^{-1}(B(\varphi(p), r/2))} \subset \varphi^{-1}(\overline{B(\varphi(p), r/2)})$ y entonces, por ser cerrado en compacto, $\overline{\varphi^{-1}(B(\varphi(p), r/2))}$ es compacto.

El conjunto $\varphi^{-1}(B(\varphi(p), r/2))$ es pues un entorno de p con clausura compacta.

□

Recordemos que un espacio topológico es localmente conexo (resp. localmente conexo por arcos) si, para todo punto, cada entorno de ese punto contiene un entorno conexo (resp. conexo por arcos).

Lema 2.3.9 *Toda variedad es un espacio topológico localmente conexo y localmente conexo por arcos.*

Demostración. Sea $p \in M$ y A un entorno de p . Tomando una carta (U, φ) en p y una bola $B(\varphi(p), r)$, que esté contenida en $\varphi(U \cap A)$, vemos que $\varphi^{-1}(B(\varphi(p), r))$ es un entorno de p contenido en A que es conexo por arcos y conexo por ser homeomorfo con una bola de \mathbb{R}^n .

□

Recordemos que las componentes conexas de un espacio topológico son las clases de equivalencia para la relación “ xRy si existe un subconjunto conexo que contenga a x e y ”. Las componentes arco conexas son las clases de equivalencia para la relación “ xSy si existe un camino (continuo) que una x con y .”

Teorema 2.3.10 *En una variedad diferenciable las componentes conexas son abiertas y coinciden con las componentes conexas por arcos.*

Demostración. Las componentes conexas son abiertas como consecuencia de 2.3.9. Por ser conexas y localmente arcoconexas, son arcoconexas. Por otra parte una componente arcoconexa es conexa, luego ha de estar enteramente contenida en una componente conexa.

□

Corolario 2.3.11 *Una variedad diferenciable es conexa sii es conexa por arcos.*

Ejercicio 2.3.12 Demostrar que toda variedad tiene base numerable de abiertos en cada punto.

La variedad \mathbb{R}^n tiene base numerable de abiertos (lo que se suele expresar diciendo que es separable o que cumple el segundo axioma de numerabilidad, el primer axioma de numerabilidad es la existencia de bases numerables en cada punto). El conjunto formado por las bolas abiertas de radio racional y centro con coordenadas racionales es una base numerable.

Es fácil construir variedades con un infinito no numerable de componentes conexas, que, en consecuencia, no tienen una base numerable de abiertos.

Ejemplo 2.3.13 Para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos la biyección

$$\pi_a : (x, a) \in \mathbb{R} \times \{a\} \longrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

El conjunto $\{(\mathbb{R} \times \{a\}, \pi_a) : a \in \mathbb{R}\}$ es un atlas de dimensión 1 de \mathbb{R}^2 . Designaremos por \mathbb{R}^2_{nn} a la variedad diferenciable que resulta de considerar a \mathbb{R}^2 dotado de la estructura diferenciable que contiene este atlas.

Las componentes conexas de \mathbb{R}^2_{nn} son los subconjuntos $\mathbb{R} \times \{a\}$ con a fijo. En efecto, cada $\mathbb{R} \times \{a\}$ es conexo por ser homeomorfo con \mathbb{R} , luego está contenido en una componente conexa, D . Por otra parte, D es unión disjunta de su intersección con el abierto $\mathbb{R} \times \{a\}$ y su intersección con el complementario, que es también abierto. Una de estas intersecciones ha de ser vacía, y la primera no lo es, luego lo es la segunda, de forma que $D = \mathbb{R} \times \{a\}$.

Si \mathcal{B} es una base de \mathbb{R}^2_{nn} , construimos una aplicación inyectiva de \mathbb{R} en \mathcal{B} asociando a cada $a \in \mathbb{R}$ un elemento de \mathcal{B} que esté contenido en $\mathbb{R} \times \{a\}$. En consecuencia, \mathcal{B} no es numerable.

El siguiente ejemplo, debido a Calabi y Rosenlicht, muestra una variedad conexa, separada Hausdorff, que no tiene base numerable de abiertos.

Ejemplo 2.3.14 Sea \mathcal{N} el subconjunto de \mathbb{R}^3 unión del plano $x=0$ con el $z=0$.

Para cada $a \in \mathbb{R}$ se define U_a como la unión del plano $z=0$ privado del eje $\{x=0, z=0\}$ con la recta $\{x=0, y=a\}$ y $\varphi_a : U_a \rightarrow \mathbb{R}^2$, mediante $\varphi_a(x, y, z) = (u_a, v_a)$ con

$$u_a = x, \quad v_a = \begin{cases} \frac{y-a}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ z, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La aplicación φ_a es una biyección, cuya inversa viene dada por

$$x = u_a, \quad y = u_a v_a + a, \quad \begin{cases} z = 0, & \text{si } u_a \neq 0 \\ z = v_a, & \text{si } u_a = 0 \end{cases}$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $U_a \cap U_b$ es el plano $z=0$ privado del eje $\{x=0, z=0\}$, el conjunto $\varphi_a(U_a \cap U_b)$ es \mathbb{R}^2 privado del eje de ordenadas $u_a = 0$, y la aplicación $\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}(u_a, v_a) = (u_b, v_b)$ viene dada por

$$(u_b, v_b) = \varphi_b(u_a, u_a v_a + a, 0) = \left(u_a, \frac{u_a v_a + a - b}{u_a} \right) = \left(u_a, v_a + \frac{a - b}{u_a} \right).$$

Vemos así que $\{(U_a, \varphi_a) : a \in \mathbb{R}\}$ es un atlas.

Es un ejercicio comprobar que \mathcal{N} es conexa por arcos, luego conexa, y separada Hausdorff.

En cambio, no tiene base numerable de abiertos. Veámoslo por reducción al absurdo. Si $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una, para cada $a \in \mathbb{R}$ tomamos un B_n tal que $(0, a, 1) \in B_n \subset U_a$. La correspondencia $a \in \mathbb{R} \rightarrow n \in \mathbb{N}$ habría de ser inyectiva, porque si $(0, a, 1) \in B_n \subset U_a$ y $(0, a', 1) \in B_n \subset U_{a'}$, por la primera B_n tiene puntos en $\{x=0, y=a\}$, pero no en $\{x=0, y=a'\}$ si $a \neq a'$, y por la segunda los tiene en $\{x=0, y=a'\}$, luego $a = a'$.

En lo sucesivo, salvo aviso en contra, toda variedad que aparezca en este curso se supondrá separada Hausdorff y separable. Al hablar de campos de vectores en el capítulo 4, haremos notar algunas particularidades de las variedades que no son T_2 .

2.4. Subvariedades de \mathbb{R}^n

Ejemplos de variedad diferenciable especialmente importantes son las subvariedades de \mathbb{R}^n .

Sea S una subvariedad C^∞ de dimensión d de \mathbb{R}^n . Si (U, g) es una parametrización, $(g(U), g^{-1})$ es una carta local, donde pensamos en g como aplicación en S . Dado que los cambios de parametrización son C^∞ , resulta que las cartas así obtenidas componen un atlas. La estructura diferenciable

que lo contiene se llama **estructura de subvariedad** de S . Como consecuencia del hecho de que las g^{-1} son homeomorfismos sobre su imagen dotada de la topología relativa, resulta que la topología de S correspondiente a la estructura diferenciable anterior es la relativa.

Consideremos el par formado por un abierto U , A , y un difeomorfismo C^∞ de A sobre su imagen, $\psi = (y^1, \dots, y^n)$, tales que

$$\psi(A \cap S) = \psi(A) \cap \left(\mathbb{R}^d \times \left\{ (0, \dots, 0) \right\} \right).$$

De lo visto en el capítulo 1 se deduce que $(A \cap S, (y^1|_{A \cap S}, \dots, y^d|_{A \cap S}))$ es una carta de la estructura de subvariedad de S . Si π es la proyección de \mathbb{R}^n sobre sus d primeras componentes, la aplicación coordenada de esta carta es $\pi \circ \psi|_{A \cap S}$.

Cada par (A, ψ) como el anterior será denominado carta de \mathbb{R}^n de subvariedad para S y $(A \cap S, \pi \circ \psi|_{A \cap S})$ será denominado carta de subvariedad de S .

2.5. Aplicaciones diferenciables

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y f una aplicación de M en \mathbb{R} . Si (U, φ) es una carta de M , se llama **expresión local de f en (U, φ)** a $f \circ \varphi^{-1}$.

Si $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ y $p \in U$, se tiene $f(p) = f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) = f \circ \varphi^{-1}(x^1(p), \dots, x^n(p))$ lo que puede expresarse como "la expresión local de f vale en el punto dado por las coordenadas de p lo que f vale en p ".

Si $f \circ \varphi^{-1}$ como función de n variables viene dada, por ejemplo, por la expresión como $f \circ \varphi^{-1}(a^1, \dots, a^n) = (a^1)^2 + e^{\cos a^2 a^3} + 7(a^4)^2$, tenemos $f(p) = f \circ \varphi^{-1}(x^1(p), \dots, x^n(p)) = (x^1(p))^2 + e^{\cos(x^2(p))(x^3(p))} + 7(x^4(p))^2$ por lo que podemos escribir $f|_U = (x^1)^2 + e^{\cos(x^2)(x^3)} + 7(x^4)^2$.

Por esta razón se suele designar a un punto genérico de $\varphi(U)$ por (x^1, \dots, x^n) , si éste es también el nombre del sistema de coordenadas, ya que, entonces, dando una expresión para $f \circ \varphi^{-1}(\text{punto genérico}) = f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ sale una expresión de f como función de las funciones x^1, \dots, x^n .

Ejemplo 2.5.1 Consideremos, en el caso del ejemplo 2.2.9, la función $f : (a, b) \in \mathcal{K} \rightarrow a$. Entonces, si se designa por x a la coordenada correspondiente a \mathbf{x} y a un punto genérico de $(0, 2\pi)$, se tiene $f \circ \mathbf{x}^{-1}(x) = \sin 2x$, luego la expresión de la función f en función de la función x , es también $\sin 2x$.

Ejemplo 2.5.2 Se considera la esfera unidad de \mathbb{R}^{n+1} , $S^n = \{(a^1, \dots, a^{n+1}) : (a^1)^2 + \dots + (a^{n+1})^2 = 1\}$. En ella se define la proyección estereográfica de

polo $N = (0, \dots, 0, 1)$, P_N , haciendo corresponder a cada punto de $S^n - \{N\}$ las n primeras componentes de la intersección de la recta que lo une a N con el plano $x^{n+1} = 0$. Si $P_N(r^1, \dots, r^{n+1}) = (z^1, \dots, z^n)$ ha de existir un único λ tal que $(0, \dots, 0, 1) + \lambda((r^1, \dots, r^{n+1}) - (0, \dots, 0, 1)) = (z^1, \dots, z^n, 0)$. Esto se produce para $\lambda = 1/(1 - r^{n+1})$ y entonces

$$P_N(r^1, \dots, r^{n+1}) = (z^1, \dots, z^n) = \frac{1}{1 - r^{n+1}}(r^1, \dots, r^n).$$

De manera similar se define la proyección estereográfica de polo $S = (0, \dots, 0, -1)$, P_S , en $S^n - \{S\}$ y se obtiene

$$P_S(r^1, \dots, r^{n+1}) = \frac{1}{1 + r^{n+1}}(r^1, \dots, r^n).$$

Obtenemos así dos cartas locales cuyos dominios forman un recubrimiento de S^n . La imagen por los sistemas coordenados de la intersección de los dominios, es en ambos casos el abierto $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Veamos cómo son los cambios de coordenadas.

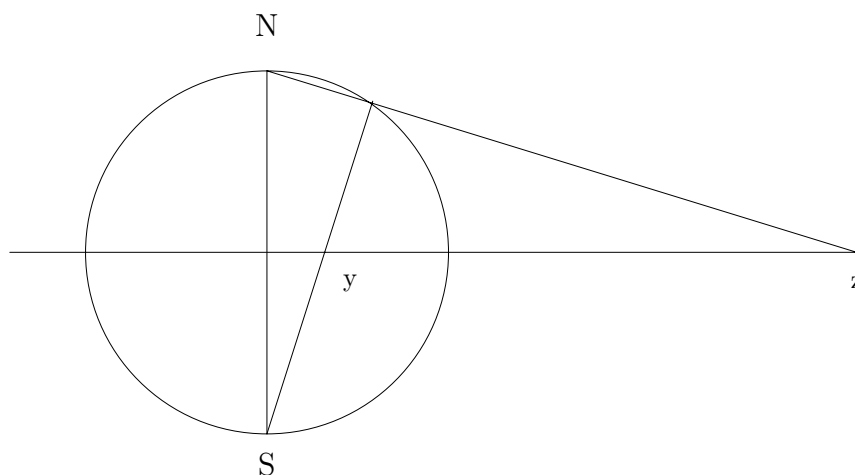


Figura 2.2: Cambio de proyección estereográfica

Si escribimos $P_S \circ P_N^{-1}(z) = y$ con $z = (z^1, \dots, z^n)$ e $y = (y^1, \dots, y^n)$, vemos por geometría elemental (ver figura 2.2) que $\|y\| = 1/\|z\|$ e $y/\|y\| = z/\|z\|$, luego

$$P_S \circ P_N^{-1}(z) = y = \|y\| \frac{z}{\|z\|} = \frac{z}{\|z\|^2}$$

de donde se deduce que $P_S \circ P_N^{-1}$ es C^∞ .

También por geometría elemental se ve que $P_N \circ P_S^{-1} = P_S \circ P_N^{-1}$, de donde se deduce que las dos cartas componen un atlas.

Sea f la función cuyo valor en cada punto es la distancia a $(0, \dots, 0, 1)$. Para determinar su expresión local en el sistema de coordenadas P_N , necesitamos calcular P_N^{-1} .

Si $P_N = (z^1, \dots, z^n)$, designamos también por (z^1, \dots, z^n) a un punto genérico de \mathbb{R}^n . Sea $P_N(a^1, \dots, a^{n+1}) = (z^1, \dots, z^n)$. Entonces

$$\frac{1}{1 - a^{n+1}} (a^1, \dots, a^n) = (z^1, \dots, z^n)$$

luego, con notación obvia,

$$\frac{1}{1 - a^{n+1}} \|a\| = \|z\|$$

así que

$$a^{n+1} = \begin{cases} \frac{\|z\| - \|a\|}{\|z\|} & \text{si } \|z\| \neq 0 \\ -1 & \text{si } \|z\| = 0 \end{cases}$$

Por otra parte, al ser (a^1, \dots, a^{n+1}) de S^n , se tiene

$$1 = \|a\|^2 + (a^{n+1})^2$$

de donde, substituyendo la expresión anterior, se deduce

$$\|a\| = \frac{2\|z\|}{\|z\|^2 + 1}$$

y entonces

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= \frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1} \\ (a^1, \dots, a^n) &= \frac{2}{\|z\|^2 + 1} (z^1, \dots, z^n), \end{aligned}$$

obteniendo así

$$P_N^{-1}(z^1, \dots, z^n) = \left(\frac{2z^1}{\|z\|^2 + 1}, \dots, \frac{2z^n}{\|z\|^2 + 1}, \frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1} \right).$$

Obsérvese que, por simetría, se deduce entonces que

$$P_S^{-1}(z^1, \dots, z^n) = \left(\frac{2z^1}{\|z\|^2 + 1}, \dots, \frac{2z^n}{\|z\|^2 + 1}, \frac{1 - \|z\|^2}{\|z\|^2 + 1} \right).$$

La expresión local buscada es

$$\begin{aligned} f \circ P_N^{-1}(z^1, \dots, z^n) &= f\left(\frac{2z^1}{\|z\|^2 + 1}, \dots, \frac{2z^n}{\|z\|^2 + 1}, \frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1}\right) = \\ &= \sqrt{\left(\frac{2z^1}{\|z\|^2 + 1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2z^n}{\|z\|^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1} - 1\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{\|z\|^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Sean ahora M y N variedades de dimensiones respectivas m y n , y $f : M \rightarrow N$. Dadas cartas (U, φ) y (V, ψ) de M y N respectivamente, tales que $f^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$, se llama **expresión local** de f en esas cartas a $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.5.3 El cilindro, C , de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, admite una parametrización dada por $\eta_{(0,2\pi)} : (\theta, z) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow (\cos \theta, \sin \theta, z) \in C$, cuya imagen será designada por $U_{(0,2\pi)}$. Se define una aplicación, f , de C en S^2 , haciendo corresponder a cada $p \in C$, el punto $p/\|p\| \in S^2$.

Se tiene $f^{-1}(S^2 - \{N\}) = C$ así que podemos hablar de la expresión local de f en las cartas $(U_{(0,2\pi)}, \eta_{(0,2\pi)}^{-1})$ y $((S^2 - \{N\}), P_N)$, $P_N \circ f \circ \eta_{(0,2\pi)} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, que cumple:

$$\begin{aligned} P_N \circ f \circ \eta_{(0,2\pi)}(\theta, z) &= P_N\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}(\cos \theta, \sin \theta, z)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}-z}(\cos \theta, \sin \theta). \end{aligned}$$

Definición 2.5.4 Se dice que f es C^∞ en $p \in M$ si existe una carta de M en p , (U, φ) , y una carta de N en $f(p)$, (V, ψ) , tales que $f(U) \subset V$ y la expresión local de f en esas cartas es C^∞ en $\varphi(p)$.

Ejemplo 2.5.5 La aplicación f del ejemplo 2.5.3 es C^∞ en todo punto. Que lo es en los puntos de $U_{(0,2\pi)}$, se deduce de lo hecho en 2.5.3. Para el resto de los puntos, se demuestra cambiando ligeramente la parametrización.

Recuérdese que cuando se dice que una función definida en un subconjunto de \mathbb{R}^n es C^∞ en un punto, se está afirmando implícitamente que el subconjunto es un entorno del punto. Así, si (U, φ) es una carta de M en $p \in M$ y (V, ψ) es una de N en $f(p)$ y se afirma que la expresión local de f en ellas es C^∞ en $\varphi(p)$, se dice, entre otras cosas, que $\varphi(f^{-1}(V) \cap U)$ es un entorno de $\varphi(p)$. Si la expresión local es C^∞ en todo punto, entonces $\varphi(f^{-1}(V) \cap U)$ es abierto.

Teorema 2.5.6 *Sea $p \in M$, (U, φ) una carta de M en p y (V, ψ) una carta de N en $f(p)$. Las dos condiciones siguientes son equivalentes*

1. *La aplicación f es C^∞ en p .*
2. *La expresión local de f en las cartas (U, φ) y (V, ψ) es C^∞ en $\varphi(p)$.*
Cuando estas condiciones se cumplen f es continua en p .

Demostración. Veamos que 1 implica 2. Sean (U_0, φ_0) y (V_0, ψ_0) cartas de M en p y N en $f(p)$ respectivamente, tales que $f(U_0) \subset V_0$ y $(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1})$ es C^∞ en $\varphi_0(p)$. Podemos escribir

$$f|_{U_0} = \psi_0^{-1} \circ (\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}) \circ \varphi_0|_{U_0}$$

que es compuesta de funciones continuas en los puntos apropiados. Vemos así que f es continua en p .

Por continuidad, existe un entorno abierto, A , de p tal que $f(A) \subset V \cap V_0$. Entonces $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ está definida en $\varphi(A \cap U \cap U_0)$ y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(A \cap U \cap U_0)} = \psi \circ \psi_0^{-1} \circ \psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1} \circ \varphi_0 \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(A \cap U \cap U_0)}$ es C^∞ en $\varphi(p)$ por ser compuesta de aplicaciones C^∞ .

Para ver que 2 implica 1 basta observar que, si A es un entorno abierto de $\varphi(p)$ contenido en el dominio de definición, $\varphi(f^{-1}(V) \cap U)$, de la expresión local, entonces $(\varphi^{-1}(A), \varphi|_{\varphi^{-1}(A)})$ es una carta de M en p que cumple $f(\varphi^{-1}(A)) \subset f(\varphi^{-1}(\varphi(f^{-1}(V) \cap U))) \subset V$ y la expresión local de f en esa carta y la (V, ψ) cumple

$$\psi \circ f \circ (\varphi|_{\varphi^{-1}(A)})^{-1} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_A,$$

lo que muestra que f es C^∞ en p .

□

La demostración del siguiente corolario es inmediata

Corolario 2.5.7 *Las dos condiciones siguientes son equivalentes*

1. *La aplicación f es C^∞ en todo punto.*
2. *Para toda carta de M , (U, φ) , y toda carta de N , (V, ψ) , la expresión local de f en las cartas (U, φ) y (V, ψ) es C^∞ .*
Cuando estas condiciones se cumplen f es continua.

Como consecuencia de este corolario, para comprobar que f es C^∞ , basta tomar un atlas de M y otro de N y verificar que todas las correspondientes expresiones locales de f son C^∞ . Una vez verificado esto, toda expresión local de f , en cualesquiera cartas de M y N , es C^∞ . Esto puede ser enunciado con más precisión de la manera siguiente

Corolario 2.5.8 *Las tres condiciones siguientes son equivalentes*

1. f es C^∞ en todo punto de M .
2. Existen atlas $\{(U_a, \varphi_a) : a \in A\}$ de M y $\{(V_b, \psi_b) : b \in B\}$ de N , tales que, siempre que $f^{-1}(V_b) \cap U_a \neq \emptyset$, la expresión local $\psi_b \circ f \circ \varphi_a^{-1}$ es C^∞ .
3. Para todas las cartas (U, φ) de M y (V, ψ) de N tales que $f^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$, la expresión local de f en esas cartas es C^∞ .

Si estas condiciones se cumplen f es continua.

Definición 2.5.9 *Se dice que f es C^∞ en un subconjunto si lo es en cada uno de sus puntos. Si el subconjunto es todo M , se dice simplemente que f es C^∞ .*

El conjunto de las aplicaciones C^∞ de M en N se designará por $C^\infty(M, N)$, salvo en el caso $N = \mathbb{R}$, en que se designará simplemente por $C^\infty(M)$.

Obsérvese que para comprobar que una función definida en M , con valores reales está en $C^\infty(M)$, basta comprobar que sus expresiones locales en las cartas de un atlas de M son C^∞ .

En $C^\infty(M)$ se definen la suma y el producto, de la forma habitual para funciones con valores en un cuerpo.

Ejemplo 2.5.10 La aplicación $\Pi : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow [x, y, z] \in P^2(\mathbb{R})$ es C^∞ . En efecto, se consideran en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ las cartas dadas por la restricción de la aplicación idéntica a los abiertos $\{x \neq 0\}$, $\{y \neq 0\}$ y $\{z \neq 0\}$, las imágenes por Π de cuyos dominios están en P_1 , P_2 y P_3 respectivamente. Las correspondientes expresiones locales de Π son:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\longrightarrow \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \\ (x, y, z) &\longrightarrow \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) \\ (x, y, z) &\longrightarrow \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \end{aligned}$$

obviamente C^∞ .

En particular Π es continua. Su restricción a S^2 es también, entonces, continua y por tanto $P^2(\mathbb{R})$ es compacto. De manera similar se demuestra que los otros $P^n(\mathbb{R})$ son compactos.

Por otra parte la función definida en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ por

$$F(x, y, z) = \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

toma los mismos valores en cada punto, diferente de 0, de cualquier recta que pase por el origen (esto lo cumple cualquier función homogénea de grado cero) y, en consecuencia, define una función, f , en $P^2(\mathbb{R})$, mediante $f([x, y, z]) = F(x, y, z)$.

Las expresiones locales de f en las cartas definidas por las φ_i son

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_1^{-1}(x_1^1, x_1^2) &= \frac{x_1^1(1 + x_1^2)}{1 + (x_1^1)^2 + (x_1^2)^2} \\ f \circ \varphi_2^{-1}(x_2^1, x_2^2) &= \frac{x_2^1 + x_2^2}{1 + (x_2^1)^2 + (x_2^2)^2} \\ f \circ \varphi_3^{-1}(x_3^1, x_3^2) &= \frac{x_3^2(1 + x_3^1)}{1 + (x_3^1)^2 + (x_3^2)^2}. \end{aligned}$$

Dado que estas expresiones son C^∞ , $f \in C^\infty(M)$.

Ejemplo 2.5.11 En el caso de la aplicación, ρ , que a cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ hace corresponder la trayectoria maximal del sistema 2.1 que lo contiene (ejemplo 2.2.13), vamos a ver que también es C^∞ .

Designemos por I_+ , I_- , II_+ , II_- , las restricciones de la aplicación idéntica a los semiespacios $x > 0$, $x < 0$, $y > 0$, $y < 0$, respectivamente. Así tenemos cuatro cartas locales de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, que forman un atlas, tales que las imágenes por ρ de sus dominios están contenidas en X^+ , X^- , Y^+ e Y^- respectivamente. Las expresiones locales de ρ en las cartas correspondientes son

$$\begin{aligned} \mu^+ \circ \rho \circ (I^+)^{-1}(r^1, r^2) &= r^1 r^2 \\ \mu^- \circ \rho \circ (I^-)^{-1}(r^1, r^2) &= -r^1 r^2 \\ \eta^+ \circ \rho \circ (II^+)^{-1}(r^1, r^2) &= r^1 r^2 \\ \eta^- \circ \rho \circ (II^-)^{-1}(r^1, r^2) &= -r^1 r^2, \end{aligned}$$

donde se ve que ρ es C^∞ .

Dada una función, F , en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ que se pueda expresar en función del producto de las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, existe una función, f , en \mathcal{M} tal que $f \circ \rho = F$. En efecto, dado $t \in \mathcal{M}$, los (x, y) tales que $\rho(x, y) = t$ cumplen $xy = cte$, luego $F(x, y)$ es igual para todos ellos y puedo definir $f(t) = F(x, y)$. Si $F(x, y) = \Phi(xy)$, donde Φ es una función diferenciable, la f obtenida será también diferenciable. En efecto, sus expresiones locales son:

$$\begin{aligned} f \circ (\mu^+)^{-1}(x) &= \Phi(x) \\ f \circ (\mu^-)^{-1}(x) &= \Phi(-x) \\ f \circ (\eta^+)^{-1}(x) &= \Phi(x) \\ f \circ (\eta^-)^{-1}(x) &= \Phi(-x) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.5.12 Consideremos de nuevo la Figura de Ocho de 2.2.9, \mathcal{K} , dotada de la estructura diferenciable que contiene a \mathbf{x} . La aplicación Φ es C^∞ como aplicación de la variedad \mathbb{R} en la \mathbb{R}^2 y tiene su imagen en \mathcal{K} , pero pensada como aplicación de \mathbb{R} en \mathcal{K} no es C^∞ . En efecto, su expresión local en la carta canónica de \mathbb{R} y la correspondiente a \mathbf{x} de \mathcal{K} es $\mathbf{x} \circ \Phi$, cuya restricción a $(-\pi, \pi)$ coincide con $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1}$, que no es continua según vimos en 2.2.9.

Todo esto está dicho para funciones definidas en todo M . Vamos a extenderlo a funciones definidas en un abierto, A , de M .

Para cada atlas de M , $\mathcal{L} = \{(U_a, \varphi_a) : a \in I\}$, el conjunto

$$\mathcal{L}_A = \{(U_a \cap A, \varphi_a|_{U_a \cap A}) : a \in I\},$$

es un atlas de A (ejercicio: demostrarlo), que se llamará “atlas de A inducido por \mathcal{L} ”. Dos atlas de A inducidos por atlas equivalentes de M son equivalentes (ejercicio: demostrarlo), lo que nos permite definir una estructura diferenciable en A como la que contiene a todos los atlas inducidos por los de M . El conjunto formado por las cartas locales de M cuyo dominio está contenido en A , es el atlas máximo de A para esa estructura diferenciable (ejercicio: demostrarlo). Cuando A se considera dotado de esta estructura diferenciable, se dice que es una **subvariedad abierta** de M . La topología que corresponde a A como subvariedad abierta de M es la relativa, *i.e.* los abiertos de A son los abiertos de M contenidos en A (ejercicio: demostrarlo).

Si $g : A \rightarrow N$, y $p \in A$ diremos que g es C^∞ en p si lo es como aplicación de la subvariedad abierta A en N .

Sea $f : M \rightarrow N$ y $p \in A$, f es C^∞ en p sii $f|_A$ lo es como aplicación de la subvariedad abierta A en N (ejercicio: demostrarlo). En particular f es C^∞ en A sii $f|_A$ es C^∞ .

Se tiene

Lema 2.5.13 Sean M y N variedades, $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un recubrimiento abierto de M y f una aplicación de M en N . Entonces $f \in C^\infty(M, N)$ si $f|_{U_\alpha} \in C^\infty(U_\alpha, N)$ para todo $\alpha \in A$.

La demostración queda como ejercicio.

Recordemos que el soporte de una función en un espacio topológico, es la clausura del conjunto de puntos en que no es nula.

Teorema 2.5.14 Sea M una variedad diferenciable separada Hausdorff, $p \in A \subset M$, con A abierto, y $f \in C^\infty(A)$. Existe $\bar{f} \in C^\infty(M)$ que coincide con f en un entorno de p y tiene soporte compacto contenido en A .

Demostración. Consideremos una carta (U, φ) en p tal que $\varphi(p) = 0$ (componiendo un sistema de coordenadas arbitrario con una traslación apropiada, se puede obtener tal carta). Existe $r > 0$ tal que la bola abierta $B(0, r)$ está contenida en $\varphi(A \cap U)$. Sea h una función C^∞ en \mathbb{R}^n que vale 1 en $B(0, r/3)$ y 0 fuera de $B(0, r/2)$. Se define

$$\bar{f}(q) = \begin{cases} (h \circ \varphi)(q) f(q), & \text{si } q \in A \cap U \\ 0, & \text{si } q \notin A \cap U. \end{cases} \quad (2.2)$$

Esta función coincide con $(h \circ \varphi) f$ en el abierto $A \cap U$ y con 0 en el conjunto $M - \varphi^{-1}(\overline{B(0, r/2)})$, que es abierto por ser $\varphi^{-1}(\overline{B(0, r/2)})$ compacto en Hausdorff. Vemos así que \bar{f} es C^∞ como consecuencia de 2.5.13. Por otra parte coincide con f en $\varphi^{-1}(B(0, r/3))$.

El conjunto de puntos en que \bar{f} es no nula está contenido en $\varphi^{-1}(B(0, r/2))$, luego en $\varphi^{-1}(\overline{B(0, r/2)})$, que es compacto en Hausdorff, luego cerrado. El soporte de \bar{f} es pues un cerrado contenido en ese compacto (lo que implica que es compacto) que a su vez está contenido en A . \square

Tomando en la demostración anterior $f = 1$ en A y h con valores en $[0, 1]$ se obtiene

Lema 2.5.15 Sea M una variedad diferenciable separada Hausdorff, A un abierto de M y $p \in A$. Existe $\bar{f} \in C^\infty(M)$ que toma valores en $[0, 1]$, vale 1 en un entorno de p y tiene soporte compacto contenido en A .

Teorema 2.5.16 Sean K un compacto y C un cerrado disjuntos, de una variedad diferenciable separada Hausdorff, M . Existe $f \in C^\infty(M)$ que toma valores en $[0, 1]$, tiene soporte compacto, vale 1 en un entorno de K y 0 en C .

Demostración. Se considera el abierto $M - C$, que contiene a K . Por 2.5.15 existe, para cada $p \in K$, un entorno abierto de p , U_p , y una función C^∞ , f_p , que toma valores en $[0, 1]$, tiene soporte compacto contenido en $M - C$, y vale 1 en U_p . Los U_p forman un recubrimiento abierto de K , de forma que de ellos se puede extraer un subrecubrimiento finito. Sean $\{f^1, \dots, f^h\}$ las funciones correspondientes a este número finito de U s. La función $f = 1 - (1 - f^1)(1 - f^2) \dots (1 - f^h)$, satisface las exigencias.

□

Proposición 2.5.17 Sean M , N y P variedades, $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ y $p \in M$. Si f es C^∞ en p y g es C^∞ en $f(p)$, $g \circ f$ es C^∞ en p .

Demostración. Sean (U, φ) carta de M en $p \in M$, (V, ψ) carta de N en $f(p)$ y (W, η) carta de P en $g(f(p))$. Por continuidad, podemos suponer, que $f(U) \subset V$ y $g(V) \subset W$. Entonces $(g \circ f)(U) \subset W$ y $\eta \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\eta \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ que es C^∞ por ser compuesta de aplicaciones C^∞ .

□

Corolario 2.5.18 Sean M , N y P variedades y $f : M \longrightarrow N$, y $g : N \longrightarrow P$ aplicaciones C^∞ , entonces $g \circ f$ es C^∞ .

Como consecuencia de estos resultados, puede verse que la restricción de Π (ver 2.5.10) a S^2 es una aplicación C^∞ sobre $P^2(\mathbb{R})$. Para verlo basta demostrar que la inyección canónica de S^2 en \mathbb{R}^3 es C^∞ y usar 2.5.18.

2.6. Difeomorfismos

Definición 2.6.1 Sean M y N variedades. Una biyección $f : M \longrightarrow N$ se dice difeomorfismo de M sobre N si tanto ella como su inversa son C^∞ .

Si existe un difeomorfismo de M sobre N , se dice que estas variedades son difeomorfas.

Ejemplo 2.6.2 Sea N (resp. M) la variedad que tiene como conjunto subyacente a \mathbb{R} y como estructura diferenciable aquella para la que $g(x) = x^3$ (resp. $h(x) = x$) es sistema de coordenadas.

La aplicación $f : a \in M \longrightarrow a^{1/3} \in N$ es un difeomorfismo porque:

1. Es biyección.
2. Es C^∞ . En efecto, para todo punto de M tomamos las cartas antes citadas y se tiene $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ y la expresión local resulta ser $r \in \mathbb{R} \longrightarrow g \circ f \circ h^{-1}(r) = r$, que es C^∞ .
3. Para ver que la inversa es también C^∞ , usamos las mismas cartas. La expresión local de la inversa será la inversa de la expresión local de f , *i.e.* la identidad, por lo que es C^∞ .

Podemos decir que en \mathbb{R} conocemos dos estructuras diferenciables diferentes, pero son difeomorfas.

Ejemplo 2.6.3 Volviendo al ejemplo 2.2.9 designamos por $\mathcal{K}_{(0,2\pi)}$ (resp. $\mathcal{K}_{(-\pi,\pi)}$) a \mathcal{K} dotado de la estructura diferenciable que admite como carta a \mathbf{x} (resp. \mathbf{y}).

Definimos $f : \mathcal{K}_{(0,2\pi)} \longrightarrow \mathcal{K}_{(-\pi,\pi)}$ mediante $f = \mathbf{y}^{-1} \circ \tau_{-\pi} \circ \mathbf{x}$, donde $\tau_{-\pi}$ es la translación en $-\pi$. Es inmediato ver que así queda definido un difeomorfismo.

Si $\theta \in (0, 2\pi)$ se tiene

$$f(\text{sen } 2\theta, \text{sen } \theta) = \mathbf{y}^{-1}(\theta - \pi) = (\text{sen } 2\theta, -\text{sen } \theta)$$

lo que demuestra que f es la restricción a \mathcal{K} de la simetría respecto al eje de abscisas.

Ejemplo 2.6.4 La aplicación f del ejemplo 2.5.3 tiene imagen $S^2 - \{N, S\}$. La inversa viene dada por

$$f^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

La aplicación f define pues una biyección de C sobre la subvariedad abierta $S^2 - \{N, S\}$, que admite una carta global $(S^2 - \{N, S\}, P_N|_{S^2 - \{N, S\}})$. Vamos a ver que esta aplicación es un difeomorfismo.

Además de la parametrización de C definida en 2.5.3 mediante $\eta_{(0,2\pi)} : (\theta, z) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow (\cos \theta, \text{sen } \theta, z) \in C$, se tiene la $\eta_{(-\pi,\pi)} : (\theta, z) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow (\cos \theta, \text{sen } \theta, z) \in C$. Sus inversas nos proporcionan cartas $(C - \{(1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}, \eta_{(0,2\pi)}^{-1})$ y $(C - \{(-1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}, \eta_{(-\pi,\pi)}^{-1})$.

Se tiene

$$\begin{aligned} P_N \circ f \circ \eta_{(0,2\pi)}(\theta, z) &= P_N \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{\text{sen } \theta}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2} - z} (\cos \theta, \text{sen } \theta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$P_N \circ f \circ \eta_{(-\pi, \pi)}(\theta, z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2-z}} (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \quad (2.4)$$

lo que demuestra que f es C^∞ .

Para demostrar que f^{-1} es C^∞ , consideramos las cuatro cartas de $(S^2 - \{N, S\})$ que se obtienen por restricción de P_N a los subconjuntos $y > 0$, $y < 0$, $x < 0$ y $x > 0$ y las expresiones locales a que dan lugar. Designando por P_N^i , $i = 1, 2, 3, 4$, a estas restricciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \eta_{(0, 2\pi)}^{-1} \circ f^{-1} \circ (P_N^1)^{-1}(x, y) &= \left((\cos|_{(0, \pi)})^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \frac{x^2 + y^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \\ \eta_{(0, 2\pi)}^{-1} \circ f^{-1} \circ (P_N^2)^{-1}(x, y) &= \left((\cos|_{(\pi, 2\pi)})^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \frac{x^2 + y^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \\ \eta_{(0, 2\pi)}^{-1} \circ f^{-1} \circ (P_N^3)^{-1}(x, y) &= \left((\operatorname{sen}|_{(\pi/2, 3\pi/2)})^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \frac{x^2 + y^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \\ \eta_{(-\pi, \pi)}^{-1} \circ f^{-1} \circ (P_N^4)^{-1}(x, y) &= \left((\operatorname{sen}|_{(-\pi/2, \pi/2)})^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \frac{x^2 + y^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{aligned}$$

Estas fórmulas pueden obtenerse o bien hallando las inversas de las funciones que aparecen en 2.3 y 2.4 o bien por geometría elemental (ver figura 2.3).

Ejercicio 2.6.5 *Espacio proyectivo complejo.* Identifiquemos \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 identificando $x + iy$ con (x, y) para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces P_N^{-1} se convierte en una biyección de \mathbb{C} sobre $S^2 - \{N\}$.

Definimos $P^1(\mathbb{C})$ como el conjunto formado por los subespacios 1-dimensionales complejos de \mathbb{C}^2 .

Para cada $(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ designamos por $[z^1, z^2]$ el subespacio que genera. En $P^1(\mathbb{C})$ podemos distinguir dos subconjuntos $D_1 = \{[z^1, z^2] : z^1 \neq 0\}$ y $D_2 = \{[z^1, z^2] : z^2 \neq 0\}$ y definir las biyecciones $\varphi_1 : [z^1, z^2] \in D_1 \longrightarrow z^2/z^1 \in \mathbb{C}$ y $\varphi_2 : [z^1, z^2] \in D_2 \longrightarrow z^1/z^2 \in \mathbb{C}$.

El conjunto $\{(D_1, \varphi_1), (D_2, \varphi_2)\}$ es un atlas. Consideramos a $P^1(\mathbb{C})$ dotado de la estructura diferenciable que lo contiene.

Por otra parte, D_1 (resp. D_2) es todo $P^1(\mathbb{C})$ salvo el punto $[0, 1]$ (resp. $[1, 0]$), así que podemos definir una biyección, f , de $P^1(\mathbb{C})$ sobre S^2 como la aplicación que coincide con $P_N^{-1} \circ \varphi_1$ en D_1 y envía $[0, 1]$ a N .

Demostrar que f es un difeomorfismo.

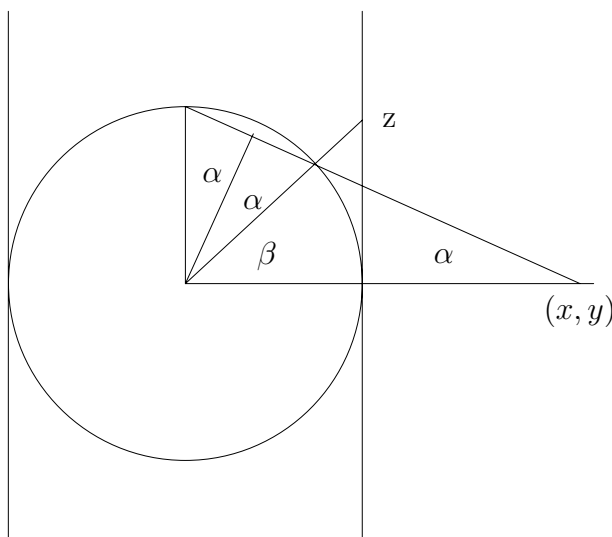


Figura 2.3: Expresión local.

Observación 2.6.6 Se identifica \mathbb{C}^2 con \mathbb{R}^4 identificando $(x + iy, z + it)$ con (x, y, z, t) . Entonces la esfera S^3 queda identificada con

$$\{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 : |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\}.$$

La aplicación que envía cada $(z^1, z^2) \in S^3$ a $f([z^1, z^2]) \in S^2$ es C^∞ . Se llama **aplicación de Hopf**.

Esta aplicación es suprayectiva y, si $(z_1, z_2) \in S^3$, la antiimagen de $f([z^1, z^2])$ es la imagen de S^1 por

$$e^{i\varphi} \in S^1 \longrightarrow (e^{i\varphi} z_1, e^{i\varphi} z_2) \in S^3.$$

Sea A un abierto de una variedad diferenciable, M , y $\psi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una inyección tal que $\psi(A)$ es abierto. Entonces (A, ψ) es una carta local del conjunto M , pero nada nos garantiza que pertenezca al atlas máximo correspondiente a la estructura diferenciable considerada.

Proposición 2.6.7 El par (A, ψ) es carta local de la variedad diferenciable M si ψ es difeomorfismo de la subvariedad abierta A sobre la $\psi(A)$.

Demostración. Si (A, ψ) es carta local de la variedad M , es carta local de la subvariedad abierta A y, tomando la $(\psi(A), Id_{\psi(A)})$ de $\psi(A)$, la expresión local de ψ y de ψ^{-1} es $Id_{\psi(A)}$ en ambos casos y por tanto C^∞ .

Si ψ es un difeomorfismo, (A, ψ) es compatible con cualquier otra carta, (U, φ) , del atlas máximo. En efecto, si $U \cap A \neq \emptyset$, las expresiones locales de ψ y ψ^{-1} en las cartas $(U \cap A, \varphi|_{U \cap A})$ de A y $(\psi(A), Id_{\psi(A)})$ de $\psi(A)$ son

$$\psi \circ (\varphi|_{U \cap A})^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap A)}$$

y

$$\varphi|_{U \cap A} \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap A)}$$

cuya diferenciabilidad, asegura la compatibilidad de las cartas.

□

Resulta útil a veces el siguiente resultado

Lema 2.6.8 *Supongamos que en un conjunto M se tienen dos estructuras diferenciables. Sean M_1 y M_2 las variedades que resultan de considerar en M las estructuras diferenciables citadas. Las estructuras diferenciables son la misma sii la aplicación idéntica de M es un difeomorfismo de M_1 sobre M_2 .*

La demostración es un simple ejercicio.

2.7. Variedad producto

Sean M y N variedades de dimensiones m y n respectivamente, \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) un atlas representante de la estructura diferenciable de M (resp. N), $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m)) \in \mathcal{A}$ y $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n)) \in \mathcal{B}$. Identificando $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con \mathbb{R}^{m+n} de la manera habitual, podemos escribir

$$\begin{aligned} \varphi \times \psi : (p, q) \in U \times V &\longrightarrow (\varphi(p), \psi(q)) = \\ &= (x^1(p), \dots, x^m(p), y^1(q), \dots, y^n(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}. \end{aligned}$$

En particular $\varphi \times \psi = (x^1 \circ \pi_1, \dots, x^m \circ \pi_1, y^1 \circ \pi_2, \dots, y^n \circ \pi_2)$ donde π_1 (resp. π_2) es la proyección canónica de $M \times N$ sobre M (resp. N).

El par $(U \times V, \varphi \times \psi)$ es una carta local, el conjunto formado por estas cartas será designado por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Ejercicio 2.7.1 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ es un atlas de $M \times N$.

Ejercicio 2.7.2 Si \mathcal{A}' y \mathcal{B}' son otros representantes de las estructuras diferenciables de M y N respectivamente, el atlas $\mathcal{A}' \times \mathcal{B}'$ es equivalente al $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Vemos así que la estructura diferenciable que contiene a $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ no depende de los representantes \mathcal{A} y \mathcal{B} elegidos y se llama estructura diferenciable producto de las de M y N . $M \times N$ dotado de esa estructura diferenciable se llama **variedad producto** de M por N .

Ejercicio 2.7.3 Demostrar que la topología que corresponde a la variedad producto es la producto.

Ejemplo 2.7.4 Se considera en la variedad \mathbb{S}^1 el atlas constituido por las cartas (U, φ) y (V, ψ) definidas en 2.1.3 y en \mathbb{R} la carta global dada por la aplicación idéntica. Asociado con estos atlas se define uno en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ mediante

$$\begin{aligned}\varphi \times Id_{\mathbb{R}} : (e^{i\theta}, r) \in (\mathbb{S}^1 - \{1\}) \times \mathbb{R} &\longrightarrow (\theta, r) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \\ \psi \times Id_{\mathbb{R}} : (e^{i\theta}, r) \in (\mathbb{S}^1 - \{-1\}) \times \mathbb{R} &\longrightarrow (\theta, r) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}\end{aligned}$$

y se llama variedad producto de \mathbb{S}^1 por \mathbb{R} a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dotado de la estructura diferenciable que lo contiene.

La aplicación

$$f : (z, r) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, r) \in C$$

donde C es la superficie definida en 2.5.3, es un difeomorfismo, como se comprueba viendo que sus expresiones locales en las cartas del atlas que hemos dado en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, y del obtenido en C mediante inversas de parametrizaciones apropiadas, son la identidad.

Ejercicio 2.7.5 Demostrar que si $f_1 \in C^\infty(P_1, M_1)$, y $f_2 \in C^\infty(P_2, M_2)$, entonces $f_1 \times f_2 \in C^\infty(P_1 \times P_2, M_1 \times M_2)$.

Ejercicio 2.7.6 Demostrar que si $g_1 \in C^\infty(P, M_1)$, y $g_2 \in C^\infty(P, M_2)$, entonces $(g_1, g_2) \in C^\infty(P, M_1 \times M_2)$.

2.8. Particiones de la unidad

Sea X un espacio topológico.

Definición 2.8.1 Una familia de subconjuntos de X , $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, se llama **recubrimiento** de X si X coincide con la unión de los U_α . Se dice que es un **recubrimiento abierto** si, además, los U_α son abiertos.

Definición 2.8.2 Una familia de subconjuntos de X se dice **localmente finita** si todo punto de X tiene un entorno que solo interseca un número finito de elementos de la familia.

Definición 2.8.3 Una **partición de la unidad** sobre X es una familia de funciones reales continuas sobre X , $\{f_i : i \in I\}$, tales que

1. La familia formada por los soportes de las f_i es localmente finita.
2. Para todos $x \in X$, $i \in I$ se cumple $f_i(x) \geq 0$.
3. Para todo $x \in X$

$$\sum_{i \in I} f_i(x) = 1.$$

Si X es una variedad diferenciable, una **partición de la unidad de la variedad** X , es una partición de la unidad sobre X formada por funciones C^∞ .

Definición 2.8.4 Una partición de la unidad, $\{f_i : i \in I\}$, se dice **subordinada** a un recubrimiento, $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, si para todo $i \in I$ existe un $\alpha \in A$ tal que el soporte de f_i está contenido en U_α .

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente teorema

Teorema 2.8.5 Sea M una variedad diferenciable separada Hausdorff con base numerable y R un recubrimiento abierto de M . Existe una partición de la unidad de la variedad M subordinada a R , numerable, en la que los soportes de las funciones que la forman son compactos.

Para demostrarlo necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.8.6 Sea M un espacio topológico localmente compacto con base numerable. Existe un recubrimiento abierto numerable de M , $\{G_i : i = 1, 2, \dots\}$, tal que G_i es relativamente compacto y $\overline{G_i} \subset G_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, \dots$

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{U_i : i = 1, 2, \dots\}$ una base numerable de abiertos y designemos por \mathcal{B}' el subconjunto de \mathcal{B} formado por los elementos relativamente compactos.

El conjunto \mathcal{B}' es una base de la topología de M . En efecto, dados $x \in M$ y un entorno abierto, U , de x , se considera un entorno abierto relativamente compacto de x , A . Entonces $U \cap A$ es un entorno abierto de x y, por tanto, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_i \subset U \cap A$. Pero $\overline{U_i} \subset \overline{U \cap A} \subset \overline{A}$, luego $\overline{U_i}$ es compacto y por tanto $U_i \in \mathcal{B}'$. Dado que $x \in U_i \subset U$, resulta que \mathcal{B}' es base.

Sea $\mathcal{B}' = \{V_i : i = 1, 2, \dots\}$. Definimos la familia $\{G_i\}$ inductivamente. En primer lugar definimos $G_1 = V_1$. Dado que $\overline{G_1}$ es compacto, existe un número finito de elementos de \mathcal{B}' , $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_n}\}$, que recubren a $\overline{G_1}$. Denotemos por j_2 al mayor de los números del conjunto $\{i_1, \dots, i_n, 2\}$. Entonces definimos $G_2 = V_1 \cup \dots \cup V_{j_2}$.

Supongamos definido $G_k = V_1 \cup \dots \cup V_{j_k}$. Entonces $\overline{G_k} = \overline{V_1 \cup \dots \cup V_{j_k}} = \overline{V_1} \cup \dots \cup \overline{V_{j_k}}$ es compacto y por tanto basta una familia finita de elementos de \mathcal{B}' , $\{V_{k_1}, \dots, V_{k_m}\}$, para recubrirlo. Sea j_{k+1} el mayor de los números del conjunto $\{k_1, \dots, k_m, j_k + 1\}$. Entonces definimos $G_{k+1} = V_1 \cup \dots \cup V_{j_{k+1}}$.

Por construcción se tiene $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$.

Para ver que $M = \cup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ se puede razonar como sigue. Dado que para todo N se tiene $j_N \geq N$, resulta que $V_N \subset G_N$. Pero, para cada $x \in M$, existe $V_j \in \mathcal{B}'$ que lo contiene y entonces $x \in G_j$.

□

Demostración de 2.8.5. Sea $R = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ y $\{G_1, G_2, \dots\}$ el recubrimiento abierto cuya existencia asegura 2.8.6. Denotaremos $G_{-1} = G_0 = \emptyset$.

Dado $i \in \mathbb{N}$, el conjunto $\overline{G_i} - G_{i-1}$ es compacto, por ser un cerrado contenido en el compacto $\overline{G_i}$.

Para cada $x \in \overline{G_i} - G_{i-1}$ tomamos $\alpha \in A$ tal que $x \in U_\alpha$ y consideramos el entorno abierto de x , $U' = U_\alpha \cap (G_{i+1} - \overline{G_{i-2}})$. Como consecuencia de 2.5.15 existe una función C^∞ , λ_x , que vale 1 en un entorno abierto, W_x , de x , toma valores en $[0, 1]$ y tiene soporte compacto contenido en U' .

Los W_x recubren $\overline{G_i} - G_{i-1}$. Por compacidad existe un subrecubrimiento finito, $\{W_{x_1}, \dots, W_{x_k}\}$. Denotemos $\mathcal{F}_i = \{\lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_k}\}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots$.

La familia formada por los soportes de los elementos de \mathcal{F} , es localmente finita. En efecto, los elementos de \mathcal{F}_i tienen su soporte en $M - \overline{G_{i-2}}$. En consecuencia, dado $x \in M$, si $x \in G_i$, G_i es un entorno de x que no interseca al soporte de ningún elemento de $\mathcal{F}_{i+2} \cup \mathcal{F}_{i+3} \cup \dots$ y por tanto, solo interseca al soporte de un número finito de elementos de \mathcal{F} .

El conjunto \mathcal{F} es numerable por ser unión de una familia numerable de conjuntos finitos. Denotaremos $\mathcal{F} = \{g_1, g_2, \dots\}$.

La función g dada por $g(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i(x)$, está bien definida ya que solo un número finito de sumandos del segundo miembro son diferentes de cero. Además es C^∞ . En efecto, dado $x \in M$, sea A un entorno abierto de x que solo interseca el soporte de un número finito de elementos de \mathcal{F} . Sean g_{i_1}, \dots, g_{i_k} esos elementos. Entonces

$$g|_A = \sum_{h=1}^k g_{i_h}|_A$$

que es claramente C^∞ .

Por otra parte, g toma valores mayores o iguales que 1 en todo punto, ya que para todo $x \in M$ podemos tomar i tal que $x \in \overline{G_i} - G_{i-1}$ y entonces x está en alguno de los W_{x_h} considerados antes, por lo que la correspondiente función vale 1 en x y las demás toman valores no negativos.

Podemos entonces definir para cada $i \in \mathbb{N}$

$$f_i = \frac{g_i}{g}.$$

Las funciones f_i son positivas o nulas, suman 1 y la familia de sus soportes, que coincide con la de los soportes de de las g_i , es localmente finita, por lo que componen una partición de la unidad.

Como cada λ_x ha sido construida con soporte en algún U_α , la partición de la unidad obtenida está subordinada al recubrimiento R . Los soportes son compactos.

□

Corolario 2.8.7 *Sea $R = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un recubrimiento abierto de una variedad diferenciable separada Hausdorff con base numerable. Existe una partición de la unidad de la variedad, $\{g_\alpha : \alpha \in A\}$, tal que el soporte de g_α está contenido en U_α para todo α en A .*

Demostración. Sea $\{f_1, f_2, \dots\}$ un a partición de la unidad subordinada a R .

Para cada $i \in \mathbb{N}$ seleccionamos un $\alpha \in A$ tal que el soporte de f_i esté contenido en U_α . Este α será designado por $F(i)$, obteniendo así una aplicación, F , de \mathbb{N} en A .

Para cada $\alpha \in A$ definimos

$$g_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \notin F(\mathbb{N}) \\ \sum_{i \in F^{-1}(\alpha)} f_i & \text{si } \alpha \in F(\mathbb{N}) \end{cases}$$

La familia de las g_α cumple las condiciones requeridas.

□

Corolario 2.8.8 *Sea $R = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un recubrimiento abierto de una variedad diferenciable separada Hausdorff con base numerable. Existe un recubrimiento abierto localmente finito, $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$, tal que $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.*

Demostración. Sea $\{g_\alpha : \alpha \in A\}$ la partición de la unidad cuya existencia asegura 2.8.7. Definimos $V_\alpha = \{x \in M : g_\alpha(x) \neq 0\}$.

Cada V_α es abierto y los V_α componen un recubrimiento porque para cada x en la variedad alguno de los $g_\alpha(x)$ es distinto de 0 y entonces $x \in V_\alpha$. Este recubrimiento es localmente finito porque cada V_α está contenido en el soporte de g_α y la familia de los soportes es localmente finita. Además, para todo α , $\overline{V_\alpha}$ es el soporte de g_α que está contenido en U_α .

□

Obsérvese que algunos de los V_α de 2.8.8 pueden ser vacíos.

Corolario 2.8.9 Sean A y B cerrados disjuntos de una variedad diferenciable separada Hausdorff con base numerable. Existe una función C^∞ con valores en $[0, 1]$ que vale 1 en un entorno de A y 0 en un entorno de B .

Demostración. Designemos por M la variedad y por $Sop(f)$ el soporte de cualquier función f .

El conjunto $\{M - A, M - B\}$ es un recubrimiento abierto de M . Sea $\{f, g\}$ una partición de la unidad tal que $Sop(f) \subset M - A$ y $Sop(g) \subset M - B$. Entonces $M - Sop(f)$ es un entorno de A en el que f vale 0, luego g vale 1. Por su parte $M - Sop(g)$ es un entorno de B en el que g vale 0.

□

2.9. Ejercicios complementarios

Ejercicio 2.9.1 Sea S una subvariedad C^∞ de dimensión s de \mathbb{R}^n , P una subvariedad C^∞ de dimensión p de \mathbb{R}^m , U un abierto de \mathbb{R}^n tal que $U \cap S \neq \emptyset$ y f una aplicación C^∞ de U en \mathbb{R}^m tal que $f(U) \subset P$. Demostrar que $f|_{U \cap S} \in C^\infty(U \cap S, \mathbb{R}^m)$ y que, pensada como aplicación en P , $f|_{U \cap S} \in C^\infty(U \cap S, P)$.

Ejercicio 2.9.2 Se considera el subconjunto de \mathbb{R}^3 , M , formado por el plano $z = 0$ y el punto $(0,0,1)$. Designamos por U al plano $z = 0$ y por V al subconjunto que resulta de añadir a U privado del origen, el punto $(0,0,1)$. Se define

$$\begin{aligned}\varphi : (x, y, 0) \in U &\longrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \psi : (x, y, 0) \in V &\longrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \psi(0, 0, 1) &= (0, 0)\end{aligned}$$

Demuéstrese que $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ es un atlas de M . ¿Es la topología que corresponde a M cuando se le considera dotado de la estructura diferenciable que contiene a ese atlas, separada Hausdorff?

Ejercicio 2.9.3 Volvemos al caso tratado en los ejemplos 2.2.13, 2.3.7 y 2.5.11.

Hemos visto que $\{(X^+, \mu^+), (X^-, \mu^-), (Y^+, \eta^+), (Y^-, \eta^-)\}$ es un atlas de \mathcal{M} y que la topología de \mathcal{M} correspondiente a la estructura diferenciable que contiene al atlas anterior, \mathcal{F} , no es separada Hausdorff. Además hemos visto que la aplicación, ρ , que a cada punto de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ hace corresponder la trayectoria que lo contiene, es C^∞ .

demostrar que, si (U, φ) es carta local, la aplicación $\varphi \circ \rho$ es submersión C^∞ y que \mathcal{F} es la única estructura diferenciable con esta propiedad .

Ejercicio 2.9.4 Se considera en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x. \end{aligned}$$

Sea M el conjunto formado por las trayectorias maximales del sistema dado. Sea π la aplicación de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ en M que a cada punto hace corresponder la trayectoria que lo contiene.

Encontrar una estructura diferenciable sobre M , \mathcal{F} , tal que $\varphi \circ \pi$ sea submersión, para toda carta local, (U, φ) , de \mathcal{F} . Justificar si es Hausdorff la topología resultante.

Ejercicio 2.9.5 Resolver un problema similar al 2.9.4, cambiando $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ por $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ y el sistema dado por la ecuación $dy/dx = 1/x^2$. ¿Es conexa la variedad resultante?.

Ejercicio 2.9.6 Demostrar que la estructura de subvariedad de S^n , es la de variedad que incluye como sistemas de coordenadas a las proyecciones estereográficas.

Indicación. Demostrar que las inversas de las proyecciones estereográficas definen parametrizaciones.

Ejercicio 2.9.7 Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$, y designemos por φ la proyección desde $(0, 0, 2)$ de M sobre \mathbb{R}^2 identificado al plano $z = 0$. Demostrar que M es subvariedad de \mathbb{R}^3 y que φ define un sistema global de coordenadas de su estructura de subvariedad.

Ejercicio 2.9.8 Sea X el conjunto cuyos elementos son los pares no ordenados $\{p, -p\} \equiv \{\pm p\}$ con $p \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Designamos por U (resp. V) al

subconjunto de X formado por los $\{p, -p\}$ con p no vertical (resp. horizontal) y definimos

$$\begin{aligned}\varphi & : \{\pm(x, y)\} \in U \longrightarrow \left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \psi & : \{\pm(x, y)\} \in V \longrightarrow \left(\frac{x}{y}, x^2 + y^2\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Demostrar que $((U, \varphi), (V, \psi))$ es un atlas.

Ejercicio 2.9.9 Sea M el conjunto de las matrices reales 2×2 con rango 1. Consideramos los subconjuntos U , formado por los elementos cuya primera fila es no nula, y V , formado por los elementos cuya segunda fila es no nula, y definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned}\varphi & : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in U \longrightarrow ((x, y), \langle(x, y), (z, t)\rangle) \in \mathbb{R}^3 \\ \psi & : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in V \longrightarrow ((z, t), \langle(x, y), (z, t)\rangle) \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto escalar habitual de \mathbb{R}^2 . Se pide:

- Demostrar que tanto φ como ψ son inyectivas y sus imágenes son abiertos, que se calcularán.
- Demostrar que $((U, \varphi), (V, \psi))$ es un atlas.

Ejercicio 2.9.10 Sea G el conjunto de los subespacios vectoriales de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 *i.e.* los planos que pasan por el origen. Se consideran tres subconjuntos: G_x , formado por los planos que no contienen al eje x , G_y por los que no contienen al eje y y G_z por los que no contienen al eje z .

Se definen $\varphi_x : G_x \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_y : G_y \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\varphi_z : G_z \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mediante $\varphi_x(P) = (a, b)$ (resp. $\varphi_y(P) = (a, b)$, $\varphi_z(P) = (a, b)$) si P es el plano $x = ay + bz$ (resp. $y = ax + bz$, $z = ax + by$), $a, b \in \mathbb{R}$. Se pide

- Demostrar que $\{(G_x, \varphi_x), (G_y, \varphi_y), (G_z, \varphi_z)\}$ es un atlas de G .
- Sea $f : P^2(\mathbb{R}) \longrightarrow G$ la aplicación definida asignando a cada recta su plano normal que pasa por el origen. Demostrar que esta aplicación es C^∞ , cuando en $P^2(\mathbb{R})$ consideramos su estructura diferenciable habitual y en G la definida por el atlas anterior.

Ejercicio 2.9.11 Sea L la parábola de \mathbb{R}^3 dada por $y = x^2, z = 0$ y P el plano $3x + y - 2z = 2$. Designemos por h la aplicación de L en $P^2(\mathbb{R})$ definida así: a $p \in L$ se asocia la recta que pasa por el origen y es paralela a la intersección de P con el plano normal a L en p . Si G es la variedad definida

en el problema 2.9.10, definimos $g : L \rightarrow G$ enviando cada $p \in L$ al plano paralelo al normal a L en p que pasa por el origen. Se pide

- Demostrar que L es subvariedad C^∞ de dimensión 1 de \mathbb{R}^3 .
- Dar una carta global de L para su estructura de subvariedad.
- Demostrar que h y g son C^∞ para las estructuras diferenciables que estamos manejando.

Ejercicio 2.9.12 Se designa por P al plano $2x - 3y + z = 1$ y por A al subconjunto de $P^2(\mathbb{R})$ formado por las rectas que no son paralelas a P . Sea $k : A \rightarrow P$ definida haciendo corresponder a cada recta en A su punto de intersección con P . Se pide

- Demostrar que P es subvariedad de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 y dar una carta global de su estructura de subvariedad.
- Demostrar que A es un abierto de $P^2(\mathbb{R})$.
- Demostrar que k es C^∞ para la estructura de subvariedad de P y la usual de $P^2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 2.9.13 Se considera la aplicación

$$h : [x, y, z] \in P^2(\mathbb{R}) \rightarrow [x^2 + y^2, x^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2] \in P^2(\mathbb{R})$$

y se pide

- Demostrar que está bien definida.
- Demostrar que es C^∞ .

Capítulo 3

Espacio tangente a una variedad

3.1. Introducción

Consideremos una superficie, S . Dado un punto, p , sea I un intervalo abierto que contenga a $0 \in \mathbb{R}$ y α una curva diferenciable con valores en S tal que $\alpha(0) = p$. Los vectores $\alpha'(0)$ obtenidos en estas condiciones forman un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 , que es el espacio tangente a S en p . En esta caracterización los vectores tangentes resultan ser elementos de \mathbb{R}^3 , que están fuera de S . Si queremos generalizar el concepto a variedades, debemos caracterizarlos en términos de objetos “intrínsecos” a la propia variedad, como sería por ejemplo el conjunto de las funciones diferenciables en algún entorno de p en S , ya que no hay un espacio ambiente en que sumergirlos.

A cada vector tangente como el $\alpha'(0)$ de antes, se puede asociar una aplicación, $\overline{\alpha'(0)}$, de funciones diferenciables, definidas en algún entorno en S de p , en números definida mediante $\overline{\alpha'(0)}(f) = (f \circ \alpha)'(0)$.

Para ver que esto no depende de la curva que origine al vector, basta observar que, si β es otra curva tal que $\beta'(0) = \alpha'(0)$, entonces

$$(f \circ \beta)'(0) = (\overline{f} \circ \beta)'(0) = \langle \nabla \overline{f}(p), \beta'(0) \rangle = \langle \nabla \overline{f}(p), \alpha'(0) \rangle = (f \circ \alpha)'(0)$$

donde \overline{f} es cualquier extensión diferenciable de f a un entorno de p en \mathbb{R}^3 .

Vemos de paso que $\overline{\alpha'(0)}(f)$ es como la derivada direccional de \overline{f} en la dirección de $\alpha'(0)$, salvo por el hecho de que $\alpha'(0)$ puede no ser unitario.

Cada una de estas aplicaciones, $\overline{\alpha'(0)}$, tiene dos propiedades muy características:

1. Es lineal.

$$2. \quad \overline{\alpha'(0)}(fg) = \overline{\alpha'(0)}(f) g(p) + f(p) \overline{\alpha'(0)}(g).$$

Vamos a definir los vectores tangentes a una variedad diferenciable como operadores sobre las funciones, que cumplan estas condiciones.

3.2. Vectores tangentes

Sea M una variedad y p uno de sus puntos. Sea \mathcal{K}_p la unión de los $C^\infty(U)$ cuando U recorre el conjunto de los entornos abiertos p .

En \mathcal{K}_p se tienen dos leyes de composición naturales: si $f \in C^\infty(U)$, $g \in C^\infty(V)$ y $a \in \mathbb{R}$ se define

$$f + g : q \in U \cap V \longrightarrow f(q) + g(q) \in \mathbb{R}$$

$$af : q \in U \longrightarrow a(f(q)) \in \mathbb{R}$$

Es fácil ver que $f + g \in C^\infty(U \cap V)$ y $af \in C^\infty(U)$.

Con estas operaciones \mathcal{K}_p queda dotado de una estructura parecida a la de espacio vectorial, pero no lo es. En efecto, hay un elemento neutro para la suma, la función que toma el valor cero en todo punto de M , pero, si $f \in C^\infty(U)$ con $U \neq M$, no hay ninguna función, g , tal que $f + g$ sea el elemento neutro, ya que $f + g$ no está definido en todo M , cualquiera que sea el dominio de g .

De todas formas se definen los funcionales lineales de \mathcal{K}_p como las aplicaciones de \mathcal{K}_p en \mathbb{R} , v , tales que

$$v(af + bg) = av(f) + bv(g)$$

para todos $f, g \in \mathcal{K}_p$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Lema 3.2.1 *Si v es un funcional lineal de \mathcal{K}_p y $f, g \in \mathcal{K}_p$ coinciden en un entorno de p , entonces $v(f) = v(g)$.*

Demostración. Sean $f \in C^\infty(U)$, $g \in C^\infty(V)$ y W un entorno de p tal que $f|_W = g|_W$. Entonces

$$v(f) - v(f|_W) = v(f - f|_W) = v(0(f - f|_W)) = 0v(f - f|_W) = 0$$

luego $v(f) = v(f|_W) = v(g|_W) = v(g)$.

□

Para $f, g \in \mathcal{K}_p$ también se define un producto, fg , mediante $(fg)(q) = f(q)g(q)$, que está definida en la intersección de los dominios de definición de f y g y es C^∞ en ella.

Definición 3.2.2 Un **vector tangente** a M en p es un funcional lineal de \mathcal{K}_p , v , tal que

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

para todos $f, g \in \mathcal{K}_p$.

El conjunto de los vectores tangentes en p a M se denota por T_pM y en él se definen las siguientes operaciones: si $u, v \in T_pM$ y $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u + v &: f \in \mathcal{K}_p \longrightarrow u(f) + v(f) \in \mathbb{R} \\ au &: f \in \mathcal{K}_p \longrightarrow a(u(f)) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.2.3 Demostrar que $u + v$ y au pertenecen a T_pM .

Ejercicio 3.2.4 Demostrar que con estas leyes T_pM es un espacio vectorial real.

Lema 3.2.5 Si $f \in \mathcal{K}_p$ es constante en algún entorno de p y $v \in T_pM$, entonces $v(f) = 0$.

Demostración. Si $a \in \mathbb{R}$ designaremos por \tilde{a} a la función constante cuyo valor en todo punto de M es a .

Cuando f está en las condiciones del enunciado y $f(p) = a$, f coincide en un entorno de p con \tilde{a} , por lo que, como consecuencia de 3.2.1, se tiene

$$v(f) = v(\tilde{a}) = v(a\tilde{1}) = av(\tilde{1}).$$

Por otra parte

$$v(\tilde{1}) = v(\tilde{1} \cdot \tilde{1}) = v(\tilde{1}) \cdot 1 + 1 \cdot v(\tilde{1}) = 2v(\tilde{1}),$$

luego $v(\tilde{1}) = 0$ y, por tanto, $v(f) = 0$.

□

Lema 3.2.6 Sea $f \in \mathcal{K}_p$ y $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta local de M en p . Entonces existe un entorno de p en el que f coincide con

$$f(p) + \sum_{k=1}^n (x^k - x^k(p))g_k$$

donde g_k , $k = 1, \dots, n$ son funciones C^∞ en ese entorno de p , que cumplen $g_k(p) = (\partial_k (f \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p))$.

Demostración. Sea D un entorno abierto de p en el que f esté definida y sea C^∞ . Sea B una bola abierta de centro $\varphi(p)$ contenida en $\varphi(U \cap D)$. Para cada (x^1, \dots, x^n) en B consideramos la integral

$$I = \int_0^1 \frac{d}{dt} [f \circ \varphi^{-1}(x^1(p) + t(x^1 - x^1(p)), \dots, x^n(p) + t(x^n - x^n(p)))] dt.$$

El teorema fundamental del cálculo nos dice que

$$I = f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) - f \circ \varphi^{-1}(x^1(p), \dots, x^n(p)) = f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) - f(p)$$

de donde la regla de la cadena permite deducir

$$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = f(p) + I = f(p) + \sum_{k=1}^n (x^k - x^k(p)) \quad (3.1)$$

$$\int_0^1 (\partial_k(f \circ \varphi^{-1}))(x^1(p) + t(x^1 - x^1(p)), \dots, x^n(p) + t(x^n - x^n(p))) dt.$$

Definimos una función real en B , g_k^0 , mediante

$$\begin{aligned} g_k^0(x^1, \dots, x^n) &= \\ &= \int_0^1 (\partial_k(f \circ \varphi^{-1}))(x^1(p) + t(x^1 - x^1(p)), \dots, x^n(p) + t(x^n - x^n(p))) dt, \end{aligned}$$

que es C^∞ por el teorema de dependencia diferenciable de la integral respecto a parámetros.

Entonces 3.1 queda

$$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = f(p) + \sum_{k=1}^n (x^k - x^k(p)) g_k^0(x^1, \dots, x^n), \quad (3.2)$$

de donde se deduce que, para todo $q \in \varphi^{-1}(B)$, se tiene

$$\begin{aligned} f(q) &= f \circ \varphi^{-1}(\varphi(q)) = f \circ \varphi^{-1}(x^1(q), \dots, x^n(q)) = \\ &= f(p) + \sum_{k=1}^n (x^k(q) - x^k(p)) g_k^0(x^1(q), \dots, x^n(q)) = \\ &= f(p) + \sum_{k=1}^n (x^k(q) - x^k(p)) (g_k^0 \circ \varphi)(q), \end{aligned}$$

así que, si designamos a $g_k^0 \circ \varphi$ por g_k se tiene

$$f|_{\varphi^{-1}(B)} = f(p) + \sum_{k=1}^n (x^k - x^k(p))|_{\varphi^{-1}(B)} g_k|_{\varphi^{-1}(B)}. \quad (3.3)$$

Por otra parte la función g_k es C^∞ en $\varphi^{-1}(B)$, porque su expresión local en la carta (U, φ) es g_k^0 , y cumple $g_k(p) = g_k^0(\varphi(p)) = (\partial_k(f \circ \varphi^{-1}))(x^1(p), \dots, x^n(p)) = (\partial_k(f \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p))$.

□

Ejercicio 3.2.7 Demostrar que si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, existen funciones $g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, n$, tales que $g_i(0, \dots, 0) = \partial_i f(0, \dots, 0)$ y

$$f(r^1, \dots, r^n) = f(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n r^i g_i(r^1, \dots, r^n).$$

Sean $p \in M$, V un entorno abierto de p , $f \in C^\infty(V)$ y $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta de M en p . En estas condiciones, $f \circ \varphi^{-1}$ está definida en $\varphi(U \cap V)$, que es un entorno abierto de $\varphi(p)$, y es C^∞ en ese abierto, por lo que el número $(\partial_i(f \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p))$ existe. Definimos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (f) = (\partial_i(f \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p)).$$

Ejercicio 3.2.8 Demostrar que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \in T_p M.$$

Proposición 3.2.9 *El conjunto*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\}$$

es una base de $T_p M$, y para todo $v \in T_p M$ se tiene

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

Demostración. Veamos que los $(\partial/\partial x^i)_p$ son linealmente independientes. Dados $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = 0,$$

para cada $k = 1, \dots, n$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) (x^k) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (x^k) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda^i (\partial_i (x^k \circ \varphi^{-1})) (\varphi(p)) = \sum_{i=1}^n \lambda^i (\partial_i r^k) (\varphi(p)) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta_i^k = \lambda^k, \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\}$$

es libre.

Para demostrar que es sistema de generadores, basta demostrar la fórmula para v dada en el enunciado .

Según 3.2.6 y 3.2.5 se tiene para toda f que sea C^∞ en un entorno de p :

$$\begin{aligned} v(f) &= v \left(f(p) + \sum_{k=1}^n (x^k - x^k(p)) g_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n v \left((x^k - x^k(p)) g_k + (x^k - x^k(p)) (p) v(g_k) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n v(x^k) (\partial_k (f \circ \varphi^{-1})) (\varphi(p)) = \sum_{k=1}^n v(x^k) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p (f) \right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n v(x^k) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p \right) (f) \end{aligned}$$

□

Corolario 3.2.10 *La dimensión del espacio vectorial $T_p M$ es la de la variedad diferenciable M .*

La base

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\}$$

se llama base de $T_p M$ canónicamente asociada con la carta $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$. La expresión de $v \in T_p M$ como combinación lineal de los elementos de esa base, se llama **expresión local** de v en la carta.

Con frecuencia escribiremos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f).$$

Entonces, según lo visto en la demostración de 3.2.9, se tiene

$$\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (x^k) = \delta_i^k$$

para todos $k, i = 1, \dots, n$.

Ejemplo 3.2.11 Consideremos en \mathbb{R}^n la estructura diferenciable canónica, *i.e.*, aquella para la que $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n} = (r^1, \dots, r^n))$ es una carta global.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y f una función C^∞ en un entorno de p . Entonces

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r^i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right)_p (f) = \left(\partial_i (f \circ Id_{\mathbb{R}^n}^{-1})\right) (Id_{\mathbb{R}^n}(p)) = \partial_i f(p)$$

Vemos así que en este caso $(\partial/\partial r^i)_p$ no es sino la derivada parcial habitual.

El conjunto $\mathbb{R}^n \times \{p\}$ tiene una estructura natural de espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^n . Las operaciones se definen por $(a, p) + (b, p) = (a+b, p)$, $\lambda(a, p) = (\lambda a, p)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se define un isomorfismo, I_p , de $T_p\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n \times \{p\}$ mediante

$$I_p \left(\sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right)_p \right) = ((a^1, \dots, a^n), p).$$

A menudo se identifican estos espacios mediante I_p y entonces se dice que el espacio tangente a \mathbb{R}^n en p es $\mathbb{R}^n \times \{p\}$.

Obsérvese que I_p^{-1} aplica $(v, p) \in \mathbb{R}^n \times \{p\}$ en un operador que es la derivada direccional en p en la dirección v , salvo por el hecho de que v puede no ser unitario.

Ejemplo 3.2.12 En una variedad de dimensión 5, se considera un sistema de coordenadas $\varphi = (x^1, \dots, x^5)$, una función dada, en función de las funciones coordenadas, por $f = (x^1)^2(x^2)^3 + \cos \pi x^4 x^5$, y un punto, p , definido por $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^5(p)) = (2, -1, 0, 1, 1)$.

Afirmo que para calcular los $(\partial/\partial x^i)_p(f)$ basta aplicar las reglas de derivación usuales a la expresión de f . En efecto, si designamos por (x^1, \dots, x^5) a un punto genérico de la imagen de la carta, la expresión local de f viene dada por $f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^5) = (x^1)^2(x^2)^3 + \cos \pi x^4 x^5$, y entonces $(\partial/\partial x^i)_p(f)$ es la derivada parcial i -ésima ordinaria de la función de cinco variables reales $(x^1)^2(x^2)^3 + \cos \pi x^4 x^5$ en el punto $(2, -1, 0, 1, 1)$.

En particular $(3(\partial/\partial x^1)_p - 2(\partial/\partial x^4)_p)(f) = -12$.

3.2.1. Cambio de sistema de coordenadas

Sean $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ y $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ cartas locales y $p \in U \cap V$.

Nos vamos a ocupar de encontrar la matriz que da las componentes en la base de las $(\partial/\partial y^k)_p$, de cualquier $v \in T_p M$, en función de sus componentes en la base de las $(\partial/\partial x^i)_p$.

Las componentes en la base de las $(\partial/\partial y^k)_p$ son

$$v(y^k) = \left(\sum_{i=1}^n v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) (y^k) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right)_p v(x^i)$$

luego la matriz es la que tiene en la fila k columna i el número $(\partial y^k/\partial x^i)_p$. Pero

$$\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right)_p = (\partial_i (y^k \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p)) = (\partial_i (r^k \circ \psi \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p))$$

así que la matriz buscada es la jacobiana de $\psi \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$.

En la práctica, se designa por (x^1, \dots, x^n) (resp. (y^1, \dots, y^n)) un punto genérico de la imagen de φ (resp. ψ) y entonces la relación $(y^1, \dots, y^n) = \psi \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ vendrá dada por unas ecuaciones $y^k = y^k(x^1, \dots, x^n)$, $k = 1, \dots, n$. Con esta notación $(\partial y^k/\partial x^i)_p$ viene dado por las derivadas parciales usuales de las funciones y^k respecto a x^i en el punto $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$.

Ejemplo 3.2.13 En $P^2(\mathbb{R})$ se considera $p = [-1, 2, 1]$ y $v \in T_p P^2(\mathbb{R})$ dado por

$$v = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1^1} \right)_p + 3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1^2} \right)_p.$$

Dado que p también pertenece a P_2 cabe preguntarse por la expresión de v en la base asociada con φ_2 . Para determinarla debemos dar las ecuaciones de $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Si escribimos $(x_2^1, x_2^2) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x_1^1, x_1^2)$, tenemos

$$\begin{aligned} x_2^1 &= \frac{1}{x_1^1} \\ x_2^2 &= \frac{x_1^2}{x_1^1} \end{aligned}$$

de donde se deduce que la matriz del cambio es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{(x_1^1)^2} & 0 \\ -\frac{x_1^2}{(x_1^1)^2} & \frac{1}{x_1^1} \end{pmatrix}_{(-2, -1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

luego

$$v = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2^1} \right)_p - \left(\frac{\partial}{\partial x_2^2} \right)_p.$$

3.3. Diferencial de una función en un punto

En esta sección M es una variedad, p uno de sus puntos, f una función C^∞ en un entorno de p y $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta de M en p .

Definición 3.3.1 Se llama **diferencial** de f en p , y se designa por $(df)_p$, a la aplicación que a cada $v \in T_p M$ hace corresponder $v(f)$.

El espacio dual de $T_p M$ será designado por $T_p^* M$.

Ejercicio 3.3.2 Demostrar que $(df)_p \in T_p^* M$.

Notación. Recordemos que, si L es un aplicación lineal de un espacio vectorial, V , en otro, designaremos por $L \cdot v$ a la imagen por L de $v \in V$.

Lema 3.3.3 El conjunto $\{(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\}$ es la base dual de la $\{(\partial/\partial x^1)_p, \dots, (\partial/\partial x^n)_p\}$.

Demostración. Para todos $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene

$$(dx^j)_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = (\partial x^j / \partial x^i)_p = \delta_i^j.$$

□

Lema 3.3.4 Se tiene

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p (dx^i)_p$$

Demostración. Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$(df)_p = \sum_{k=1}^n a_k (dx^k)_p,$$

entonces

$$\begin{aligned} (df)_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p &= \left(\sum_{k=1}^n a_k (dx^k)_p \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \sum_{k=1}^n a_k \left((dx^k)_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \delta_i^k = a_i \end{aligned}$$

luego $a_i = (\partial f / \partial x^i)_p$.

□

Ejemplo 3.3.5 En 2.5.10 hemos determinado las expresiones locales de una función diferenciable $f \in C^\infty(P^2(\mathbb{R}))$, en los sistemas de coordenadas φ_1 , φ_2 y φ_3 .

Dado $p = [1, 3, 0]$ se tiene $\varphi_1(p) = (3, 0)$, $\varphi_2(p) = (1/3, 0)$, pero p no está en P_3 . Usando el lema precedente y las expresiones locales dichas se encuentra que

$$(df)_{[1,3,0]} = -\frac{2}{25}(dx_1^1)_{[1,3,0]} + \frac{3}{10}(dx_1^2)_{[1,3,0]}$$

y que

$$(df)_{[1,3,0]} = -\frac{18}{25}(dx_2^1)_{[1,3,0]} + \frac{9}{10}(dx_2^2)_{[1,3,0]}$$

En cambio, no tiene sentido preguntarse por la expresión de $(df)_{[1,3,0]}$ en la “base” $\{(dx_3^1)_{[1,3,0]}, (dx_3^2)_{[1,3,0]}\}$.

3.4. Aplicación tangente

Sean M y N variedades, $p \in M$, U un entorno abierto de p y $F \in C^\infty(U, N)$.

Definición 3.4.1 Se llama **aplicación tangente** de F en p a la aplicación $T_p F : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$, dada por

$$(T_p F(v))(f) = v(f \circ F)$$

para todos $v \in T_p M$, $f \in \mathcal{K}_{F(p)}$.

Ejercicio 3.4.2 Demostrar que $T_p F(v) \in T_{F(p)} N$.

Lema 3.4.3 La aplicación $T_p F$ es lineal.

Demostración. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v \in T_p M$ y $f \in \mathcal{K}_{F(p)}$, se tiene

$$\begin{aligned} (T_p F(au + bv))(f) &= (au + bv)(f \circ F) = a(u(f \circ F)) + \\ &+ b(v(f \circ F)) = a((T_p F(u))(f)) + b((T_p F(v))(f)) = \\ &= (a(T_p F(u)) + b(T_p F(v)))(f) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.4.4 Se considera la aplicación $\Pi : (r^1, r^2, r^3) \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow [r^1, r^2, r^3] \in P^2(\mathbb{R})$, que ya vimos en 2.5.10 que es C^∞ . Queremos calcular

$$T_{(2,-1,2)}\Pi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_{(2,-1,2)}.$$

Sus componentes en la base asociada con φ_1 son:

$$\begin{aligned} \left(T_{(2,-1,2)}\Pi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_{(2,-1,2)} \right) (x_1^1) &= \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_{(2,-1,2)} (x_1^1 \circ \Pi) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_{(2,-1,2)} \left(\frac{r^2}{r^1} \right) = \frac{1}{4} \\ \left(T_{(2,-1,2)}\Pi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_{(2,-1,2)} \right) (x_1^2) &= \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_{(2,-1,2)} (x_1^2 \circ \Pi) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_{(2,-1,2)} \left(\frac{r^3}{r^1} \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

de forma que

$$T_{(2,-1,2)}\Pi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_{(2,-1,2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^1} \right)_{[2,-1,2]} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^2} \right)_{[2,-1,2]}$$

Proposición 3.4.5 Sean $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ y $(V, \psi = (y^1, \dots, y^s))$ cartas de M y N en p y $F(p)$ respectivamente. La matriz de $T_p F$ en las bases $\{(\partial/\partial x^i)_p : i = 1, \dots, n\}$ y $\{(\partial/\partial y^j)_{F(p)} : j = 1, \dots, s\}$ es la matriz jacobiana de $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$.

Demostración. Si $v \in T_p M$, las componentes de $T_p F \cdot v$ en la base $\{(\partial/\partial y^j)_{F(p)} : j = 1, \dots, s\}$ son

$$\begin{aligned} (T_p F \cdot v)(y^k) &= v(y^k \circ F) = \left(\sum_{i=1}^n v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) (y^k \circ F) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y^k \circ F}{\partial x^i} \right)_p v(x^i) \end{aligned}$$

de donde se deduce que el elemento de la fila k columna i de la matriz buscada es

$$\left(\frac{\partial y^k \circ F}{\partial x^i} \right)_p$$

que coincide con $\partial_i(r^k \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$.

□

En la práctica. Usando como siempre la notación que designa a un punto genérico de $\varphi(U)$ (resp. $\psi(V)$) por (x^1, \dots, x^n) (resp. (y^1, \dots, y^s)) la relación $(y^1, \dots, y^s) = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ vendrá dada por unas ecuaciones $y^k = y^k((x^1, \dots, x^n))$, $k = 1, \dots, s$. Entonces, $(\partial y^k \circ F / \partial x^i)_p$ coincide con la derivada parcial usual de la correspondiente función,

$$\left(\frac{\partial y^k \circ F}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial y^k(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} \right)_{(x^1, \dots, x^n) = \varphi(p)}.$$

Ejemplo 3.4.6 En el ejemplo anterior

$$\varphi_1 \circ \Pi \circ Id_{\mathbb{R}^3}^{-1}(r^1, r^2, r^3) = \varphi_1([r^1, r^2, r^3]) = \left(\frac{r^2}{r^1}, \frac{r^3}{r^1} \right),$$

así que las ecuaciones son

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{r^2}{r^1} \\ x_1^2 &= \frac{r^3}{r^1} \end{aligned}$$

con lo que

$$J_{(2,-1,2)} \left(\varphi_1 \circ \Pi \circ Id_{\mathbb{R}^3}^{-1} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{r^2}{r^1{}^2} & \frac{1}{r^1} & 0 \\ -\frac{r^3}{r^1{}^2} & 0 & \frac{1}{r^1} \end{pmatrix}_{(2,-1,2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Las componentes de

$$T_{(2,-1,2)} \Pi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_{(2,-1,2)}$$

en la base asociada con φ_1 son

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

como ya vimos.

Ejemplo 3.4.7 Se considera la aplicación antipodal de S^2 , $A : p \in S^2 \longrightarrow -p \in S^2$, y las cartas $(U_n, Q_n = (x_n^1, x_n^2))$ y $(U_e, Q_e = (x_e^1, x_e^2))$ donde U_n es el “hemisferio Norte”, $z > 0$, Q_n la proyección, (x, y) , sobre el plano xy , U_e

el “hemisferio Este”, $y > 0$, y Q_e la proyección, (x, z) , sobre el plano xz . La expresión local de A en esas cartas no está definida salvo si restringimos los dominios. Si designamos por Q'_n a la restricción de Q_n al subconjunto de U_n dado por $y < 0$, tenemos

$$Q_e \circ A \circ (Q'_n)^{-1}(x_n^1, x_n^2) = \left(-x_n^1, -\sqrt{1 - x_n^{1^2} - x_n^{2^2}} \right),$$

con lo que las ecuaciones son

$$\begin{aligned} x_e^1 &= -x_n^1 \\ x_e^2 &= -\sqrt{1 - x_n^{1^2} - x_n^{2^2}}. \end{aligned}$$

La matriz de

$$T_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} A$$

en las bases

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_n^1} \right)_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}, \left(\frac{\partial}{\partial x_n^2} \right)_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \right\}$$

y

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_e^1} \right)_{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}, \left(\frac{\partial}{\partial x_e^2} \right)_{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \right\}$$

es pues

$$\left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ \frac{x_n^1}{\sqrt{1 - x_n^{1^2} - x_n^{2^2}}} & \frac{x_n^2}{\sqrt{1 - x_n^{1^2} - x_n^{2^2}}} \end{array} \right)_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right).$$

Definición 3.4.8 Se llama **rango** de f en p al rango de la aplicación lineal $T_p f$.

Con frecuencia se usan los símbolos f_{*p} y $d_p f$ para designar a $T_p f$.

3.5. Caso de las subvariedades de \mathbb{R}^n

Sea S una subvariedad C^∞ de dimensión d de \mathbb{R}^n e $i_S : p \in S \longrightarrow p \in \mathbb{R}^n$ la inyección canónica.

Dado $p \in S$, sea (U, \bar{x}) una (∞, d) -parametrización de S en p ,

$$\bar{x} : (u^1, \dots, u^d) \in U \longrightarrow (x^1(u^1, \dots, u^d), \dots, x^n(u^1, \dots, u^d)) \in \mathbb{R}^n.$$

Tomamos en p la carta de S $(\bar{x}(U), \bar{x}^{-1})$, donde pensamos en \bar{x} como aplicación en S , y la canónica de \mathbb{R}^n . La expresión local de i_S en esas cartas es $Id_{\mathbb{R}^n} \circ i_S \circ \bar{x}$, que no es sino \bar{x} pensada como aplicación en \mathbb{R}^n . En particular es C^∞ y vemos así que i_S es C^∞ en p .

El sistema de coordenadas \bar{x}^{-1} será denotado por (u^1, \dots, u^d) , y supondremos que $u^i(p) = u_0^i$, $i = 1, \dots, d$.

La matriz de la aplicación $T_p i_S$ en las bases $\left\{ (\partial/\partial u^i)_p : i = 1, \dots, d \right\}$ y $\left\{ (\partial/\partial r^j)_p : j = 1, \dots, n \right\}$ es

$$J_{(u_0^1, \dots, u_0^d)} \bar{x} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x^1(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^1} \right) (u_0^1, \dots, u_0^d), & \dots, & \left(\frac{\partial x^1(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^d} \right) (u_0^1, \dots, u_0^d) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial x^n(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^1} \right) (u_0^1, \dots, u_0^d), & \dots, & \left(\frac{\partial x^n(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^d} \right) (u_0^1, \dots, u_0^d) \end{pmatrix}$$

que es una matriz de rango d , lo que implica en particular que $T_p i_S$ es inyectiva.

En consecuencia $T_p i_S$ establece un isomorfismo entre $T_p S$ y el subespacio vectorial $T_p i_S(T_p S)$ de $T_p \mathbb{R}^n$. Componiéndolo con I_p (ver 3.2.11) obtenemos un isomorfismo de $T_p S$ sobre un subespacio, $V \times \{p\}$, de $\mathbb{R}^n \times \{p\}$. V está dado por las matrices en la base $\left\{ (\partial/\partial r^j)_p : j = 1, \dots, n \right\}$ de los elementos de $T_p i_S(T_p S)$, de forma que $V = \left\{ J_{(u_0^1, \dots, u_0^d)} \bar{x} \cdot a : a \in \mathbb{R}^d \right\} = D\bar{x}(u_0^1, \dots, u_0^d)(\mathbb{R}^d)$, de donde:

Proposición 3.5.1 *El subespacio $T_p i_S(T_p S)$ es el que mediante I_p se identifica con $V \times \{p\}$, siendo $V = D\bar{x}(u_0^1, \dots, u_0^d)(\mathbb{R}^d)$.*

En lo sucesivo, en condiciones como las anteriores diremos que el espacio tangente a S en p es tanto $T_p S$ como $V \times \{p\}$ como V .

El siguiente ejercicio relaciona la definición del espacio tangente a S como variedad diferenciable, con una idea más intuitiva de espacio tangente a una subvariedad de \mathbb{R}^n .

Ejercicio 3.5.2 Demostrar que en las condiciones de la proposición anterior, V está formado por los vectores tangentes a las curvas diferenciables de \mathbb{R}^n que pasan por p con su imagen contenida en S .

Dado que

$$T_p i_S \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right)_p = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x^k(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^j} \right) (u_0^1, \dots, u_0^d) \left(\frac{\partial}{\partial r^k} \right)_p,$$

si denotamos por $\bar{x}_i(u_0^1, \dots, u_0^d)$ a

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x^1(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^i} \right) (u_0^1, \dots, u_0^d) \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial x^n(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^i} \right) (u_0^1, \dots, u_0^d) \end{pmatrix}$$

resulta que

$$T_p^i S \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right)_p = I_p^{-1} \cdot (\bar{x}_j(u_0^1, \dots, u_0^d), p).$$

Vemos así que en la identificación de $T_p S$ con un subespacio V de \mathbb{R}^3 , $(\partial/\partial u^j)_p$ se identifica con $\bar{x}_j(u_0^1, \dots, u_0^d)$ y, por linealidad,

$$\sum_{j=1}^d a^j (\partial/\partial u^j)_p$$

se identifica con

$$\sum_{j=1}^d a^j \bar{x}_j(u_0^1, \dots, u_0^d)$$

para todos $a^1, \dots, a^d \in \mathbb{R}$, de forma que el subespacio V es el generado por los vectores $\bar{x}_j(u_0^1, \dots, u_0^d)$.

Cuando se estudian las superficies, se suele manejar el espacio tangente a ellas como el subespacio V anterior. En concreto, si

$$\bar{x} : (u, v) \in U \longrightarrow \bar{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$$

es parametrización de una superficie S , se suele designar a \bar{x}_1 por \bar{x}_u y a \bar{x}_2 por \bar{x}_v . Si $p = \bar{x}(u, v)$ el espacio vectorial $T_p S$ se identifica con

$$\{\lambda \bar{x}_u(u, v) + \mu \bar{x}_v(u, v) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

i.e. con el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 normal al producto vectorial $\bar{x}_u(u, v) \times \bar{x}_v(u, v)$.

Ejemplo 3.5.3 La aplicación $\bar{x}(u, v) = (u, v, uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ es una parametrización de su imagen, S , que se llama silla de montar.

Dado $p = (2, 3, 6) = \bar{x}(2, 3)$, el espacio vectorial $T_p S$ se identifica con el plano $-3x - 2y + z = 0$ ya que $\bar{x}_u(2, 3) \times \bar{x}_v(2, 3) = (-3, -2, 1)$.

Volviendo al caso general, es de observar que, si para algún $v \in T_p S$ tenemos $T_p i_S \cdot v = I_p^{-1} \cdot (L, p)$ y F es una función diferenciable en el sentido de \mathbb{R}^n en un entorno de p se tiene

$$v(F|_S) = \langle L, \nabla_p F \rangle.$$

En efecto,

$$v(F|_S) = v(F \circ i_S) = (T_p i_S \cdot v)(F) = (I_p^{-1} \cdot (L, p))(F) = \langle L, \nabla_p F \rangle$$

Ejemplo 3.5.4 Consideremos de nuevo la parametrización de la silla de montar dada por $\bar{x}(u, v) = (u, v, uv)$ y el punto $p = (2, 3, 6)$. Se define una función mediante $F(x, y, z) = xyz$. Si designamos por (u, v) las coordenadas del sistema \bar{x}^{-1} , se tiene $F|_S = u^2 v^2$, por lo que

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} \right)_p (F|_S) = (2uv^2)(2, 3) = 36.$$

Por otra parte

$$\langle \bar{x}_u(2, 3), \nabla_p F \rangle = \langle (1, 0, v)_{(2,3)}, (yz, xz, xy)_{(2,3,6)} \rangle = \langle (1, 0, 3), (18, 12, 6) \rangle = 36.$$

Ejemplo 3.5.5 Se considera una subvariedad de dimensión 3 de \mathbb{R}^5 , S . Sea $\bar{x} : (u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \bar{x}(u^1, u^2, u^3) \in S$ una parametrización en el punto $p = (2, -1, 0, 1, 3)$. Sea $v \in T_p S$ tal que $T_p i_S \cdot v = ((3, 2, 1, -1, -2), (2, -1, 0, 1, 3))$ y F la función en \mathbb{R}^5 dada por $F(x, y, z, t, u) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2$.

Entonces

$$v(F|_S) = \langle (3, 2, 1, -1, -2), \nabla_p F \rangle = \langle (3, 2, 1, -1, -2), 2(2, -1, 0, 1, 3) \rangle = -6.$$

Supongamos ahora que A es un abierto de \mathbb{R}^n , $f \in C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$, y $a \in f(A)$ es tal que f es submersión en todo punto de $f^{-1}(a)$. Sabemos entonces que $f^{-1}(a)$ es subvariedad C^∞ de dimensión $n-m$ de \mathbb{R}^n .

Proposición 3.5.6 Si $p \in f^{-1}(a)$, el espacio tangente en p a $f^{-1}(a)$ es el núcleo de $Df(p)$.

Demostración. Si $\bar{x} : (u^1, \dots, u^{n-m}) \in U \longrightarrow \bar{x}(u^1, \dots, u^{n-m}) \in f^{-1}(a)$ es una parametrización, se tiene $f \circ \bar{x} = cte$, de donde la regla de la cadena permite deducir $Df(p) \circ D\bar{x}(\bar{x}^{-1}(p)) = 0$, luego el espacio tangente en p a $f^{-1}(a)$, $D\bar{x}(\bar{x}^{-1}(p)) (\mathbb{R}^{n-m})$, es un espacio vectorial de dimensión $n-m$ contenido en el núcleo de $Df(p)$. Pero ese núcleo tiene dimensión $n-m$, por

ser f submersión en p .

□

Ejemplo 3.5.7 El espacio tangente en $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ a la esfera S^2 como subespacio de \mathbb{R}^3 , viene dado por el núcleo de $Df(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Pero

$$J_{(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})}f = 2 \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} \right),$$

luego el núcleo buscado está formado por los (x, y, z) tales que

$$2 \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

i.e. es el plano $x - y + z = 0$.

Corolario 3.5.8 En las condiciones anteriores, si $f = (f^1, \dots, f^m)$, el espacio tangente a $f^{-1}(a)$ en p está formado por los $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $\langle \nabla_p f^k, v \rangle = 0$, $k = 1, \dots, m$.

Ejemplo 3.5.9 Se considera la aplicación $f : (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \rightarrow (xtu, yzt) \in \mathbb{R}^2$ y se designa por S a $f^{-1}(1, 2)$. En todo punto (a, b, c, d, e) de S son a, b, c, d y e diferentes de cero, luego la jacobiana en él de f ,

$$\begin{pmatrix} de & 0 & 0 & ae & ad \\ 0 & cd & bd & bc & 0 \end{pmatrix},$$

es de rango 2, por lo que f es submersión en ese punto. Así pues S es subvariedad de dimensión 3 de \mathbb{R}^5 .

El espacio tangente a S en (a, b, c, d, e) está formado por los (x, y, z, t, u) tales que

$$\begin{aligned} dex + aet + adu &= 0 \\ cdy + bdz + bct &= 0 \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{t}{d} + \frac{u}{e} &= 0 \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{t}{d} &= 0 \end{aligned}$$

3.6. Algunos teoremas

En esta sección M , N y P son variedades, $f \in C^\infty(M, N)$, $g \in C^\infty(N, P)$, $h \in C^\infty(N)$

Teorema 3.6.1 (Regla de la cadena) *Si $p \in M$ se tiene*

1. $T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f.$
2. $(d(h \circ f))_p = (dh)_{f(p)} \circ T_p f.$

Demostración. Sea $v \in T_p M$ y $F \in \mathcal{K}_{g(f(p))}$. Se tiene

$$\begin{aligned} (T_p(g \circ f)(v))(F) &= v(F \circ (g \circ f)) = v((F \circ g) \circ f) = \\ &= (T_p f(v))(F \circ g) = (T_{f(p)}g(T_p f(v)))(F). \\ (d(h \circ f))_p(v) &= v(h \circ f) = (T_p f(v))(h) = (dh)_{f(p)}(T_p f(v)). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.6.2 *Sea M conexa y f tal que $T_p f = 0$, para todo $p \in M$. Entonces f es constante.*

Demostración. Sea y un punto de la imagen de f . Por ser f continua, $f^{-1}(y)$ es cerrado. Vamos a ver que es abierto, lo que acabará la demostración, por ser M conexa y $f^{-1}(y)$ no vacío.

Dado $p \in f^{-1}(y)$, vamos a ver que $f^{-1}(y)$ contiene un entorno de p .

Sean $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ y $(V, \psi = (y^1, \dots, y^s))$ cartas locales de M en p y de N en $f(p)$ respectivamente. Tomamos una bola abierta, B , centrada en $\varphi(p)$, contenida en $\varphi(U)$. Como consecuencia de 3.4.5 la matriz jacobiana de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es cero en todo punto de $\varphi(U)$, luego la derivada es también cero en todo punto de $\varphi(U)$, en particular es cero en B , que es conexo, luego $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es constante en B . Pero esto implica que f es constante en $\varphi^{-1}(B)$ y dado que $p \in \varphi^{-1}(B)$, resulta que esta constante es y . Pero entonces $\varphi^{-1}(B)$ está contenido en $f^{-1}(y)$ y es un entorno de p .

□

Corolario 3.6.3 *Sea M conexa y $g \in C^\infty(M)$ tal que $(dg)_p = 0$, para todo $p \in M$. Entonces g es constante.*

Demostración. Es inmediato encontrar una demostración directa similar a la del teorema, pero daremos otra, que pone de manifiesto la relación entre la aplicación tangente y la diferencial, para funciones con valores reales.

Para cada $p \in M$ $T_p g$ aplica $T_p M$ en $T_{g(p)} \mathbb{R}$. Si identificamos este espacio con $\mathbb{R} \times \{g(p)\}$ de la manera habitual, se tiene

$$T_p g \cdot v = ((dg)_p \cdot v, g(p)).$$

En efecto,

$$T_p g \cdot v = ((T_p g \cdot v)(r), g(p)) = (v(r \circ g), g(p)) = (v(g), g(p)) = ((dg)_p \cdot v, g(p)).$$

Vemos así que $(dg)_p = 0$ implica $T_p g = 0$ y el resultado se deduce del teorema.

□

Sea U un abierto de M . Se dice que la restricción de f a U es un difeomorfismo sobre su imagen, si $f(U)$ es abierto y la restricción de f a U es un difeomorfismo de la subvariedad abierta U sobre la $f(U)$.

Teorema 3.6.4 (Inversión local) *Dado $p \in M$ la aplicación $T_p f$ es un isomorfismo sii existe un entorno abierto de p tal que la restricción de f a él es un difeomorfismo sobre su imagen.*

Antes de dar la demostración, hagamos algunas observaciones sobre el espacio tangente de una subvariedad abierta.

Sea U un abierto de M e $i_U : p \in U \longrightarrow p \in M$ la inyección canónica. Vamos a ver como para cada $p \in U$, $T_p i_U$ establece un isomorfismo natural de espacios tangentes.

Una forma de verlo es la siguiente. Si $(V, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta de M en p , $(V \cap U, \varphi|_{V \cap U} = (x^1|_{V \cap U}, \dots, x^n|_{V \cap U}))$ es una carta de U en p . Se tiene

$$\begin{aligned} T_p i_U \cdot \left(\frac{\partial}{\partial (x^i|_{V \cap U})} \right)_p &= \sum_{k=1}^n \left(T_p i_U \cdot \left(\frac{\partial}{\partial (x^i|_{V \cap U})} \right)_p \right) (x^k) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial (x^i|_{V \cap U})} \right)_p (x^k \circ i_U) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial (x^i|_{V \cap U})} \right)_p (x^k|_{V \cap U}) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p. \end{aligned}$$

Esto hace que, en la práctica, no se use casi nunca la notación

$$\sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial (x^i|_{V \cap U})} \right)_p$$

para vectores tangentes a U en p , ese vector se escribe directamente como

$$\sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

identificando así $T_p U$ con $T_p M$ mediante $T_p i_U$.

Otra forma de describir $T_p i_U$ es la siguiente. Dado $v \in T_p U$, $T_p i_U \cdot v$ hace corresponder a cada función, f , C^∞ en un entorno, V , de p en M el número que v hace corresponder a la restricción de f a $U \cap V$. Su inversa hace corresponder a cada $u \in T_p M$ en el vector, u' , que a cada función, g , C^∞ en un entorno en U de p , hace corresponder el mismo número que le haría corresponder u si la consideramos como función C^∞ en un entorno de p en M .

Demostración del teorema. Supongamos que existe un entorno abierto, U , de p tal que la restricción de f a él es un difeomorfismo sobre su imagen. Sea $g : f(U) \rightarrow U$ la inversa de la restricción de f a U . Entonces $g \circ f \circ i_U = Id_U$ y $f \circ i_U \circ g = Id_{f(U)}$, lo que implica

$$\begin{aligned} T_{f(p)}g \circ T_p f \circ T_p i_U &= T_p Id_U = Id_{T_p U} \\ T_p f \circ T_p i_U \circ T_{f(p)}g &= T_{f(p)} Id_{f(U)} = Id_{T_{f(p)}f(U)}. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $T_p f \circ T_p i_U$ es un isomorfismo, por lo que $T_p f$ lo es a su vez.

Recíprocamente, supongamos ahora que $T_p f$ es un isomorfismo. Sean (U, φ) y (V, ψ) cartas locales de M en p y de N en $f(p)$ respectivamente, tales que $f(U) \subset V$. Entonces la jacobiana de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es no singular y el teorema de la función inversa en espacios euclídeos dice que existe un entorno abierto, A , de $\varphi(p)$ tal que la restricción de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ a él es un difeomorfismo sobre su imagen, A' .

Si designamos a $\varphi^{-1}(A)$ por B , la restricción de f a B es un difeomorfismo sobre su imagen. En efecto, se tiene $f(B) = \psi^{-1}(A')$, que es abierto, y

$$f|_B = \psi^{-1}|_{\psi(f(B))} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_A) \circ \varphi|_B$$

de donde se deduce que $f|_B$ es una biyección y que la expresión local de su inversa es $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_A)^{-1}$, por lo que es C^∞ .

□

Definición 3.6.5 Diremos que f es un **difeomorfismo local** si todo punto tiene un entorno tal que la restricción de f a él es un difeomorfismo sobre su imagen.

Corolario 3.6.6 La aplicación f es un difeomorfismo local sii su aplicación tangente en cada punto es un isomorfismo.

La demostración del siguiente lema es inmediata.

Lema 3.6.7 Un difeomorfismo local es difeomorfismo sii es biyección.

Ejemplo 3.6.8 La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por $f(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$, es un difeomorfismo local porque su aplicación tangente en cada punto es un isomorfismo. Para verlo en el punto $(1/4, 1/4)$, se puede tomar en el punto imagen, (i, i) , la carta construida así: sea $(\{Im z > 0\}, Re)$ la carta de \mathbb{S}^1 cuyo dominio es $\{z \in \mathbb{S}^1 : Im z > 0\}$ y cuya aplicación coordenada es la función “parte real”; una carta de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en (i, i) es $(\{Im z > 0\} \times \{Im z > 0\}, Re \times Re)$. En el punto origen tomamos la carta canónica de \mathbb{R}^2 restringida al cuadrado $(0, 1/2) \times (0, 1/2)$, para tener $f((0, 1/2) \times (0, 1/2)) \subset \{Im z > 0\} \times \{Im z > 0\}$. La expresión local de f en esas cartas es

$$(x, y) \longrightarrow (\cos 2\pi x, \cos 2\pi y)$$

cuya jacobiana en $(1/4, 1/4)$ es

$$\begin{pmatrix} -2\pi \operatorname{sen} 2\pi x & 0 \\ 0 & -2\pi \operatorname{sen} 2\pi y \end{pmatrix}_{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} = \begin{pmatrix} -2\pi & 0 \\ 0 & -2\pi \end{pmatrix},$$

que es no singular.

Para todo punto (x, y) del cuadrado $(0, 1/2) \times (0, 1/2)$ podemos tomar las mismas cartas en (x, y) y en $f(x, y)$ y la matriz jacobiana de la expresión local tiene determinante $4\pi^2(\operatorname{sen} 2\pi x)(\operatorname{sen} 2\pi y) \neq 0$, lo que muestra que $T_{(x,y)}f$ es isomorfismo.

Si $(x, y) \in (k, k + 1/2) \times (k', k' + 1/2)$, $k, k' \in \mathbb{Z}$, se toma como carta en (x, y) la restricción de la carta canónica a ese cuadrado y como carta en $f(x, y)$ la misma de antes. Los cálculos son los mismos para ver que $T_{(x,y)}f$ es isomorfismo.

Sea ahora (x_0, y_0) tal que su imagen por f esté, por ejemplo, en

$$\{z \in \mathbb{S}^1 : \operatorname{Re} z > 0\} \times \{z \in \mathbb{S}^1 : \operatorname{Im} z < 0\} = \left\{ e^{i\theta} : \cos \theta > 0 \right\} \times \left\{ e^{i\theta} : \operatorname{sen} \theta < 0 \right\},$$

i.e. suponemos que $\cos 2\pi x_0 > 0$ y $\operatorname{sen} 2\pi y_0 < 0$.

En ese abierto de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tenemos definido el sistema de coordenadas $Im \times Re$ mediante $(Im \times Re)(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = (\text{sen } \theta, \text{cos } \varphi)$. La antiimagen del dominio anterior por f , U , está formada por los (x, y) tales que $\text{cos } 2\pi x > 0$ y $\text{sen } 2\pi y < 0$ *i.e.*

$$2\pi k - \frac{\pi}{2} < 2\pi x < 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi k' - \pi < 2\pi y < 2\pi k', \quad k, k' \in \mathbb{Z}$$

donde vemos que U es un abierto union de una infinidad de cuadrados abiertos. Consideramos la carta canónica de \mathbb{R}^2 y vemos que la expresión local de f en las cartas consideradas es

$$(x, y) \longrightarrow (\text{sen } 2\pi x, \text{cos } 2\pi y).$$

Esto demuestra que f es C^∞ en (x_0, y_0) . La jacobiana en (x_0, y_0) de la expresión local es

$$\begin{pmatrix} 2\pi \text{cos } 2\pi x & 0 \\ 0 & -2\pi \text{sen } 2\pi y \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

con determinante $-4\pi^2(\text{cos } 2\pi x_0)(\text{sen } 2\pi y_0) \neq 0$, luego la aplicación tangente de f en (x_0, y_0) es un isomorfismo.

Para los otros (x_0, y_0) se procede de manera similar.

La aplicación f no es un difeomorfismo por no ser biyectiva.

3.7. Aplicación tangente y curvas

Sea M una variedad diferenciable. Llamaremos **curva** de M a toda aplicación C^∞ de un intervalo abierto, I , de \mathbb{R} en M .

Por otra parte, en una variedad de dimensión 1, si t es un sistema de coordenadas en p , designaremos por

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_p$$

al vector

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_p$$

i.e., para toda $f \in \mathcal{K}_p$ se tiene

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_p (f) = (f \circ t^{-1})'(t(p))$$

Sea $c : I \rightarrow M$ una curva de M . Si designamos por r la identidad de I , restricción a I de la coordenada canónica de \mathbb{R} , se define el **vector tangente a la curva c** en r_0 o en $c(r_0)$, donde $r_0 \in I$, como

$$\dot{c}_{r_0} = T_{r_0}c \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)_{r_0}.$$

Ejemplo 3.7.1 Se considera la curva, c de S^2 dada por

$$c(t) = (\cos t)(1, 0, 0) + (\sin t) \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

La imagen de c no contiene a $N = (0, 0, 1)$ y por tanto está enteramente contenida en el dominio de la carta dada por la proyección estereográfica de polo Norte ($S^2 - \{N\}, P_N = (x^1, x^2)$).

La expresión local de c en esta carta y la (\mathbb{R}, r) viene dada por

$$\begin{aligned} P_N \circ c \circ r^{-1}(r) &= P_N(c(r)) = P_N \left(\cos r, \frac{\sin r}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \sin r \right) = \\ &= \frac{(\cos r, (\sin r)/\sqrt{3})}{1 - \sqrt{2/3} \sin r} = \left(\frac{\sqrt{3} \cos r}{\sqrt{3} - \sqrt{2} \sin r}, \frac{\sin r}{\sqrt{3} - \sqrt{2} \sin r} \right) \end{aligned}$$

Vemos en particular que $c \in C^\infty(\mathbb{R}, S^2)$.

Vamos a calcular el vector tangente a c en $\pi \in \mathbb{R}$. De la definición se deduce

$$\begin{aligned} \dot{c}_\pi(x^1) &= \left(T_\pi c \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)_\pi \right) (x^1) = \left(\frac{d}{dr} \right)_\pi (x^1 \circ c) = (x^1 \circ c)'(\pi) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3} \cos r}{\sqrt{3} - \sqrt{2} \sin r} \right)'(\pi) = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

y, de manera similar,

$$\dot{c}_\pi(x^2) = \left(\frac{\sin r}{\sqrt{3} - \sqrt{2} \sin r} \right)'(\pi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dado que $c(\pi) = (-1, 0, 0)$ resulta entonces

$$\dot{c}_\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_{(-1,0,0)} - \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_{(-1,0,0)} \right).$$

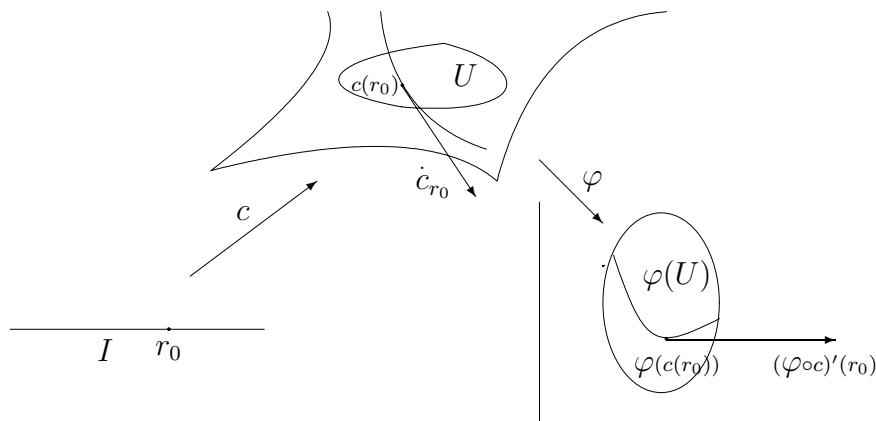


Figura 3.1: Vector tangente a una curva.

El procedimiento indicado en 3.7.1 es general. Si $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta y $r_0 \in I$ es tal que $c(r_0) \in U$, entonces $\varphi \circ c \circ r^{-1} = \varphi \circ c = (x^1 \circ c, \dots, x^n \circ c)$ está definida y es diferenciable en un entorno de r_0 . Se tiene

$$\dot{c}_{r_0}(x^i) = \left(T_{r_0}c \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)_{r_0} \right) (x^i) = \left(\frac{d}{dr} \right)_{r_0} (x^i \circ c) = (x^i \circ c)'(r_0)$$

y por tanto

$$\dot{c}_{r_0} = \sum_{i=1}^n (x^i \circ c)'(r_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(r_0)}.$$

Vemos así que las componentes de \dot{c}_{r_0} en la base de las $(\partial/\partial x^i)_{c(r_0)}$ son las del vector $(\varphi \circ c)'(r_0)$, tangente en el sentido del cálculo a la curva de \mathbb{R}^n $\varphi \circ c$, que recibe el nombre de **expresión local** de c en la carta considerada.

Ejercicio 3.7.2 Calcular la expresión de $\dot{c}_{\pi/4}$ en la base asociada con la carta (U_e, Q_e) , $U_e = \{(x, y, z) \in S^2 : y > 0\}$, $Q_e(x, y, z) = (x, z)$, donde c es la curva dada en 3.7.1.

Dado un vector tangente a M en p , v , y un número real, r_0 , existe una curva de M definida en un entorno de r_0 cuyo vector tangente en r_0 sea v . En efecto, sea $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta en p y

$$v = \sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

Dada la curva $\gamma(r) = \varphi(p) + (r - r_0)(a^1, \dots, a^n)$, que es C^∞ como aplicación en \mathbb{R}^n y cumple $\gamma(r_0) = \varphi(p)$, existe un intervalo abierto, I , que contiene a r_0 tal que $\gamma(I) \subset \varphi(U)$. Sea $c = \varphi^{-1} \circ \gamma|_I : I \rightarrow U \subset M$. La curva c es C^∞ porque su expresión local en las cartas (I, Id_I) , (U, φ) es $\gamma|_I$. Se tiene $(\varphi \circ c)'(r_0) = \gamma'(r_0) = (a^1, \dots, a^n)$, luego

$$\dot{c}_{r_0} = \sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = v$$

La regla de la cadena nos permite entonces caracterizar la aplicación tangente de una aplicación dada de la manera siguiente.

Sea $f \in C^\infty(M, N)$, $p \in M$ y c una curva de M tal que $c(r_0) = p$. Entonces $f \circ c$ es una curva de N tal que $f \circ c(r_0) = f(p)$, cuyo vector tangente en r_0 será designado por $\overline{f \circ c}_{r_0}$.

Proposición 3.7.3 *En las condiciones anteriores*

$$T_p f \cdot \dot{c}_{r_0} = \overline{f \circ c}_{r_0}.$$

Demostración. Se tiene

$$\overline{f \circ c}_{r_0} = T_{r_0}(f \circ c) \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)_{r_0} = (T_{c(r_0)}f \circ T_{r_0}c) \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)_{r_0} = T_p f \cdot \dot{c}_{r_0}.$$

□

Ejemplo 3.7.4 Sean a y b números reales tales que $a > b > 0$. Se designa por C la circunferencia de radio b en el plano yz con centro en $(0, a, 0)$. Llamaremos Toro, T^2 , a la figura de \mathbb{R}^3 obtenida al hacer girar C alrededor del eje z .

T^2 es descrito por el punto P de la figura 3.2 cuando varían θ y φ en \mathbb{R} . Está formado por los (x, y, z) tales que

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + z^2 = b^2$$

de forma que es $f^{-1}(b^2)$ si $f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + z^2$. Esta función es diferenciable en el complementario del eje z y $f^{-1}(b^2)$ está contenido en ese conjunto, por lo que nos restringiremos a él. La jacobiana de f es

$$\left(\frac{2 \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right) x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2 \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right) y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right)$$

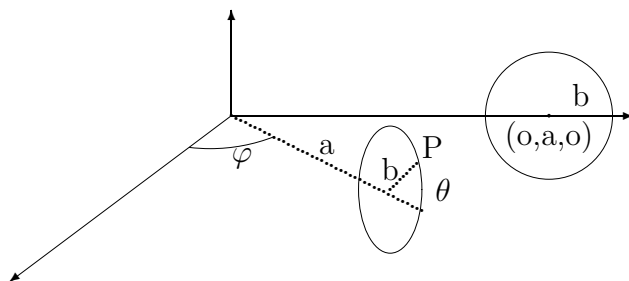


Figura 3.2: Toro.

que, en el complementario del eje z , solo se anula si $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ y $z = 0$, pero en esos puntos f vale 0 y no b^2 , luego f es submersión en todo punto de $f^{-1}(b^2)$, por lo que este subconjunto es una subvariedad de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 .

Consideremos la aplicación que a cada $(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ hace corresponder el punto P de la figura. Queremos demostrar que es un difeomorfismo. Desde luego es biyección, por lo que basta demostrar que es difeomorfismo local, *i.e.* que su aplicación tangente en cada punto es un isomorfismo.

La aplicación viene dada por

$$D : (e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow ((a + b \cos \theta) \cos \varphi, (a + b \cos \theta) \sin \varphi, b \sin \theta) \in T^2$$

Para ver que es diferenciable, se pueden tomar cartas locales o proceder como sigue: se considera

$$D_0 : ((x, y), (z, t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow ((a + bx)z, (a + bx)t, by) \in \mathbb{R}^3$$

que es obviamente C^∞ . Si designamos por $i_{\mathbb{S}^1} : e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1 \longrightarrow (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$ la inyección canónica, vemos que D no es más que $D_0 \circ (i_{\mathbb{S}^1} \times i_{\mathbb{S}^1})$, pensada como aplicación en T^2 . Como aplicación en \mathbb{R}^3 es C^∞ por serlo D_0 e $i_{\mathbb{S}^1} \times i_{\mathbb{S}^1}$. Entonces también lo es como aplicación en T^2 , como consecuencia del siguiente resultado

Lema 3.7.5 *Sea M una variedad, S una subvariedad de \mathbb{R}^n y $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ tal que $f(M) \subset S$. Entonces, pensada como aplicación en S , $f \in C^\infty(M, S)$.*

Demostración. Dado $p \in M$, consideremos una carta (U, φ) de M en p y un difeomorfismo, Φ , de un entorno, V , de $f(p) \in S$, en \mathbb{R}^n tal que $\Phi(S \cap V) = \mathbb{R}^d \times \{(0, \dots, 0)\}$. Restringiendo φ al abierto $U \cap f^{-1}(V)$ si fuese necesario, podemos suponer que $f(U) \subset V$, de forma que $f(U) \subset V \cap S$. Una carta de S en $f(p)$ es $\pi \circ \Phi|_{V \cap S}$, donde π es la proyección $(a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow (a^1, \dots, a^d) \in \mathbb{R}^d$. La expresión local de f en esta carta y la (U, φ) es $(\pi \circ \Phi) \circ f \circ \varphi^{-1} = \pi \circ (\Phi \circ f \circ \varphi^{-1})$. Pero π es C^∞ y $\Phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ también, por ser la expresión local de f como aplicación en \mathbb{R}^n , en las cartas (U, φ) y (V, Φ) .

□

Consideremos la aplicación $F \equiv i_{T^2} \circ D : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde i_{T^2} es la inyección canónica de T^2 en \mathbb{R}^3 . Para cada $(p, q) = (e^{i\theta}, e^{i\varphi})$ se tiene $T_{(p,q)}F = T_{D(p,q)}i_{T^2} \circ T_{(p,q)}D$. Si demostramos que $T_{(p,q)}F$ tiene al menos rango 2, se deducirá que $T_{(p,q)}D$ tiene al menos rango 2 y entonces tiene que ser 2 por ser esa la dimensión de T^2 y resultará que $T_{(p,q)}D$ es un isomorfismo.

Sean $\gamma(t) = (e^{i(\theta+t)}, e^{i\varphi})$, y $\delta(t) = (e^{i\theta}, e^{i(\varphi+t)})$. Entonces $\gamma(0) = \delta(0) = (p, q)$, $F \circ \gamma(t) = ((a + b \cos(\theta + t)) \cos \varphi, (a + b \cos(\theta + t)) \sin \varphi, b \sin(\theta + t))$, y $F \circ \delta(t) = ((a + b \cos \theta) \cos(\varphi + t), (a + b \cos \theta) \sin(\varphi + t), b \sin \theta)$, con lo que

$$\overline{F \circ \gamma_0} = ((-b \sin \theta \cos \varphi, -b \sin \theta \sin \varphi, b \cos \theta), (p, q))$$

y

$$\overline{F \circ \delta_0} = ((-(a + b \cos \theta) \sin \varphi, (a + b \cos \theta) \cos \varphi, 0), (p, q)).$$

Pero estos vectores coinciden con $T_{(p,q)}F \cdot \dot{\gamma}_0$ y $T_{(p,q)}F \cdot \dot{\delta}_0$, por lo que basta demostrar que son linealmente independientes. Para verlo, consideramos el sistema

$$0 = \begin{vmatrix} -b \sin \theta \cos \varphi, & -b \sin \theta \sin \varphi \\ -(a + b \cos \theta) \sin \varphi, & (a + b \cos \theta) \cos \varphi \end{vmatrix} = -b \sin \theta (a + b \cos \theta) \quad (3.4)$$

$$0 = \begin{vmatrix} -b \sin \theta \sin \varphi, & b \cos \theta \\ (a + b \cos \theta) \cos \varphi, & 0 \end{vmatrix} = b \cos \theta (a + b \cos \theta) \cos \varphi \quad (3.5)$$

$$0 = \begin{vmatrix} -b \sin \theta \cos \varphi, & b \cos \theta \\ -(a + b \cos \theta) \sin \varphi, & 0 \end{vmatrix} = -b \cos \theta (a + b \cos \theta) \sin \varphi. \quad (3.6)$$

La ecuación 3.4 sólo se cumple si $\sin \theta = 0$, lo que implica $\cos \theta = \pm 1$ y entonces 3.5 y 3.6 implicarían $\sin \varphi = \cos \varphi = 0$. Absurdo.

Otro resultado sencillo que resulta muy útil es el siguiente

Lema 3.7.6 Si U es un abierto de M , $F \in C^\infty(U)$, $c : I \rightarrow U$ es una curva diferenciable y $t \in I$, entonces

$$\dot{c}_t(F) = \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=t} F \circ c(r).$$

Demostración. Se tiene

$$\dot{c}_t(F) = \left(T_t c \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)_t \right) (F) = \left(\frac{d}{dr} \right)_t (F \circ c).$$

□

3.8. Espacio tangente de una variedad producto

Sean M , N y P variedades de dimensiones m , n y s respectivamente, $(p, q) \in M \times N$ y $f \in C^\infty(U, P)$, donde U es un entorno abierto de (p, q) en $M \times N$. Las aplicaciones

$$f(\cdot, q) : a \rightarrow f(a, q)$$

y

$$f(p, \cdot) : b \rightarrow f(p, b),$$

están bien definidas en sendos entornos abiertos de p y q en M y N respectivamente. Para ver que estos entornos son abiertos y comprobar la diferenciable de estas aplicaciones, se puede proceder como sigue.

Se consideran

$$i(\cdot, q) : a \in M \rightarrow (a, q) \in M \times N$$

y

$$i(p, \cdot) : b \in N \rightarrow (p, b) \in M \times N,$$

que son aplicaciones C^∞ . En $(i(\cdot, q))^{-1}(U)$, que es abierto por ser $i(\cdot, q)$ continua, se puede definir $f(\cdot, q)$ y se tiene $f(\cdot, q) = f \circ i(\cdot, q)$. De la misma forma, en $(i(p, \cdot))^{-1}(U)$ se puede definir $f(p, \cdot)$, y se tiene $f(p, \cdot) = f \circ i(p, \cdot)$. Se deduce en particular de lo anterior, que $f(\cdot, q)$ y $f(p, \cdot)$ son C^∞ .

Definimos a continuación dos aplicaciones. Por una parte se considera

$$i_{(p,q)} : T_p M \times T_q N \rightarrow T_{(p,q)}(M \times N),$$

dada por $i_{(p,q)}(u, v) \cdot g = u \cdot g(\cdot, q) + v \cdot g(p, \cdot)$, para todos $u \in T_p M$, $v \in T_q N$, y $g \in C^\infty(U)$, siendo U un entorno abierto de (p, q) en $M \times N$.

Ejercicio 3.8.1 Demostrar que en las condiciones anteriores $i_{(p,q)}(u, v) \in T_{(p,q)}(M \times N)$.

Por otra parte se designan por π_1 y π_2 las proyecciones canónicas de $M \times N$ sobre M y N respectivamente, que son diferenciables, y se considera la aplicación

$$(T_{(p,q)}\pi_1, T_{(p,q)}\pi_2) : w \in T_{(p,q)}(M \times N) \longrightarrow (T_{(p,q)}\pi_1 \cdot w, T_{(p,q)}\pi_2 \cdot w) \in T_pM \times T_qN$$

Lema 3.8.2 *Ambas aplicaciones son lineales e inversa una de la otra.*

Demostración. La linealidad es inmediata. Vamos a demostrar que $(T_{(p,q)}\pi_1, T_{(p,q)}\pi_2) \circ i_{(p,q)}$ es la aplicación idéntica de $T_pM \times T_qN$, lo que acabará la demostración, pues se trata de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de la misma dimensión.

Si $u \in T_pM$, $v \in T_qN$, $f_M \in C^\infty(A)$ y $f_N \in C^\infty(B)$, siendo A y B entornos abiertos de p y q en M y N respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} T_{(p,q)}\pi_1 \circ i_{(p,q)}(u, v) \cdot f_M &= i_{(p,q)}(u, v) \cdot (f_M \circ \pi_1) = \\ &= u(f_M \circ \pi_1(\cdot, q)) + v(f_M \circ \pi_1(p, \cdot)) = u \cdot f_M \end{aligned}$$

y, de la misma forma

$$T_{(p,q)}\pi_2 \circ i_{(p,q)}(u, v) \cdot f_N = v \cdot f_N$$

de donde se deduce que $(T_{(p,q)}\pi_1, T_{(p,q)}\pi_2) \circ i_{(p,q)}(u, v) = (u, v)$.

□

Si $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ es una carta de M en p y $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ una de N en q , sabemos que $(U \times V, \varphi \times \psi = (x^1 \circ \pi_1, \dots, x^m \circ \pi_1, y^1 \circ \pi_2, \dots, y^n \circ \pi_2))$ es una carta de $M \times N$ en (p, q) .

Dados

$$u = \sum_{i=1}^m u^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad \text{y} \quad v = \sum_{j=1}^n v^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_q \quad (3.7)$$

se tiene

$$\begin{aligned} i_{(p,q)}(u, v) \cdot (x^i \circ \pi_1) &= u \cdot x^i = u^i \\ i_{(p,q)}(u, v) \cdot (y^j \circ \pi_2) &= v \cdot y^j = v^j \end{aligned}$$

de forma que

$$i_{(p,q)}(u, v) = \sum_{i=1}^m u^i \left(\frac{\partial}{\partial (x^i \circ \pi_1)} \right)_{(p,q)} + \sum_{j=1}^n v^j \left(\frac{\partial}{\partial (y^j \circ \pi_2)} \right)_{(p,q)}.$$

En lo sucesivo, identificamos $T_p M \times T_q N$ con $T_{(p,q)}(M \times N)$ mediante $i_{(p,q)}$ y suprimimos π_1 y π_2 en la denominación de las coordenadas $x^i \circ \pi_1$, y $y^j \circ \pi_2$ de $M \times N$, aunque su presencia se sobreentiende. Así podremos decir que $(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n)$ es un sistema de coordenadas de $M \times N$, que en las condiciones de las ecuaciones 3.7 se tiene $(u, v) \in T_{(p,q)}(M \times N)$ y que

$$(u, v) = \sum_{i=1}^m u^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p,q)} + \sum_{j=1}^n v^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{(p,q)}.$$

El siguiente teorema es de gran importancia para cálculos prácticos

Teorema 3.8.3 Si $\Phi \in C^\infty(M \times N, P)$

$$T_{(p,q)}\Phi \cdot (u, v) = T_p\Phi(\cdot, q) \cdot u + T_q\Phi(p, \cdot) \cdot v.$$

Demostración. Si f es una función C^∞ en un entorno en P de $\Phi(p, q)$ se tiene

$$\begin{aligned} (T_{(p,q)}\Phi \cdot (u, v)) \cdot f &= (T_{(p,q)}\Phi \circ i_{(p,q)}(u, v)) \cdot f = (i_{(p,q)}(u, v)) \cdot (f \circ \Phi) = \\ &= u(f \circ \Phi(\cdot, q)) + v(f \circ \Phi(p, \cdot)) = (T_p\Phi(\cdot, q) \cdot u) \cdot f + (T_q\Phi(p, \cdot) \cdot v) \cdot f. \end{aligned}$$

□

También son extraordinariamente útiles los siguientes resultados

Proposición 3.8.4 Sean $F_1 \in C^\infty(P, M)$, $F_2 \in C^\infty(P, N)$ y $z \in P$. Entonces

$$T_z(F_1, F_2) = (T_z F_1, T_z F_2).$$

Demostración. Se tiene, para todo $w \in T_z P$,

$$\begin{aligned} (T_{F_1(z)}\pi_1, T_{F_2(z)}\pi_2) (T_z(F_1, F_2) \cdot w) &= (T_z(\pi_1 \circ (F_1, F_2))) \cdot w, \\ T_z(\pi_2 \circ (F_1, F_2)) \cdot w &= (T_z F_1 \cdot w, T_z F_2 \cdot w). \end{aligned}$$

□

Obsérvese que toda aplicación de P en $M \times N$ es de la forma $F = (F_1, F_2)$ con $F_1 = \pi_1 \circ F$ y $F_2 = \pi_2 \circ F$. En particular este es el caso para las curvas de $M \times N$.

Corolario 3.8.5 Si $\gamma_1 : I \rightarrow M$ y $\gamma_2 : I \rightarrow N$ son curvas,

$$\overline{(\gamma_1, \gamma_2)}_t = ((\dot{\gamma}_1)_t, (\dot{\gamma}_2)_t).$$

para todo $t \in I$.

Demostración. Se tiene

$$\overline{(\gamma_1, \gamma_2)}_t = T_t(\gamma_1, \gamma_2) \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)_t = \left(T_t \gamma_1 \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)_t, T_t \gamma_2 \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)_t \right) = ((\dot{\gamma}_1)_t, (\dot{\gamma}_2)_t).$$

□

Corolario 3.8.6 Sean M, N, M' y N' variedades, $p \in M, q \in N, F \in C^\infty(M, M')$ y $G \in C^\infty(N, N')$. Entonces

$$T_{(p,q)}(F \times G) = T_p F \times T_q G.$$

Demostración. Recordemos que todo vector tangente a una variedad puede ser obtenido como vector tangente a una curva en 0. Sean γ y δ curvas de M y N respectivamente que cumplen $\gamma(0) = p$ y $\delta(0) = q$. Se tiene

$$\begin{aligned} T_{(p,q)}(F \times G) \cdot (\dot{\gamma}_0, \dot{\delta}_0) &= T_{(p,q)}(F \times G) \cdot \overline{(\gamma, \delta)}_0 = \overline{(F \times G) \circ (\gamma, \delta)}_0 = \\ &= \overline{(F \circ \gamma, G \circ \delta)}_0 = \overline{(F \circ \gamma)_0, (G \circ \delta)_0} = (T_p F \cdot \dot{\gamma}_0, T_q G \cdot \dot{\delta}_0) = \\ &= (T_p F \times T_q G) (\dot{\gamma}_0, \dot{\delta}_0). \end{aligned}$$

□

3.9. Ejercicios complementarios

Ejercicio 3.9.1 En S^2 se consideran las cartas $(U_n, Q_n = (x_n^1, x_n^2))$ y $(U_e, Q_e = (x_e^1, x_e^2))$ y el punto $p = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Sean $\{x, y, z\}$ las coordenadas canónicas de \mathbb{R}^3 . En el abierto, U , de \mathbb{R}^3 , dado por $z \neq 0$ se define f mediante $f(x, y, z) = e^{x/z}$. Se pide

1. Determinar $v(f|_{U \cap S^2})$ siendo $v = 3(\partial/\partial x_n^1)_p - 2(\partial/\partial x_n^2)_p$.
2. Determinar las componentes de v en la base $\{(\partial/\partial x_e^1)_p, (\partial/\partial x_e^2)_p\}$.
3. Determinar la expresión de $(df)_p$ en la base $\{(dx)_p, (dy)_p, (dz)_p\}$ y la de $(d(f|_{U \cap S^2}))_p$ en la $\{(dx_n^1)_p, (dx_n^2)_p\}$. Compruebase explícitamente que, con las identificaciones usuales, $(df)_p$ y $(d(f|_{U \cap S^2}))_p$ coinciden cuando actúan sobre vectores tangentes a S^2 en p .

Ejercicio 3.9.2 Sea $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0\}$, y $g : (u, v) \in U \longrightarrow (e^u, uv^2, u^2) \in \mathbb{R}^3$. Se designa por S a $g(U)$. S es subvariedad de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 y g parametrización de S . Dados los elementos de $T_{(e,1,1)}\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(e,1,1)} + 2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(e,1,1)} - e\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{(e,1,1)} \\ v_2 &= e\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(e,1,1)} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(e,1,1)} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{(e,1,1)} \\ v_3 &= e\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(e,1,1)} + 7\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(e,1,1)} + 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{(e,1,1)} \end{aligned}$$

se pide

1. Determinar cuales de ellos pertenecen a $T_{(e,1,1)}i_S(T_{(e,1,1)}S)$.
2. Determinar la expresión en la base asociada a la carta (S, g^{-1}) de los $b \in T_{(e,1,1)}S$ tales que $T_{(e,1,1)}i_S(b) \in \{v_1, v_2, v_3\}$.

Ejercicio 3.9.3 Sea M una variedad compacta y $f \in C^\infty(M)$. Demostrar que existen al menos dos puntos p y q tales que $(df)_p = 0$ y $(df)_q = 0$.

Ejercicio 3.9.4 Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x + 3y^2, 2xy^2, xy)$. Se pide

1. Determinar en qué puntos tiene f rango 2.
2. Calcular

$$T_{(1,-1)}f \left(3\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(1,-1)} - 2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(1,-1)} \right).$$

3. Dar condiciones sobre a, b y c para que

$$a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(4,2,-1)} + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(4,2,-1)} + c\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{(4,2,-1)}$$

esté en la imagen de $T_{(1,-1)}f$.

Ejercicio 3.9.5 Determinar la aplicación tangente en $[2, 1, -1]$ de la aplicación f del problema 2.9.10, dando su matriz en diferentes pares de bases.

Ejercicio 3.9.6 Con la notación del problema 2.9.11, se pide

- a) Caracterizar el espacio tangente a L en $(1, 1, 0)$ como subespacio de \mathbb{R}^3 .
- b) Determinar las matrices de $T_{(1,1,0)}h$ y $T_{(1,1,0)}g$ en bases apropiadas.

Ejercicio 3.9.7 Con la notación del problema 2.9.12, se pide

- Caracterizar el espacio tangente a P en $k([1, 1, 2])$ como subespacio de \mathbb{R}^3 .
- Determinar la matriz de $T_{[1,1,2]}k$ en bases apropiadas.

Ejercicio 3.9.8 Se considera la aplicación h del ejercicio 2.9.13 y $p = [0, 1, 0] \in P^2(\mathbb{R})$. Dar bases de $T_p P^2(\mathbb{R})$ y de $T_{h(p)} P^2(\mathbb{R})$ y la matriz de $T_p h$ en esas bases.

Ejercicio 3.9.9 Sea $f : S^2 \times S^2 \longrightarrow S^5$ dada por

$$f((x, y, z), (x', y', z')) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{\sqrt{2}}, \frac{x'}{\sqrt{2}}, \frac{y'}{\sqrt{2}}, \frac{z'}{\sqrt{2}} \right).$$

Se pide

- Demostrar que $f \in C^\infty(S^2 \times S^2, S^5)$, cuando en $S^2 \times S^2$ consideramos la estructura diferenciable producto.
- Ver en qué puntos $(a, b) \in S^2 \times S^2$ es inyectiva $T_{(a,b)}f$ y en cuales es suprayectiva.

Capítulo 4

Campos de vectores

4.1. Fibrado tangente

Sea M una variedad. Designemos por TM al conjunto $\cup_{p \in M} T_p M$, y por $\tau_M : TM \rightarrow M$ a la aplicación que a cada $v \in TM$ hace corresponder el p tal que $v \in T_p M$.

Para cada carta, $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, de M , se considera el par $(\tau_M^{-1}(U), \underline{\varphi} = (\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^n, x^1 \circ \tau_M, \dots, x^n \circ \tau_M))$, donde $\underline{x}^i : \tau_M^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $\underline{x}^i(v) = v(x^i)$, $i = 1, \dots, n$.

Un elemento genérico, v , de $\tau_M^{-1}(U)$ es de la forma

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

con $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}$, $p \in U$, y entonces $\underline{\varphi}(v) = (v^1, \dots, v^n, x^1(p), \dots, x^n(p)) = (v^1, \dots, v^n, \varphi(p))$. Vemos así que cuando v recorre $\tau_M^{-1}(U)$, $\underline{\varphi}(v)$ recorre $\mathbb{R}^n \times \varphi(U)$, que es un abierto de \mathbb{R}^{2n} . En consecuencia estos pares son cartas locales $2n$ -dimensionales de TM . Vamos a demostrar que su conjunto forma un atlas.

Si $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ es otra carta de M tal que $\tau_M^{-1}(U) \cap \tau_M^{-1}(V) \neq \emptyset$, entonces, dado que $\tau_M^{-1}(U) \cap \tau_M^{-1}(V) = \tau_M^{-1}(U \cap V)$, ha de ser $U \cap V \neq \emptyset$, y $\underline{\psi}(\tau_M^{-1}(U) \cap \tau_M^{-1}(V)) = \mathbb{R}^n \times \psi(U \cap V)$, es abierto.

Por otra parte, si escribimos:

$$(\underline{y}^1, \dots, \underline{y}^n, y^1, \dots, y^n) = \underline{\psi} \circ \underline{\varphi}^{-1} (\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^n, x^1, \dots, x^n)$$

se tiene

$$\underline{\psi}^{-1} (\underline{y}^1, \dots, \underline{y}^n, y^1, \dots, y^n) = \underline{\varphi}^{-1} (\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^n, x^1, \dots, x^n)$$

luego

$$\sum_{j=1}^n \underline{y}^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{\psi^{-1}(y^1, \dots, y^n)} = \sum_{i=1}^n \underline{x}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)}$$

de donde se deduce

$$\begin{pmatrix} \underline{y}^1 \\ \vdots \\ \underline{y}^n \end{pmatrix} = J_{(x^1, \dots, x^n)} \psi \circ \varphi^{-1} \begin{pmatrix} \underline{x}^1 \\ \vdots \\ \underline{x}^n \end{pmatrix}$$

$$(y^1, \dots, y^n) = \psi \circ \varphi^{-1} (x^1, \dots, x^n)$$

lo que demuestra que los cambios de coordenadas son C^∞ .

El conjunto TM , dotado de la estructura diferenciable correspondiente a este atlas se llama **espacio total del fibrado tangente de la variedad diferenciable** M , mientras que τ_M recibe el nombre de **fibrado tangente de la variedad diferenciable** M . A veces se usa este último nombre para designar a TM . Si no se dice nada en contra, cada vez que se hable de TM se le considerará dotado de esta estructura diferenciable.

La aplicación τ_M es C^∞ porque su expresión local en cada par de cartas como $(\tau_M^{-1}(U), \underline{\varphi})$ y (U, φ) , es la proyección canónica de $\mathbb{R}^n \times \varphi(U)$ sobre $\varphi(U)$.

4.2. Concepto

Sea M una variedad diferenciable y U un subconjunto de M . Se llama **campo de vectores** de M sobre U a toda sección de τ_M sobre U *i.e.* toda aplicación $X : U \rightarrow TM$ tal que $\tau_M \circ X = Id_U$.

Sea X un campo de vectores sobre U . Para cada p en U , $X(p)$ es un vector tangente a M tal que $\tau_M(X(p)) = p$ *i.e.* $X(p) \in T_p M$. En lo sucesivo designaremos a $X(p)$ por X_p .

Ejemplo 4.2.1 Sea $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta de M . Cada aplicación

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : p \in U \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \in TM$$

es un campo de vectores sobre U .

Observación 4.2.2 Sea $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta local y A un abierto de U . Dado que, para todo $p \in A$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial (x^i|_A)} \right)_p$$

se identifica mediante $T_p i_A$ con

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p,$$

se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial (x^i|_A)} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_A.$$

Si X un campo de vectores sobre U , V es un abierto de M tal que $U \cap V \neq \emptyset$ y $f \in C^\infty(V)$, X asocia a f una función, $X(f)$ definida en $U \cap V$ mediante

$$(X(f))(p) = X_p(f).$$

Obsérvese que si U es abierto, en las condiciones anteriores, $X(f) = (X|_{U \cap V})(f|_{U \cap V})$.

Ejemplo 4.2.3 Si $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta de M y $f \in C^\infty(U)$, se tiene para todo $p \in U$

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) (f) \right) (p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (f) = \partial_i (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$$

es decir

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) (f) = \partial_i (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi.$$

lo que equivale a decir que la expresión local de $(\partial/\partial x^i)(f)$ es $\partial_i(f \circ \varphi^{-1})$. Vemos en particular que $(\partial/\partial x^i)(f)$ es C^∞ .

En la práctica, muchas veces conocemos una expresión de f en función de las funciones coordenadas, digamos $f(x^1, \dots, x^n)$. Entonces la expresión de $(\partial/\partial x^i)(f)$ en función de las x^k es la derivada parcial ordinaria

$$\frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i}.$$

En efecto, si designamos por (x^1, \dots, x^n) un punto genérico de $\varphi(U)$, $f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ tiene por expresión, en función de los números x^i a $f(x^1, \dots, x^n)$ y entonces $\partial_i(f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n)$ tiene por expresión a $\partial f(x^1, \dots, x^n)/\partial x^i$.

Si $f \in C^\infty(V)$, con $U \cap V \neq \emptyset$, se aplica lo anterior a la función $f|_{U \cap V}$ y la carta $(U \cap V, \varphi|_{U \cap V})$. En particular $(\partial/\partial x^i)(f)$ es C^∞ en $U \cap V$.

La función $(\partial/\partial x^i)(f)$ será designada en general por

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Con esta notación podemos escribir

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j.$$

Ejemplo 4.2.4 Se designa por f la función sobre S^2 que en cada punto vale el cuadrado de su distancia a $(1,1,1)$ y por X a $\partial/\partial x_n^2$ donde $(U_n, Q_n = (x_n^1, x_n^2))$ es la carta ya utilizada en otras ocasiones, dada por la proyección del “hemisferio norte” sobre el plano ecuatorial.

Para determinar $X(f)$ se puede proceder así: en primer lugar se ve que

$$f \circ Q_n^{-1}(x_n^1, x_n^2) = (1 - x_n^1)^2 + (1 - x_n^2)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - (x_n^1)^2 - (x_n^2)^2}\right)^2,$$

de donde

$$X(f) = 2 \left(\frac{x_n^2}{\sqrt{1 - (x_n^1)^2 - (x_n^2)^2}} - 1 \right)$$

Ejemplo 4.2.5 Si X es un campo de vectores sobre U y $(A, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta tal que $U \cap A \neq \emptyset$, $X(x^i)$ es la función que en cada $p \in U \cap A$ vale la componente de X_p sobre $(\partial/\partial x^i)_p$, $X_p(x^i)$, por lo que, para cada $p \in A \cap U$, se tiene

$$X_p = \sum_{i=1}^n (X(x^i))(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad (4.1)$$

Si Y es otro campo de vectores en U , $a \in \mathbb{R}$ y f es una aplicación de U en \mathbb{R} , se definen campos de vectores $X + Y$, fX y aX mediante

1. $(X + Y)_p \equiv X_p + Y_p.$
2. $(fX)_p \equiv f(p) X_p.$
3. $(aX)_p \equiv a X_p.$

Para las operaciones 1 y 3, el conjunto de los campos de vectores sobre U es un espacio vectorial real y para las operaciones 1 y 2, un módulo sobre el anillo de las funciones reales en U .

Si el lector no está familiarizado con la noción de módulo, no se preocupe demasiado, no es esencial para lo que sigue. Para que se haga una idea podemos decirle que es como un espacio vectorial en el que los “escalares” no forman un cuerpo, sino sólo un anillo, es decir, no siempre se puede dividir por los no nulos.

Ejercicio 4.2.6 Demostrar que, si V es un abierto de M tal que $U \cap V \neq \emptyset$ y $F \in C^\infty(V)$, entonces $(X + Y)(F) = X(F) + Y(F)$, $(fX)(F) = f(X(F))$ y $(aX)(F) = a(X(F))$.

La suma así definida es asociativa, por lo que se suprimirán paréntesis, de la forma habitual, cuando se tengan más de dos sumandos.

Ejemplo 4.2.7 En \mathbb{R}^3 se considera la carta $(\mathbb{R}^3, Id_{\mathbb{R}^3} = (x, y, z))$, el campo de vectores

$$X = xy \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} - (x^2 + z) \frac{\partial}{\partial z}$$

y la función $f(x, y, z) = e^{xyz}$.

Se tiene

$$X(f) = xy \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial y} - (x^2 + z) \frac{\partial f}{\partial z} = xe^{xyz}(y^2z + z^2 - (x^2 + z)y).$$

Con estas operaciones la ecuación 4.1 puede ser escrita

$$X|_{A \cap U} = \sum_{i=1}^n X(x^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{A \cap U}.$$

lo que demuestra que podemos escribir

$$X|_{A \cap U} = \sum_{i=1}^n X^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{A \cap U}$$

donde X^i son funciones definidas en $A \cap U$ con valores en \mathbb{R} .

El segundo miembro se llama **expresión local** de X en la carta considerada y las funciones X^i , **componentes** de X para el sistema de coordenadas φ .

En las condiciones anteriores, si f es una función C^∞ en $U \cap A$, como consecuencia del ejercicio 4.2.6, se tiene

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Las componentes están unívocamente determinadas y se tiene $X^i = X(x^i)$ para todo i .

Es inmediato comprobar que si

$$X|_{A \cap U} = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{A \cap U}, \quad Y|_{A \cap U} = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{A \cap U},$$

$f \in C^\infty(U)$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$(X + Y)|_{A \cap U} = \sum_{i=1}^n (X^i + Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{A \cap U}.$$

$$(fX)|_{A \cap U} = \sum_{i=1}^n (f|_{A \cap U} X^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{A \cap U}.$$

$$(aX)|_{A \cap U} = \sum_{i=1}^n (aX^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{A \cap U}.$$

Vamos a ver como son los cambios de componentes de un campo de vectores frente a un cambio de sistema de coordenadas.

Sean $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ y $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ cartas locales tales que $U \cap V \neq \emptyset$ y X un campo de vectores en $U \cap V$ tal que

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{U \cap V} = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{U \cap V}$$

Queremos calcular las Y^j en función de las X^i , o, mejor aún, la expresión local de las Y^j en la carta $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ en función de las expresiones locales de las X^i en la carta $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$.

Evidentemente

$$Y^j = X(y^j) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

pero aquí, si conocemos X^i e y^j en función de las x^k , obtenemos Y^j en función de las x^k , no su expresión local en la carta $\psi = (y^1, \dots, y^n)$. Para obtenerla, debemos substituir las x^k por su expresión en función de las y^j .

Con mayor detalle, si $y^j = y^j(x^1, \dots, x^n)$ son las ecuaciones de $(y^1, \dots, y^n) = \psi \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ y $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ las de $(x^1, \dots, x^n) = \varphi \circ \psi^{-1}(y^1, \dots, y^n)$, se tiene

$$Y^j(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)) = X_{\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)}(y^j) =$$

$$= \sum_{i=1}^n X^i(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)) \frac{\partial y^j(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i},$$

que nos da Y^j en función de las x^i , de forma que si en esta expresión ponemos $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$, sale la expresión de Y^j en función de las y^j , $Y^j \circ \psi^{-1}(y^1, \dots, y^n)$.

Vemos así que para calcular las $Y^j \circ \psi^{-1}(y^1, \dots, y^n)$ se puede proceder así:

1. Se multiplica

$$\begin{pmatrix} X^1 \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ X^n \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}$$

por la jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

con lo que se obtiene

$$\begin{pmatrix} Y^1 \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ Y^n \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}.$$

2. Se usan $y^j = y^j(x^1, \dots, x^n)$ ó $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ para obtener

$$\begin{pmatrix} Y^1 \circ \psi^{-1}(y^1, \dots, y^n) \\ \vdots \\ Y^n \circ \psi^{-1}(y^1, \dots, y^n) \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.2.8 En S^2 se considera un campo de vectores, X , cuya expresión local en la carta $(S^2 - \{N\}, P_N = (x_N^1, x_N^2))$ es

$$X = x_N^2 \frac{\partial}{\partial x_N^1} - x_N^1 \frac{\partial}{\partial x_N^2}.$$

Para escribir la expresión local de X en la carta $(S^2 - \{S\}, P_S = (x_S^1, x_S^2))$, se recuerda que

$$P_S \circ P_N^{-1}(z) = \frac{z}{\|z\|^2},$$

lo que implica que

$$(x_S^1, x_S^2) = P_S \circ P_N^{-1}(x_N^1, x_N^2),$$

equivale a

$$x_S^1 = \frac{x_N^1}{(x_N^1)^2 + (x_N^2)^2}$$

$$x_S^2 = \frac{x_N^2}{(x_N^1)^2 + (x_N^2)^2}.$$

De aquí se deduce que las componentes de $X_{P_N^{-1}(x_N^1, x_N^2)}$ en la base

$$\left((\partial/\partial x_S^1)_{P_N^{-1}(x_N^1, x_N^2)}, (\partial/\partial x_S^2)_{P_N^{-1}(x_N^1, x_N^2)} \right)$$

son el producto de

$$\begin{pmatrix} x_N^2 \\ -x_N^1 \end{pmatrix}$$

por la jacobiana

$$\frac{\partial(x_S^1, x_S^2)}{\partial(x_N^1, x_N^2)} = \begin{pmatrix} \frac{(x_N^2)^2 - (x_N^1)^2}{((x_N^1)^2 + (x_N^2)^2)^2} & \frac{-2x_N^1 x_N^2}{((x_N^1)^2 + (x_N^2)^2)^2} \\ \frac{-2x_N^1 x_N^2}{((x_N^1)^2 + (x_N^2)^2)^2} & \frac{(x_N^1)^2 - (x_N^2)^2}{((x_N^1)^2 + (x_N^2)^2)^2} \end{pmatrix},$$

que resulta ser

$$\begin{pmatrix} \frac{x_N^2}{(x_N^1)^2 + (x_N^2)^2} \\ -\frac{x_N^1}{(x_N^1)^2 + (x_N^2)^2} \end{pmatrix}$$

lo que en términos de (x_S^1, x_S^2) se escribe

$$\begin{pmatrix} x_S^2 \\ -x_S^1 \end{pmatrix}$$

Podemos pues escribir

$$X|_{S^2 - \{N, S\}} = x_S^2 \frac{\partial}{\partial x_S^1} - x_S^1 \frac{\partial}{\partial x_S^2}. \quad (4.2)$$

Definición 4.2.9 *Se dice que X es C^∞ si lo es como aplicación entre variedades.*

Lema 4.2.10 *Supongamos U abierto y que X es un campo de vectores en U . Las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

1. X es C^∞ .
2. Para toda carta $(A, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ de U , cada $X(x^i)$ es C^∞ .
3. Para cada $p \in U$ existe una carta de U en p , $(A, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, tal que cada $X(x^i)$ es C^∞ .

Demostración. Dada una carta $(A, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ de U , la expresión local de X en las cartas (A, φ) y $(\tau_M^{-1}(A), \underline{\varphi})$ es

$$(x^1, \dots, x^n) \in \varphi(A) \longrightarrow \underline{\varphi}(X_{\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)}) = \\ (X(x^1) \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n), \dots, X(x^n) \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n), x^1, \dots, x^n)$$

que es C^∞ sii lo son las $X(x^i)$.

Es entonces fácil ver que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

□

Ejemplo 4.2.11 Definimos un campo de vectores, X , en S^2 , como aquel que coincide en $S^2 - \{N\}$ con el dado en 4.2.8 y que en N vale 0. ¿Es C^∞ ?

Según el lema anterior, es obviamente C^∞ en $S^2 - \{N\}$, porque en todos los puntos de este abierto podemos tomar la carta dada por la proyección estereográfica de polo norte y las componentes de X en ese sistema de coordenadas son C^∞ .

Para ver que es C^∞ en N , tomamos la carta dada por la proyección estereográfica de polo sur y sabemos que

$$X|_{S^2 - \{N, S\}} = x_S^2 \frac{\partial}{\partial x_S^1} - x_S^1 \frac{\partial}{\partial x_S^2}. \quad (4.3)$$

Pero el campo dado en $S^2 - \{S\}$ por

$$x_S^2 \frac{\partial}{\partial x_S^1} - x_S^1 \frac{\partial}{\partial x_S^2}$$

también vale 0 en N , luego coincide con X por lo que podemos escribir

$$X|_{S^2 - \{S\}} = x_S^2 \frac{\partial}{\partial x_S^1} - x_S^1 \frac{\partial}{\partial x_S^2}, \quad (4.4)$$

lo que demuestra que X es C^∞ en N .

El conjunto de los campos de vectores C^∞ en un abierto U se designará por $\mathcal{D}(U)$.

Ejercicio 4.2.12 Demostrar que:

1. Con las operaciones usuales de suma y producto $C^\infty(U)$ es un anillo.
2. Para las operaciones de suma y producto por funciones, $\mathcal{D}(U)$ es estable, siempre que las funciones sean de $C^\infty(U)$. Dotado de estas operaciones $\mathcal{D}(U)$ es un módulo sobre el anillo $C^\infty(U)$.
3. Para las operaciones de suma y producto por números reales, $\mathcal{D}(U)$ es un espacio vectorial.

Lema 4.2.13 Si $X \in \mathcal{D}(U)$ y $f \in C^\infty(V)$, con $U \cap V \neq \emptyset$, $X(f) \in C^\infty(U \cap V)$.

Demostración. Sea $p \in U \cap V$ y $(A, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta en p . Para todo $q \in A \cap U \cap V$ se tiene

$$\begin{aligned} (X(f))(q) &= \left(\sum_{i=1}^n (X(x^i))(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_q \right) (f) = \sum_{i=1}^n ((X(x^i))(q) \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) (q) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n X(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) (q) \end{aligned}$$

luego $X(f)$ coincide con una función C^∞ en el entorno $A \cap U \cap V$ de p .

□

Ejercicio 4.2.14 Sean $X, Y \in \mathcal{D}(U)$. Demostrar que se tiene $X = Y$ sii $X(f) = Y(f)$ para toda $f \in C^\infty(M)$.

El campo de vectores $X \in \mathcal{D}(U)$ define una aplicación $f \in C^\infty(U) \rightarrow X(f) \in C^\infty(U)$ que será designada también por la letra X . Es un ejercicio comprobar las siguientes propiedades

Proposición 4.2.15 Si $X \in \mathcal{D}(U)$, $f, g \in C^\infty(U)$ y $a \in \mathbb{R}$

1. $X(f + g) = X(f) + X(g)$.
2. $X(af) = aX(f)$.
3. $X(fg) = fX(g) + X(f)g$.

Aplicaciones de $C^\infty(U)$ en sí mismo que cumplan estas propiedades se llaman **derivaciones** de $C^\infty(U)$.

Teorema 4.2.16 *Toda derivación de $C^\infty(U)$ proviene de un único campo de vectores C^∞ .*

Demostración. Sea A una derivación de $C^\infty(U)$. Para cada $p \in U$ definimos X_p de la manera siguiente: dada una función, h , C^∞ en un entorno de p , sea $\tilde{h} \in C^\infty(U)$ que coincida con h en algún entorno de p ; definimos $X_p(h) = [A(\tilde{h})](p)$.

Para ver que con esto hemos definido algo, hemos de comprobar que si $\tilde{h}, \tilde{\tilde{h}} \in C^\infty(U)$ coinciden en un entorno de p , entonces $[A(\tilde{h})](p) = [A(\tilde{\tilde{h}})](p)$. Pero, dado que $[A(\tilde{h} - \tilde{\tilde{h}})](p) = [A(\tilde{h}) - A(\tilde{\tilde{h}})](p) = [A(\tilde{h})](p) - [A(\tilde{\tilde{h}})](p)$, basta demostrar que $[A(g)](p) = 0$ si $g \in C^\infty(U)$ se anula en un entorno de p . Obsérvese en primer lugar que $A(0) = 0$ ya que $A(0) = A(2 \cdot 0) = 2A(0)$. Sea ahora $l \in C^\infty(U)$ tal que vale 1 en un entorno de p y 0 fuera de un entorno abierto de p en que se anule g . Entonces $gl = 0$ y por tanto $0 = (A(gl))(p) = [gA(l) + A(g)l](p) = g(p)[A(l)](p) + [A(g)](p)l(p) = [A(g)](p)$.

Es inmediato comprobar que el X_p así definido es un vector tangente, de forma que la aplicación que envía p a X_p es un campo de vectores, X .

La derivación que define X aplica $f \in C^\infty(U)$ en $X(f)$ definida por $(X(f))(p) = X_p(f) = [A(f)](p)$, luego coincide con A .

Veamos que X es C^∞ . Para cada carta local de U , $(U', \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, vamos a ver que $X(x^i)$ es C^∞ . Dado $p \in U'$, sea \tilde{x}^i una función en $C^\infty(U)$ que coincida con x^i en un entorno, V , de p . Para todo $q \in V$ se tiene $(X(x^i))(q) = X_q(x^i) = [A(\tilde{x}^i)](q)$, de forma que $X(x^i)|_V = A(\tilde{x}^i)|_V$, por lo que $X(x^i)$ es C^∞ en p . En consecuencia $X(x^i) \in C^\infty(U')$.

La unicidad se demuestra así: si Y es otro campo de vectores cuya correspondiente derivación es A , sea $p \in U$ y f diferenciable en un entorno de p . Se considera $F \in C^\infty(U)$ que coincida con f en un entorno de p y entonces se tiene $Y_p(f) = Y_p(F) = (Y(F))(p) = [A(F)](p) = X_p(f)$ luego $Y_p = X_p$.

□

Vemos así que la correspondencia que asocia derivaciones a los campos de vectores diferenciables, es una biyección. El abuso de lenguaje que estamos cometiendo al utilizar la misma letra para un campo de vectores y la derivación correspondiente, equivale a utilizar esta biyección como una identificación.

Obsérvese que con esta identificación, si $X, Y \in \mathcal{D}(U)$, $f \in C^\infty(U)$ y $a \in \mathbb{R}$, nos vemos abocados a escribir $X + Y$, fX y aX por las derivaciones correspondientes a los campos que llevan esos nombres, con lo que hemos definido de manera indirecta operaciones en el conjunto de las derivaciones, que dan lugar a estructuras en ese conjunto para las que la identificación es

isomorfismo. Como se ha visto en el ejercicio 4.2.6, para las derivaciones se tiene $(X + Y)(g) = X(g) + Y(g)$, $(fX)(g) = f(X(g))$ y $(aX)(g) = a(X(g))$, donde g es otro elemento de $C^\infty(U)$.

A continuación vamos a definir otra ley de composición interna en $\mathcal{D}(U)$.

Si $X, Y \in \mathcal{D}(U)$, $X \circ Y$, aunque es lineal para la estructura de espacio vectorial real de $C^\infty(U)$, no es una derivación de $C^\infty(U)$ ya que si $f, g \in C^\infty(U)$ se tiene

$$\begin{aligned} X \circ Y(fg) &= X(Y(f)g + fY(g)) = \\ &= X(Y(f))g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + fX(Y(g)) \end{aligned}$$

que en general no coincide con $X(Y(f))g + fX(Y(g))$. En cambio, se deduce de la igualdad anterior que $X \circ Y - Y \circ X$ es una derivación de $C^\infty(U)$, por lo que proviene de un campo de vectores que será designado, al igual que la derivación correspondiente, por $[X, Y]$ y denominado **corchete de Lie** de X con Y .

Lema 4.2.17 Si $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta local, para todos $i, j = 1, \dots, n$ se tiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Demostración. Para todo $k = 1, \dots, n$ se tiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] (x^k) = \frac{\partial}{\partial x^i} (\delta_j^k) - \frac{\partial}{\partial x^j} (\delta_i^k) = 0.$$

□

La operación

$$(X, Y) \in \mathcal{D}(U) \times \mathcal{D}(U) \longrightarrow [X, Y] \in \mathcal{D}(U) \quad (4.5)$$

tiene las propiedades siguientes

Proposición 4.2.18 Si $X, Y, Z \in \mathcal{D}(U)$ y $a \in \mathbb{R}$:

1. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$.
2. $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$.
3. $[aX, Y] = [X, aY] = a[X, Y]$.
4. $[X, Y] = -[Y, X]$.
5. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Dejamos la demostración como ejercicio. Basta demostrar que las derivaciones correspondientes cumplen esas igualdades, utilizando las operaciones vistas sobre derivaciones.

Las propiedades 1, 2 y 3 se pueden resumir diciendo que la operación 4.5 es **bilineal** para la estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial de $\mathcal{D}(U)$. La 4 se suele enunciar diciendo que esa operación es **antisimétrica**. La quinta propiedad se llama **identidad de Jacobi**. Un espacio vectorial real en el que se ha definido una operación como la 4.5, con estas propiedades, se llama **álgebra de Lie real**. De forma similar se definen álgebras de Lie sobre otros cuerpos.

A continuación vamos a ocuparnos de la determinación de la expresión local de $[X, Y]$ en una carta, en función de las de X e Y . Veamos primero un lema

Lema 4.2.19 *Si V es un abierto contenido en U , $[X, Y]|_V = [X|_V, Y|_V]$.*

Demostración. Sea $f \in C^\infty(V)$, $q \in V$ y \tilde{f} una función en $C^\infty(U)$ que coincide con f en un entorno, A , de q . Entonces

$$\begin{aligned} ([X, Y]|_V(f))(q) &= [X, Y]_q(f) = ([X, Y](\tilde{f}))(q) = \\ &= (X(Y(\tilde{f})) - Y(X(\tilde{f}))) (q) = X_q(Y(\tilde{f})) - Y_q(X(\tilde{f})) = \\ &= X_q(Y|_A(f|_A)) - Y_q(X|_A(f|_A)) = X_q(Y|_V(f)) - Y_q(X|_V(f)) = \\ &= (X|_V(Y|_V(f)))(q) - (Y|_V(X|_V(f)))(q) = ([X|_V, Y|_V](f))(q), \end{aligned}$$

de donde se deduce lo propuesto. □

Supongamos ahora que $(A, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta con $U \cap A \neq \emptyset$ y que

$$X|_{A \cap U} = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{A \cap U}, \quad Y|_{A \cap U} = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{A \cap U},$$

Entonces, si designamos a $U \cap A$ por V ,

$$\begin{aligned} [X, Y](x^j) &= [X, Y]|_V(x^j|_V) = [X|_V, Y|_V](x^j|_V) = X|_V(Y^j) - Y|_V(X^j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right). \end{aligned}$$

En forma matricial, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} [X, Y](x^1) \\ \vdots \\ [X, Y](x^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial Y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial Y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Ejemplo 4.2.20 En \mathbb{R}^3 se consideran

$$X = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Las componentes de $[X, Y]$ son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego $[X, Y] = Z$. De forma similar se comprueba que $[Z, X] = Y$ y que $[Y, Z] = X$.

4.3. Curvas integrales de campos de vectores

Sea M una variedad y $X \in \mathcal{D}(M)$.

Definición 4.3.1 Se llama **curva integral** de X a toda curva C^∞ de M , c , tal que

$$\dot{c}_t = X_{c(t)} \text{ para todo } t \text{ en el intervalo de definición de } c.$$

Ejemplo 4.3.2 En \mathbb{R}^3 se considera la curva $c(t) = (-t, 2 - t^2, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ y el campo de vectores

$$X = xz \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}.$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\dot{c}_t = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{(-t, 2-t^2, 2)} - 2t \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{(-t, 2-t^2, 2)} = X_{(-t, 2-t^2, 2)} = X_{c(t)},$$

luego c es curva integral de X .

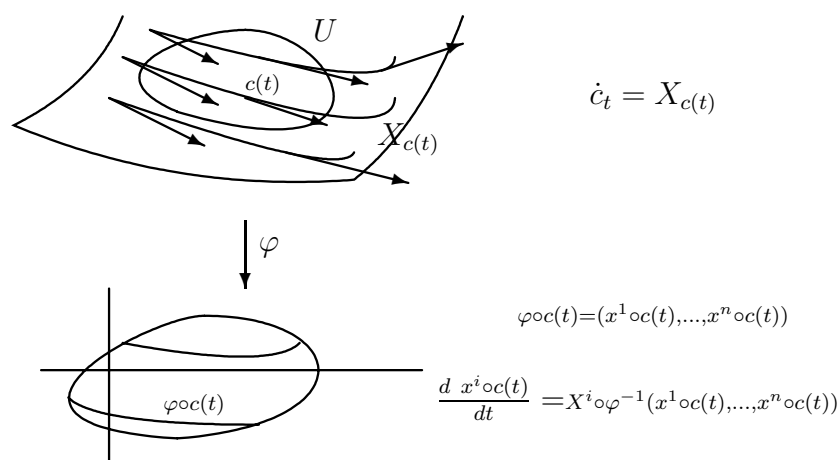


Figura 4.1: Curvas integrales

Sea $c : I \rightarrow M$ una curva C^∞ de M . Nos vamos a ocupar de las condiciones que deben cumplir las expresiones locales de c en cartas, para que c sea curva integral.

Si $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta local, $\varphi \circ c$ está definida en el abierto $I' = c^{-1}(U)$ de I y para todo $t \in I'$ se tiene

$$\dot{c}_t = \sum_{i=1}^n (x^i \circ c)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)},$$

de forma que, si

$$\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

es la expresión local de X , es condición necesaria para que c sea curva integral de X que

$$(x^i \circ c)'(t) = X^i(c(t))$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Estas relaciones pueden ser escritas de la siguiente forma

$$\frac{d x^i \circ c(t)}{dt} = X^i \circ \varphi^{-1}(x^1 \circ c(t), \dots, x^n \circ c(t)) \quad (4.7)$$

$i = 1, \dots, n$. Este es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que deben cumplir las funciones $x^i \circ c(t)$ para que c sea curva integral de X .

Recíprocamente, supongamos que para cada $t \in I$ existe una carta local en $c(t)$, $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, para la que se cumple 4.7, entonces c es curva integral de X .

Dada una carta como la anterior, existe una correspondencia biunívoca entre curvas integrales con imagen en U y soluciones en $\varphi(U)$ del sistema 4.7.

El sistema de ecuaciones 4.7 puede también escribirse

$$\frac{d \varphi \circ c(t)}{dt} = \bar{X} \circ \varphi^{-1}(\varphi \circ c(t)), \quad (4.8)$$

donde

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.3.3 Se considera el campo X del ejemplo 4.2.11 y vamos a buscar sus curvas integrales.

Una curva integral que pasa por N es $c(t) = N$, $t \in \mathbb{R}$.

Vamos a buscar curvas integrales con imagen en $S^2 - \{N\}$. Dado que

$$X = x_N^2 \frac{\partial}{\partial x_N^1} - x_N^1 \frac{\partial}{\partial x_N^2},$$

para que $c(t)$ sea una de esas curvas ha de ser

$$\frac{d x_N^1 \circ c(t)}{dt} = x_N^2 \circ c(t)$$

$$\frac{d x_N^2 \circ c(t)}{dt} = -x_N^1 \circ c(t).$$

Es habitual designar $x_N^j \circ c(t)$ simplemente por $x^j(t)$ con lo que el sistema anterior debe escribirse

$$\frac{d x^1(t)}{dt} = x^2(t)$$

$$\frac{d x^2(t)}{dt} = -x^1(t),$$

cuyas soluciones son $x^1(t) = A \cos t + B \sin t$, $x^2(t) = dx^1(t)/dt = -A \sin t + B \cos t$, $A, B \in \mathbb{R}$, y están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Las curvas integrales contenidas en $S^2 - \{N\}$ son pues las que se obtienen para cada $A, B \in \mathbb{R}$ mediante $c_{AB}(t) = P_N^{-1}(A \cos t + B \sin t, -A \sin t + B \cos t)$.

Ejercicio 4.3.4 Dibujar las imágenes de las curvas integrales del ejemplo anterior.

En el teorema siguiente, se resumen algunas consecuencias de los conocimientos adquiridos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, en segundo curso

Teorema 4.3.5 Sea U un abierto de \mathbb{R}^n y $f^i \in C^\infty(U)$, $i = 1, \dots, n$. Para cada $a \in U$ existe un entorno abierto, B , de a en U y $\varepsilon > 0$ tales que para cada $b \in B$ existe una única curva $\gamma_b : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (x_b^1(t), \dots, x_b^n(t)) \in U$ satisfaciendo $\gamma_b(0) = b$ y

$$\frac{dx_b^i(t)}{dt} = f^i(x_b^1(t), \dots, x_b^n(t)).$$

Además la aplicación

$$(t, b) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \gamma_b(t) \in U$$

es C^∞ .

Utilizando este resultado, demostramos a continuación un teorema de existencia y uno de unicidad de curvas integrales de campos de vectores.

Teorema 4.3.6 (de existencia) Dados $X \in \mathcal{D}(M)$ y $p \in M$ existen $\varepsilon > 0$ y un entorno abierto, B , de p tales que para cada $x \in B$ existe una curva integral de X , c_x , definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$ que cumple $c_x(0) = x$.

Demostración. Sea $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta de M en p y

$$\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Planteamos en $\varphi(U)$ el sistema de ecuaciones

$$\frac{d x^i(t)}{dt} = X^i \circ \varphi^{-1}(x^1(t), \dots, x^n(t)) \quad (4.9)$$

$i = 1, \dots, n$.

El teorema 4.3.5 afirma que existe entorno abierto, U' , de $\varphi(p)$ y $\varepsilon > 0$ tales que para todo $y \in U'$ existe una solución, γ_y , del sistema de ecuaciones, definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, que cumple $\gamma_y(0) = y$. Entonces designando por B a

$\varphi^{-1}(U')$ y por c_x a $\varphi^{-1} \circ \gamma_{\varphi(x)}$ resulta lo propuesto.

□

Teorema 4.3.7 (de unicidad) *Supongamos que M es Hausdorff. Sean $c_1 : J_1 \rightarrow M$ y $c_2 : J_2 \rightarrow M$ curvas integrales de X que cumplan $c_1(0) = c_2(0)$. Entonces*

$$c_1|_{J_1 \cap J_2} = c_2|_{J_1 \cap J_2}$$

Demostración. Sea $Q = \{t \in J_1 \cap J_2 : c_1(t) = c_2(t)\}$. Q no es vacío ya que $0 \in Q$. Vamos a ver que Q es abierto y cerrado en $J_1 \cap J_2$. Esto acabará la demostración ya que $J_1 \cap J_2$ es conexo por ser intersección de intervalos y entonces resultará $Q = J_1 \cap J_2$, que implica lo que queremos demostrar.

Q es cerrado en $J_1 \cap J_2$. Se considera $(c_1, c_2) : t \in J_1 \cap J_2 \rightarrow (c_1(t), c_2(t)) \in M \times M$ que es continua. Sea $\Delta = \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$; Δ es un cerrado por ser M Hausdorff. Dado que $Q = (c_1, c_2)^{-1}(\Delta)$ resulta que Q es cerrado.

Q es abierto de $J_1 \cap J_2$. Sea $t \in Q$, $c_1(t) = c_2(t) = p$ y $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta en p . Por continuidad, $\varphi \circ c_1$ (resp. $\varphi \circ c_2$) está definida en un entorno abierto, I_1 , (resp. I_2) de t en $J_1 \cap J_2$.

Entonces $\varphi \circ c_1$ y $\varphi \circ c_2$ son soluciones de 4.7 que cumplen $\varphi \circ c_1(t) = \varphi \circ c_2(t) = \varphi(p)$. Definimos $\lambda_1(s) = \varphi \circ c_1(s + t)$ y $\lambda_2(s) = \varphi \circ c_2(s + t)$, que están definidas en un entorno de 0, en 0 valen $\varphi(p)$, y son también soluciones de 4.7, como se comprueba sin más que derivar. Por el teorema 4.3.5 existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda_1(s)$ y $\lambda_2(s)$ están definidas y coinciden para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, lo que implica que $\varphi \circ c_1(s + t)$ y $\varphi \circ c_2(s + t)$ están definidas y coinciden para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Esos $s + t$ forman un entorno abierto, $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$, de t en $J_1 \cap J_2$, que, entonces, está contenido en Q . Vemos así que Q contiene un entorno de cada uno de sus puntos.

□

El siguiente ejemplo muestra que, si M no es Hausdorff, puede no haber unicidad.

Ejemplo 4.3.8 Se consideran los subconjuntos de \mathbb{R}^2 , $U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $V = \{(x, 0) : x < 0\} \cup \{(x, 1) : x \geq 0\}$, y en $M = U \cup V$ las cartas locales (U, y) y (V, z) dadas por $y(x, 0) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $z(x, 0) = x$ para todo $x < 0$ y $z(x, 1) = x$ para todo $x > 0$.

Estas dos cartas definen un atlas en M . El cambio de coordenadas viene dado por la aplicación idéntica de \mathbb{R}^- . La topología resultante en M no es Hausdorff, ya que todo entorno de $(0, 0)$ interseca a todo entorno de $(0, 1)$.

Los campos de vectores $X_0 = \partial/\partial y \in \mathcal{D}(U)$ y $X_1 = \partial/\partial z \in \mathcal{D}(V)$ coinciden en la intersección de sus dominios de definición, por lo que existe un único campo de vectores, X , en M , cuya restricción a U y V coincide con X_0 y X_1 respectivamente.

La curva $c_1(t) = (t-1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ cumple $y \circ c_1(t) = t-1$ por lo que es diferenciable, tiene valor inicial $(-1, 0)$ y es integral de X .

La curva

$$c_2(t) = \begin{cases} (t-1, 0) & \text{si } t < 1 \\ (t-1, 1) & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

cumple $z \circ c_2(t) = t-1$ por lo que también es diferenciable, tiene valor inicial $(-1, 0)$ y es integral de X .

Pero estas curvas difieren para todo $t \geq 1$.

En lo sucesivo supondremos que M es Hausdorff.

Sea $p \in M$, A un conjunto de índices y $\{I_a : a \in A\}$ el conjunto formado por los intervalos abiertos que contienen a 0, para los que existe una curva integral, $\gamma_a : J_a \rightarrow M$ de X que cumple $\gamma_a(0) = p$. Designemos por J_p a $\cup_{a \in A} I_a$. El conjunto J_p es un intervalo abierto y se define $c_p : J_p \rightarrow M$ mediante $c_p(t) = \gamma_a(t)$ si $t \in I_a$. Esta curva está bien definida como consecuencia del teorema de unicidad.

Para cada $t \in J_p$, si $t \in I_a$ se tiene $c_p|_{I_a} = \gamma_a$. lo que demuestra que c_p es diferenciable y es curva integral de X .

La curva c_p se llama **curva integral maximal** de X con valor inicial p .

Sea $D_t = \{p \in M : t \in J_p\}$. Se define una aplicación $X_t : D_t \rightarrow M$ mediante $X_t(p) = c_p(t)$ y se designa por I_t a la imagen de D_t por X_t . El conjunto de los X_t se llama **flujo** o **grupo uniparamétrico local** de X .

Obsérvese que $X_t(p)$ está definido, para cada p fijo, para todo $t \in J_p$ y describe la curva integral maximal con valor inicial p .

Ejemplo 4.3.9 Volvamos al ejemplo 4.3.3. El campo de vectores que se considera es el $X \in \mathcal{D}(M)$ que vale 0 en N y tiene por expresión local para la proyección estereográfica de polo norte

$$x_N^2 \frac{\partial}{\partial x_N^1} - x_N^1 \frac{\partial}{\partial x_N^2}.$$

Las curvas integrales que hemos encontrado son $c(t) = N$, $t \in \mathbb{R}$ y, para cada $A, B \in \mathbb{R}$, $c_{AB}(t) = P_N^{-1}(A \cos t + B \sin t, -A \sin t + B \cos t)$.

Vamos a buscar las curvas integrales maximales con valor inicial $p \in S^2$.

Si $p = N$, la curva c está definida en todo \mathbb{R} y cumple $c(0) = N$, luego $c_N = c$. Para los elementos del flujo de X se tiene entonces $X_t(N) = c_N(t) = N$.

Si $p \neq N$ sea $P_N(p) = (x_0^1, x_0^2)$. Una curva integral que en 0 vale p es la c_{AB} tal que $A = x_0^1$, $B = x_0^2$, que, por estar definida en todo \mathbb{R} , ya es maximal. Vemos así que

$$c_p(t) = P_N^{-1}(x_0^1 \cos t + x_0^2 \sin t, -x_0^1 \sin t + x_0^2 \cos t).$$

Al ser $J_p = \mathbb{R}$ para todo p , se tiene $D_t = M$ para todo t .

Los elementos del flujo de X cumplen

$$X_t(p) = P_N^{-1}(x_0^1 \cos t + x_0^2 \sin t, -x_0^1 \sin t + x_0^2 \cos t),$$

de donde

$$P_N \circ X_t \circ P_N^{-1} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}$$

Vemos así que la expresión local de X_t en el sistema de coordenadas P_N es un giro, G , alrededor del origen, de ángulo $-t$. Entonces $X_t|_{S^2 - \{N\}} = P_N^{-1} \circ G \circ P_N$, y de aquí se deduce que $X_t|_{S^2 - \{N\}}$ es un giro de ángulo t en determinado sentido, alrededor del eje z . Dado que este giro también aplica N en N , coincide con X_t en toda S^2 .

Obsérvese que en este caso $X_t \circ X_s = X_{t+s}$, es decir, la aplicación $t \in \mathbb{R} \rightarrow X_t$ es un homomorfismo del grupo \mathbb{R} en el grupo de los difeomorfismos de S^2 .

Un ejemplo en el que los D_t son algo más complicados es el siguiente

Ejemplo 4.3.10 Sea $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ y $X = \partial/\partial x$. El sistema que da las curvas integrales, $c(t) = (x(t), y(t))$, en la carta canónica es

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= 1 \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $(x(t), y(t)) = (t + C, K)$. La curva integral cuyo valor en inicial es (x, y) , es $c_{(x,y)}(t) = (t + x, y)$.

El intervalo $J_{(x,y)}$ es todo \mathbb{R} si $y \neq 0$, pero, si $y = 0$, es aquel de los intervalos $(-\infty, -x)$ o $(-x, \infty)$ que contenga a 0, *i.e.*, $(-\infty, -x)$ si $x < 0$ o $(-x, \infty)$ si $x > 0$.

Como siempre $D_0 = M$, pero, si $t > 0$, D_t está formado por los (x, y) tales que $y \neq 0$, los $(x, 0)$ con $x > 0$ y los $(x, 0)$ tales que $x < -t$, *i.e.* $D_t = \mathbb{R}^2 - \{(s, 0) : -t \leq s \leq 0\}$. De igual forma, si $t < 0$, $D_t = \mathbb{R}^2 - \{(s, 0) : 0 \leq s \leq -t\}$.

Los elementos del flujo son $X_t : (x, y) \in D_t \rightarrow (x + t, y) \in M$. Obsérvese que $I_t = X_t(D_t) = D_{-t}$, lo que no es casualidad (ver el apartado 4 del teorema 4.3.12).

En el caso general se cumple el siguiente lema

Lema 4.3.11 *Para todos $p \in M$ y $t \in J_p$ se tiene*

$$J_{c_p(t)} = J_p - t$$

donde $J_p - t \equiv \{r - t : r \in J_p\}$ y

$$c_{c_p(t)}(s) = c_p(s + t).$$

Demostración. La curva $s \rightarrow c_p(s + t)$ está definida en $J_p - t$, se ve que es integral de X sin más que aplicar la definición, observando que puede ser escrita como $c_p \circ \{s \rightarrow s + t\}$, y su valor en 0 es $c_p(t)$. Se deduce que $J_p - t \subset J_{c_p(t)}$ y que

$$c_{c_p(t)}|_{J_p-t} = c_p \circ \{s \rightarrow s + t\}.$$

Sólo falta demostrar que $J_{c_p(t)} \subset J_p - t$. Pero el resultado anterior implica que $-t \in J_{c_p(t)}$ y entonces

$$J_{c_p(t)} - (-t) \subset J_{c_{c_p(t)}(-t)}.$$

Teniendo en cuenta que $c_{c_p(t)}(-t) = c_p \circ \{s \rightarrow s + t\}(-t) = p$ resulta

$$J_{c_p(t)} + t \subset J_p,$$

lo que acaba la demostración. □

Teorema 4.3.12

1. *Para cada $p \in M$ existe un entorno abierto, B , de p y $\varepsilon > 0$ tales que la aplicación*

$$(t, q) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow X_t(q) \in M$$

es C^∞ .

2. *Se tiene $D_r \cap D_{r+s} = X_r^{-1}(I_r \cap D_s)$ y*

$$X_s \circ X_r|_{X_r^{-1}(I_r \cap D_s)} = X_{s+r}|_{D_r \cap D_{r+s}}$$

3. *El conjunto D_t es abierto.*
4. *Se tiene $D_{-r} = I_r$ y X_r es un difeomorfismo sobre su imagen con $X_r^{-1} = X_{-r}$.*

5. La relación $D_t \subset D_{t'}$ se cumple siempre que t y t' tengan el mismo signo y $|t| > |t'|$.
6. La unión de los D_t para $t > 0$ es M .

Observación 4.3.13 En particular, 2 implica que siempre que $X_s \circ X_r$ esté definido en un conjunto, X_{s+r} está definido en él y coincide con la composición. Esto se extiende a la composición de un número finito de X_r .

Demostración. 1. Sea $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta en p . Designamos por X^i a $X(x^i)$, $i = 1, \dots, n$, y consideramos el sistema 4.7. Según el teorema 4.3.5 existe $\varepsilon > 0$ y un entorno, B_0 , de $\varphi(p)$ en $\varphi(U)$, tales que la aplicación que a cada $(t, b) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B_0$ hace corresponder el valor en t de la solución de 4.7 que vale b en 0 es C^∞ . Esta solución toma valores en $\varphi(U)$. Pero este valor es $\varphi \circ c_{\varphi^{-1}(b)}(t)$ que coincide con $\varphi \circ X_t(\varphi^{-1}(b)) = \varphi \circ X_t \circ \varphi^{-1}(b)$. Vemos así que la aplicación

$$F : (t, b) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B_0 \longrightarrow \varphi \circ X_t \circ \varphi^{-1}(b),$$

es C^∞ .

Definimos entonces $B = \varphi^{-1}(B_0)$, y consideramos la carta global de $(-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ en $(0, p)$ $((-\varepsilon, \varepsilon) \times B, Id_{(-\varepsilon, \varepsilon)} \times \varphi|_B)$ en $(0, p)$ y la (U, φ) en p . La expresión local de

$$(t, q) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \longrightarrow X_t(q) \in M$$

en esas cartas es F .

2. Sea $p \in X_r^{-1}(I_r \cap D_s)$. Entonces $p \in D_r$ y $X_r(p) = c_p(r) \in D_s$, lo que quiere decir que $s \in J_{c_p(r)} = J_p - r$ y, por tanto, $s + r \in J_p$, luego $p \in D_{s+r}$ y entonces $p \in D_{s+r} \cap D_r$. Vemos así que $X_r^{-1}(I_r \cap D_s) \subset D_{s+r} \cap D_r$.

Sea ahora $p \in D_{r+s} \cap D_r$. Entonces $r, r + s \in J_p = J_{c_p(r)} + r$, de donde se deduce $s \in J_{c_p(r)}$, es decir $c_p(r) \in D_s$ lo que equivale a $X_r(p) \in D_s$, que, unido a $p \in D_r$ implica $p \in X_r^{-1}(I_r \cap D_s)$. Luego $D_{r+s} \cap D_r \subset X_r^{-1}(I_r \cap D_s)$.

Supongamos que $p \in X_r^{-1}(I_r \cap D_s)$. Entonces

$$X_{s+r}(p) = c_p(s + r) = c_{c_p(r)}(s) = X_s(c_p(r)) = X_s \circ X_r(p),$$

lo que acaba la demostración de 2.

3. Dado t sea $p \in D_t$. Entonces $t \in J_p$. Denotemos por I el intervalo cerrado de extremos 0 y t . Para cada $q \in c_p(I)$ se considera un $\varepsilon_q > 0$ y un entorno B_q para los que

$$(t, q) \in (-\varepsilon_q, \varepsilon_q) \times B_q \longrightarrow X_t(q) \in M$$

sea C^∞ . Por la compacidad de $c_p(I)$ se puede extraer un recubrimiento finito, $\{B_{q_1}, \dots, B_{q_m}\}$ del dado por los B_q . Sea V la unión de los B_{q_i} , $i = 1, \dots, m$, y ε el menor de los ε_{q_i} . Entonces la aplicación

$$(t, v) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \longrightarrow X_t(v) \in M$$

es C^∞ .

En particular, $X_r|_V$ es C^∞ si $|r| < \varepsilon$. Sea n suficientemente grande para tener $|t/n| < \varepsilon$. Definimos $V_0 = V$ e inductivamente para $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \sigma_i &= X_{\frac{t}{n}} \Big|_{V_{i-1}} \\ V_i &= \sigma_i^{-1}(V_{i-1}). \end{aligned}$$

Se tiene $V_n \subset \dots \subset V_i \subset V_{i-1} \subset \dots \subset V_0 = V$, ya que σ_i sólo está definido en V_{i-1} , y V_i es abierto para todo i .

Demostremos a continuación por inducción $c_p(t - jt/n) \in V_i$, para todo $i \leq j \leq n$. En efecto, $c_p(t - jt/n) \in V_0$ para todo $0 \leq j \leq n$. Admitamos $c_p(t - jt/n) \in V_i$, para todo $i \leq j \leq n$. Entonces, para todo $i + 1 \leq k \leq n$, se tiene

$$c_p\left(t - k\frac{t}{n}\right) \in V_i$$

y

$$\sigma_{i+1}\left(c_p\left(t - k\frac{t}{n}\right)\right) = X_{\frac{t}{n}}\left(X_{\left(t - k\frac{t}{n}\right)}(p)\right) = X_{\left(t - (k-1)\frac{t}{n}\right)}(p) = c_p\left(t - (k-1)\frac{t}{n}\right) \in V_i,$$

luego $c_p\left(t - k\frac{t}{n}\right) \in V_{i+1}$.

En consecuencia $V_n \subset V$, V_n es abierto y contiene a $c_p(0) = p$. Pero la composición $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_n$ está definida en V_n , luego lo está

$$X_{\frac{t}{n}} \circ \dots \circ X_{\frac{t}{n}}.$$

Como consecuencia de 4.3.13 resulta entonces que el dominio de definición de X_t , que es D_t , contiene a V_n , luego D_t es abierto.

4. Vemos de paso, en la demostración anterior, que la restricción de X_t a un entorno, V_n , de cada punto, p , de D_t es C^∞ , luego X_t es C^∞ . Basta pues demostrar que $I_{-r} = D_r$ y $X_r \circ X_{-r} = Id_{D_{-r}}$, ya que entonces, cambiando r por $-r$ resulta $I_r = D_{-r}$ y $X_{-r} \circ X_r = Id_{D_r}$.

Tomando en 2 $s = -r$ se obtiene $D_r = X_r^{-1}(I_r \cap D_{-r})$, pues $D_0 = M$, luego $I_r = X_r(D_r) \subset D_{-r}$ y, cambiando r por $-r$, $I_{-r} \subset D_r$. Entonces $X_r \circ X_{-r}$ está definida en D_{-r} y por 2 coincide con $X_0|_{D_{-r}} = Id_{D_{-r}}$. Para ver que $I_{-r} = D_r$ basta ahora observar que si $p \in D_{-r}$, $X_r(X_{-r}(p)) = p$, luego $p \in I_r$.

Los asertos 5 y 6 son de demostración inmediata.

□

Ejemplo 4.3.14 Volvamos al caso 4.3.10. Si r y s son mayores que 0 se tiene $D_r = \mathbb{R}^2 - \{(t, 0) : -r < t < 0\}$, $D_s = \mathbb{R}^2 - \{(t, 0) : -s < t < 0\}$, $D_{s+r} = \mathbb{R}^2 - \{(t, 0) : -(s+r) < t < 0\}$, $I_r = D_{-r} = \mathbb{R}^2 - \{(t, 0) : 0 < t < r\}$ y $X_r(x, y) = (x+r, y)$, de donde se deduce que $D_{s+r} \cap D_r = D_{s+r}$ y $X_r^{-1}(I_r \cap D_s) = X_r^{-1}(\mathbb{R}^2 - \{(t, 0) : -s < t < r\})$ coinciden. Además, para todo (x, y) en ese conjunto se tiene $X_s \circ X_r(x, y) = X_s(x+r, y) = (x+r+s, y) = X_{s+r}(x, y)$.

Ejemplo 4.3.15 En \mathbb{R}^3 se considera el campo de vectores

$$X = xy \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Si $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva integral maximal con valor inicial (x_0, y_0, z_0) , ha de cumplirse

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xy \\ \frac{dy}{dt} &= 2 \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

donde hemos abreviado $x(t), y(t)$ y $z(t)$ a x, y y z .

De la tercera ecuación deducimos $z = z_0$. De la segunda $y = 2t + y_0$ y entonces, de la primera $x = x_0 \text{Exp}(t^2 + y_0 t)$. Vemos entonces que una curva integral es

$$c(t) = (x_0 e^{t(t+y_0)}, 2t + y_0, z_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

que es maximal por estar definida en todo \mathbb{R} .

Se tiene $D_t = \mathbb{R}^3$ para todo t y se ve directamente que

$$\begin{aligned} X_s \circ X_t(x, y, z) &= X_s(x e^{t(t+y)}, 2t + y, z) = (x e^{t(t+y)} e^{s(s+2t+y)}, 2s + 2t + y, z) = \\ &= (x e^{t^2 + ty + s^2 + 2st + sy}, 2(s+t) + y, z) = X_{s+t}(x, y, z). \end{aligned}$$

Corolario 4.3.16 Si $D_s = M$ para algún $s \neq 0$, entonces $D_r = M$ para todo r que tenga el mismo signo que s .

Demostración. Sea I el intervalo cerrado de extremos 0 y s .

Si $r \in I$ se tiene $D_r = M$ ya que, para todo $p \in M$ la curva integral con valor inicial p está definida en todo I .

Si r tiene el mismo signo que s pero $r \notin I$, existe un número natural n tal que $r/n \in I$ (basta tomar $n > r/s$). Entonces

$$X_{\frac{r}{n}} \circ \dots \circ X_{\frac{r}{n}}$$

está definido en todo M y como consecuencia de 4.3.13 lo mismo ocurre con X_r .

Observación 4.3.17 No cabe esperar que $D_s = M$ para algún $s \neq 0$ implique $D_r = M$ para todo r . Se tiene el siguiente contraejemplo.

Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ y $X = \partial/\partial x$. Es un caso parecido al de 4.3.10.

Para cada $(x, y) \in M$ se tiene $c_{(x,y)}(t) = (x + t, y)$, de forma que $J_{(x,y)} = (-x, \infty)$. Entonces, si $t > 0$, $D_t = M$, pero, si $t < 0$, $D_t = \{(x, y) : -t < x\} \neq M$.

Definición 4.3.18 Un campo X se dice **completo** si $D_t = M$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como consecuencia de 4.3.16 se tiene

Corolario 4.3.19 Un campo de vectores es completo sii existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_t = M$ para todo t tal que $|t| < \varepsilon$.

Teorema 4.3.20 Supongamos que en una variedad se tienen biyecciones $X_t : D_t \rightarrow I_t$, con D_t e I_t subconjuntos de M , para cada t en un cierto subconjunto de \mathbb{R} , tales que se cumplen las condiciones 1, 2, 3, 4 y 5 del teorema 4.3.12. Existe un único campo de vectores en M cuyo flujo viene dado por extensiones de las X_t .

Demostración. Se consideran el conjunto $L = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : p \in D_t\}$ y la aplicación $\Psi : (t, p) \in L \rightarrow X_t(p) \in M$. Vamos a demostrar que L es abierto y Ψ es C^∞ . Para ello veremos que, dado $(t_0, p_0) \in L$, existe un entorno de él en $\mathbb{R} \times M$ contenido en L y que la restricción de Ψ a ese entorno es C^∞ .

Sea (U_0, φ_0) una carta de M en p_0 y (U, φ) una en $X_{t_0}(p_0)$. Por 1, existe un entorno abierto, B , de $X_{t_0}(p_0)$ y $\varepsilon > 0$ tales que la restricción de Ψ a $(-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ es C^∞ . Podemos tomar ε y B suficientemente pequeños para que la imagen $\Psi((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$ esté en U .

Consideramos el entorno, E , de (t_0, p_0) dado por $E = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times X_{t_0}^{-1}(B)$ y, para todo $(t, p) \in E$, resulta que $X_{t-t_0}(X_{t_0}(p))$ está definido, luego lo está $X_{t-t_0+t_0}(p) = X_t(p)$, así que E está en L .

Por otra parte, en E se tiene

$$\Psi_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B} \circ \{(t, p) \longrightarrow (t - t_0, X_{t_0}(p))\} : (t, p) \longrightarrow X_{t-t_0}(X_{t_0}(p)) = \Psi(t, p)$$

de forma que la restricción de Ψ a ese entorno es composición de aplicaciones C^∞ .

Para cada p se define $J_p = \{t : p \in D_t\}$, que es un entorno de 0 por la propiedad 1, conexo por arcos (luego conexo) por la propiedad 5 y abierto por ser la antiimagen de L por la aplicación que envía cada $t \in \mathbb{R}$ a $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$. También definimos la curva $c_p : t \in J_p \longrightarrow \Psi(t, p)$, que es C^∞ y el campo de vectores X definido para cada $q \in M$ por $X_q = (\dot{c}_q)_0$.

Si existe algún campo de vectores que cumpla las condiciones del enunciado, es obviamente el X así definido. Veamos que las cumple.

En primer lugar, es C^∞ . En efecto, dado $q \in M$ sea $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta de M en q . Se tiene

$$X(x^i) \circ \varphi^{-1}(r) = X_{\varphi^{-1}(r)}(x^i) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 x^i \circ \Psi(t, \varphi^{-1}(r))$$

que es función C^∞ de $r \in \varphi(U)$.

Por otra parte, dado que $c_q(t) = X_t(q)$, para ver que el flujo de X está formado por extensiones de las X_t basta ver que las c_q son curvas integrales de X . Pero, para todo $t_0 \in J_q$ se tiene

$$(\dot{c}_q)_{t_0} = \overline{(\dot{X}_t(q))}_{t_0} = \overline{(X_{t-t_0} \circ X_{t_0}(q))}_{t_0} = \overline{(X_s \circ X_{t_0}(q))}_0 = X_{X_{t_0}(q)} = X_{c_q(t_0)}.$$

□

Corolario 4.3.21 *Sea M una variedad y $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ una familia uniparamétrica de difeomorfismos de M tales que $X_t \circ X_s = X_{t+s}$ para todos t y s y la aplicación $(t, p) \in \mathbb{R} \times M \longrightarrow X_t(p) \in M$ es C^∞ . Existe un único campo de vectores en M cuyo flujo es $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$.*

El siguiente lema resulta útil en varias circunstancias

Lema 4.3.22 *Sea $X \in \mathcal{D}(M)$ y $p \in M$ tales que $X_p \neq 0$. Entonces existe una carta local $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ de M en p tal que*

$$X|_U = \partial/\partial x^1.$$

Demostración. Sea $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ una carta de M en p . Componiendo ψ con una traslación, podemos suponer que $\psi(p) = 0$. Dado que $X_p \neq 0$, alguno de los $X_p(y^i)$ ha de ser diferente de 0. Componiendo ψ con un cambio de numeración del sistema de coordenadas, si fuera necesario, podemos suponer que $X_p(y^1) \neq 0$.

Sean $\varepsilon > 0$ y B como aquellos cuya existencia asegura el apartado 1 de 4.3.12, y sea $\mu > 0$ tal que $(-\mu, \mu)^n \subset \psi(V \cap B)$. Designamos por a al mínimo entre ε y μ .

Se define $F : (-a, a)^n \rightarrow M$ mediante

$$F(b^1, \dots, b^n) = X_{b^1}(\psi^{-1}(0, b^2, \dots, b^n))$$

que está bien definida, es diferenciable y cumple $F(0) = p$. Además se tiene

$$T_0 F \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p, \quad i = 2, \dots, n, \quad (4.10)$$

En efecto, si designamos por c la curva $c : t \in (-a, a) \rightarrow (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) \in (-a, a)^n$, donde t ocupa el i -ésimo lugar, $i = 2, \dots, n$, se tiene $\dot{c}_0 = (\partial/\partial r^i)_0$ y entonces

$$\begin{aligned} \left(T_0 F \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \right)_0 \right) (y^k) &= (T_0 F \cdot \dot{c}_0) (y^k) = \left(T_0 (F \circ c) \cdot \left(\frac{d}{dr} \right)_0 \right) (y^k) = \\ &= \left(\frac{d}{dr} \right)_0 (y^k \circ F \circ c) = \frac{d}{dr} \Big|_{r=0} (r^k \circ \psi(X_0(\psi^{-1}(0, \dots, r, \dots, 0)))) = \delta_i^k \end{aligned}$$

lo que demuestra 4.10. Consideremos, por otra parte, para cada $b = (b^1, \dots, b^n) \in (-a, a)^n$, la curva $\gamma(t) = (b^1 + t, \dots, b^n)$, que está definida para t suficientemente pequeño. Se tiene

$$\dot{\gamma}_0 = \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_b$$

de forma que

$$T_b F \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_b = \overline{F \circ \gamma}_0$$

Pero,

$$F \circ \gamma(t) = X_{b^1+t}(\psi^{-1}(0, b_2, \dots, b^n)) = X_t(F(b))$$

luego

$$T_b F \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_b = X_{F(b)}. \quad (4.11)$$

En particular

$$T_0F \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_0 = X_p. \quad (4.12)$$

Dado que el conjunto $\{X_p, \partial/\partial y^2, \dots, \partial/\partial y^n\}$ es linealmente independiente, y por tanto una base de T_pM , deducimos de 4.12 y 4.10 que T_0F es un isomorfismo. Como consecuencia del teorema de inversión local, resulta que existe un entorno abierto de 0 en \mathbb{R}^n tal que $F|_A$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Entonces $(F(A), (F|_A)^{-1})$ es una carta de M .

Sea $(F|_A)^{-1} = (x^1, \dots, x^n)$. Como consecuencia de 4.11 se tiene, para todo $b \in A$,

$$X_{F(b)}(x^k) = T_bF \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_b (x^k) = \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_b (x^k \circ F) = \left(\frac{\partial}{\partial r^1} \right)_b (r^k) = \delta_1^k$$

lo que equivale a

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

□

Observación 4.3.23 La demostración anterior solo es válida para variedades Hausdorff, porque usa de manera esencial el flujo, que solo ha sido definido para variedades separadas. Sin embargo el lema es válido para toda variedad.

Para verlo, basta tomar un entorno abierto de p que sea Hausdorff (por ejemplo el dominio de una carta cualquiera en p). Por el lema existe una carta de esa subvariedad abierta para la que se cumple lo pedido, y esa carta es también carta de M .

4.4. Flujo y corchete de Lie

Sean M y N variedades, $F \in C^\infty(M, N)$ y $X \in \mathcal{D}(M)$. Se dice que X es **proyectable** por F si existe un abierto, U de N e $Y \in \mathcal{D}(U)$ tales que $F(M) \subset U$ y $T_pF \cdot X_p = Y_{F(p)}$ para todo $p \in M$. En estas condiciones se dice que Y es **una proyección** de X por F , que X **se proyecta** por F en Y y también que X e Y están **F-relacionados** o **relacionados** por F , y se escribe $F_*X = Y$. Obsérvese que los diferentes F_*X sólo están obligados a coincidir en $F(M)$.

Si $F_*X = Y$ y $c : I \rightarrow M$ es una curva integral de X , para todo $t \in I$ se tiene

$$\overline{F \circ c}_t = T_{c(t)}F \cdot \dot{c}_t = T_{c(t)}F \cdot X_{c(t)} = Y_{F \circ c(t)}$$

luego $F \circ c$ es curva integral de Y . En particular, si designamos por $J_p(X)$ (resp. $J_q(Y)$) el intervalo de definición de la curva integral maximal de X (resp. Y) que tiene valor inicial $p \in M$ (resp. $q \in N$), se tiene $J_p(X) \subset J_{F(p)}(Y)$ y, para todo $t \in J_p(X)$, se tiene $F \circ X_t(p) = Y_t(F(p))$. Si $D_t(X)$ (resp. $D_t(Y)$) es el dominio de definición de X_t (resp. Y_t) se tiene $F(D_t(X)) \subset D_t(Y)$ y en $D_t(X)$ se tiene $F \circ X_t = Y_t \circ F$.

Lema 4.4.1 *Para todo t tal que $D_t(X) \neq \emptyset$ se tiene $(X_t)_*X = X$.*

Obsérvese que las eventuales proyecciones de X por X_t tienen sus valores determinados sólo en $I_t(X) = D_{-t}(X)$. Si este conjunto no es todo M , puede haber otras proyecciones además de X .

Demostración. Para cada $p \in D_t(X)$ el vector $T_p X_t \cdot X_p$ es el tangente en 0 a la curva $X_t \circ \{s \rightarrow X_s(p)\}$, pero

$$\overline{X_t \circ \{s \rightarrow X_s(p)\}}_0 = \overline{\{s \rightarrow X_{t+s}(p)\}}_0 = \overline{\{s \rightarrow X_s(X_t(p))\}}_0 = X_{X_t(p)}$$

□

Lema 4.4.2 *Se tiene $F_*X = X'$ sii, para toda $g \in C^\infty(N)$, $X(g \circ F) = X'(g) \circ F$.*

Demostración. Supongamos que $F_*X = X'$. Entonces, para todo $p \in M$

$$(X(g \circ F))(p) = X_p(g \circ F) = (T_p F \cdot X_p)(g) = X'_{F(p)}(g) = (X'(g))(F(p)),$$

luego $X(g \circ F) = X'(g) \circ F$.

Recíprocamente, supongamos que $X(g \circ F) = X'(g) \circ F$. Entonces, para todo $p \in M$

$$X'_{F(p)}(g) = X'(g) \circ F(p) = (X(g \circ F))(p) = X_p(g \circ F) = (T_p F \cdot X_p)(g)$$

luego $X'_{F(p)} = T_p F \cdot X_p$.

□

Corolario 4.4.3 *Supongamos que $F(M)$ es un abierto de N . Se tiene $F_*X = X'$ sii, para toda $g \in C^\infty(F(M))$, $X(g \circ F) = X'(g) \circ F$.*

Lema 4.4.4 *Supongamos que $F(M)$ es un abierto de N . Entonces $X \in \mathcal{D}(M)$ es proyectable por F sii para toda $g \in C^\infty(F(M))$ existe $g_X \in C^\infty(F(M))$ tal que $X(g \circ F) = g_X \circ F$.*

Demostración. La parte “sólo si” es consecuencia inmediata de 4.4.3.

Si. Se define una aplicación de $C^\infty(F(M))$ en $C^\infty(F(M))$, X' , mediante $X'(g) = g_X$, utilizando el hecho de que g_X está definida de manera única por $g_X \circ F$, y se comprueba sin dificultad que es una derivación. En consecuencia X' define un campo de vectores que cumple $X(g \circ F) = X'(g) \circ F$, por lo que, según 4.4.3, se tiene $F_*X = X'$.

□

Lema 4.4.5 *Si $F_*X = X'$ y $F_*Y = Y'$, entonces $F_*[X, Y] = [X', Y']$.*

Demostración. Para toda $g \in C^\infty(N)$ se tiene

$$\begin{aligned} [X, Y](g \circ F) &= X(Y(g \circ F)) - Y(X(g \circ F)) = X(Y'(g) \circ F) - Y(X'(g) \circ F) = \\ &= X'(Y'(g)) \circ F - Y'(X'(g)) \circ F = [X', Y'](g) \circ F. \end{aligned}$$

y el resultado se deduce de 4.4.2.

□

Lema 4.4.6 *Sea f un difeomorfismo de M sobre N y $X \in \mathcal{D}(M)$. Entonces*

a) *Existe un único $Y \in \mathcal{D}(N)$ tal que $f_*X = Y$.*

b) *Los difeomorfismos $f \circ X_t$ e $Y_t \circ f$ tienen el mismo dominio de definición, el de X_t , y coinciden en él.*

c) *El flujo de Y viene dado por $Y_t = f \circ X_t \circ f^{-1}$.*

Demostración. Para cada $q \in N$ se define $Y_q = T_{f^{-1}(q)}f \cdot X_{f^{-1}(q)}$. Con esto se define un campo de vectores, Y , sobre N que, si demostramos que es C^∞ , es el único que cumple $f_*X = Y$. Para demostrar esto basta demostrar que $Y(g)$ es C^∞ cada vez que $g \in C^\infty(N)$, pero, para todo $q \in N$ se tiene

$$(Y(g))(q) = Y_q(g) = (T_{f^{-1}(q)}f \cdot X_{f^{-1}(q)})(g) = X_{f^{-1}(q)}(g \circ f) = (X(g \circ f))(f^{-1}(q))$$

luego $Y(g) = (X(g \circ f)) \circ f^{-1}$ de forma que es C^∞ .

Para demostrar b, observemos en primer lugar que también se tiene $f_*^{-1}Y = X$, ya que, para todo $q \in N$,

$$T_q f^{-1} \cdot Y_q = T_q f^{-1} (T_{f^{-1}(q)}f \cdot X_{f^{-1}(q)}) = X_{f^{-1}(q)}.$$

Entonces $f(D_t(X)) \subset D_t(Y)$ y $f^{-1}(D_t(Y)) \subset D_t(X)$ luego $D_t(X) = f^{-1}(D_t(Y))$ y en $D_t(X)$ se cumple $f \circ X_t = Y_t \circ f$.

El aserto c es consecuencia inmediata de b.

□

Ejercicio 4.4.7 Justificar los siguientes asertos:

Sean M , N y P variedades, $F \in C^\infty(M, N)$, $G \in C^\infty(N, P)$, $X \in \mathcal{D}(M)$. Si X es proyectable por F y alguna de sus proyecciones, F_*X , es proyectable por G , entonces X es proyectable por $G \circ F$ y se tiene $G_*(F_*X) = (G \circ F)_*X$. En particular si A , B , y C son abiertos de M , N y P respectivamente, f es un difeomorfismo de A sobre B , g un difeomorfismo de B sobre C y $X \in \mathcal{D}(A)$, f_*X está definido de manera única en B , $g_*(f_*X)$ lo está en C , $(g \circ f)_*X$ también lo está en C y se tiene $g_*(f_*X) = (g \circ f)_*X$.

Con estos resultados y la ayuda de un lema técnico, vamos a demostrar el siguiente teorema

Teorema 4.4.8 Si $X, Y \in \mathcal{D}(M)$ y $p \in M$

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - (X_t)_*Y)_p.$$

El lema que necesitaremos es el siguiente

Lema 4.4.9 Si $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ y $f(0, p) = 0$ para todo $p \in M$, existe una función C^∞ , $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t, p) = tg(t, p)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $p \in M$.

Demostración del lema. Se define

$$g(t, p) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dr} \Big|_{r=ts} f(r, p) \right) ds$$

y se tiene

$$tg(t, p) = \int_0^1 t \left(\frac{d}{dr} \Big|_{r=ts} f(r, p) \right) ds = \int_0^t \frac{d}{du} f(u, p) du = f(u, p) \Big|_0^t = f(t, p)$$

sin más que hacer el cambio $u = ts$.

□

Demostración del teorema. Dado $p \in M$ existe $\varepsilon > 0$ y un entorno, V , de p tales que X_t está definido en V para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Para $f \in C^\infty(M)$, se considera la función

$$(t, q) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \rightarrow f \circ X_t(q) - f(q)$$

y aplicamos el lema precedente, designando por g a una función C^∞ que cumpla

$$f \circ X_t(q) - f(q) = tg(t, q).$$

Derivando, vemos entonces que

$$\begin{aligned} g(0, q) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ X_t(q) - f(q)) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(X_t(q)) = X_q \cdot f = (X \cdot f)(q), \end{aligned}$$

luego $g(0, \cdot) = X \cdot f$.

Vamos a demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} (Y - (X_t)_* Y)_p \cdot f \right] = [X, Y]_p \cdot f,$$

para toda función, f , C^∞ en un entorno de p .

Con esto acabamos porque, si (x^1, \dots, x^n) es un sistema de coordenadas alrededor de p , se tiene:

1. El límite cuando t tiende a 0 de

$$\frac{1}{t} (Y - (X_t)_* Y)_p$$

existe por existir el de sus componentes en la base asociada al sistema de coordenadas, que son

$$\frac{1}{t} (Y - (X_t)_* Y)_p \cdot x^i.$$

2. Las componentes de

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - (X_t)_* Y)_p$$

son las

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} (Y - (X_t)_* Y)_p \cdot x^i \right]$$

y por tanto coinciden con las de $[X, Y]_p$.

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} (Y - (X_t)_* Y)_p \cdot f \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_p \cdot f - ((X_t)_* Y)_p \cdot f) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_p \cdot f - (T_{X_{-t}(p)} X_t \cdot Y_{X_{-t}(p)}) \cdot f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_p \cdot f - Y_{X_{-t}(p)} \cdot (f \circ X_t)) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_p \cdot f - Y_{X_{-t}(p)} \cdot (f + tg(t, \cdot))) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((Y \cdot f)(p) - (Y \cdot f)(X_{-t}(p)) - t(Y \cdot g(t, \cdot))(X_{-t}(p))) = \\
&= - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((Y \cdot f)(X_{-t}(p)) - \lim_{t \rightarrow 0} ((Y \cdot g(t, \cdot))(X_{-t}(p))) = \\
&= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} ((Y \cdot f)(X_s(p)) - \lim_{t \rightarrow 0} ((Y \cdot g(t, \cdot))(X_{-t}(p))),
\end{aligned}$$

si $\lim_{t \rightarrow 0} ((Y \cdot g(t, \cdot))(X_{-t}(p)))$ existe.

Si demostramos que $\lim_{t \rightarrow 0} ((Y \cdot g(t, \cdot))(X_{-t}(p))) = (Y \cdot g(0, \cdot))(p)$ la expresión anterior coincide con $X_p(Y \cdot f) - (Y \cdot (X \cdot f))(p)$ *i.e.* con $[X, Y]_p \cdot f$, lo que acaba la demostración del teorema.

Para ver que

$$\lim_{t \rightarrow 0} ((Y \cdot g(t, \cdot))(X_{-t}(p))) = (Y \cdot g(0, \cdot))(p)$$

se puede proceder así: se toma una carta $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ de M en p y ε suficientemente pequeño para que $X_t(p)$ esté en U si $|t| < \varepsilon$. Si la expresión local de Y en esa carta es

$$\sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow 0} ((Y \cdot g(t, \cdot))(X_{-t}(p))) = \lim_{t \rightarrow 0} Y_{X_{-t}(p)} \cdot g(t, \cdot) = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Y^i(X_{-t}(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{X_{-t}(p)} \cdot g(t, \cdot) = \\
&= \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow 0} Y^i(X_{-t}(p)) (\partial_i (g(t, \varphi^{-1}(\cdot))) (\varphi(X_{-t}(p)))) = \\
&= \sum_{i=1}^n Y^i(p) (\partial_i (g(0, \varphi^{-1}(\cdot))) (\varphi(p))) = Y_p \cdot g(0, \cdot) = \\
&= (Y \cdot g(0, \cdot))(p). \quad \square
\end{aligned}$$

Dados $X, Y \in \mathcal{D}(M)$ y $p \in M$, se define $c : -J_p(X) \rightarrow T_p M$ mediante

$$c(t) = ((X_t)_* Y)_p = T_{X_{-t}(p)} X_t \cdot Y_{X_{-t}(p)}.$$

Se tiene

$$c'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (c(t+h) - c(t)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_{X_{-(t+h)}(p)} X_{(t+h)} \cdot Y_{X_{-(t+h)}(p)} - T_{X_{-t}(p)} X_t \cdot Y_{X_{-t}(p)} \right) = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_{X_{-t}(p)} X_t \circ T_{X_{-(t+h)}(p)} X_h \cdot Y_{X_{-(t+h)}(p)} - T_{X_{-t}(p)} X_t \cdot Y_{X_{-t}(p)} \right) = \\
&= T_{X_{-t}(p)} X_t \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_{X_{-(t+h)}(p)} X_h \cdot Y_{X_{-(t+h)}(p)} - Y_{X_{-t}(p)} \right) \right) = \\
&= T_{X_{-t}(p)} X_t \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_{X_{-h}(X_{-t}(p))} X_h \cdot Y_{X_{-h}(X_{-t}(p))} - Y_{X_{-t}(p)} \right) \right) = \\
&= -T_{X_{-t}(p)} X_t \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(Y_{X_{-t}(p)} - ((X_h)_* Y)_{X_{-t}(p)} \right) \right) = \\
&= T_{X_{-t}(p)} X_t \left(-[X, Y]_{X_{-t}(p)} \right) = -((X_t)_* [X, Y])_p
\end{aligned}$$

luego podemos enunciar

Teorema 4.4.10 *Dados $X, Y \in \mathcal{D}(M)$ y $p \in M$*

$$\frac{d((X_t)_* Y)_p}{dt} = -((X_t)_* [X, Y])_p.$$

Otro resultado interesante que relaciona los flujos con el corchete de Lie es el siguiente

Teorema 4.4.11 *Sean $X, Y \in \mathcal{D}(M)$, uno de ellos completo. Se tiene $[X, Y] = 0$ sii $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$, en $D_t(X) \cap D_s(Y)$, para todos t y s .*

Obsérvese que $D_t(X) \cap D_s(Y)$ se reduce al dominio del campo que, eventualmente, no sea completo.

Demostración. Supondremos que X es completo.

Admitamos que $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$ en $D_s(Y)$ para todos t y s . Dado $p \in M$, sea V un entorno abierto de p , $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que X_t e Y_s están definidos en V si $|t| < \varepsilon$ y $|s| < \delta$. Podemos suponer ε suficientemente pequeño para que $X_t(p)$ esté en V si $|t| < \varepsilon$. Para cualquiera de estos t tenemos

$$((X_t)_* Y)_p = T_{X_{-t}(p)} X_t \cdot Y_{X_{-t}(p)} = \overline{\{s \longrightarrow X_t \circ Y_s(X_{-t}(p))\}}_0$$

pero $(X_{-t}(p))$ está en V , que a su vez está en $D_s(Y)$ si $|s| < \delta$, por lo que la expresión anterior, para tales s , coincide con

$$\overline{\{s \longrightarrow Y_s \circ X_t(X_{-t}(p))\}}_0 = Y_p$$

de donde se deduce

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - (X_t)_* Y)_p = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $[X, Y] = 0$. Entonces, dado $p \in M$, se considera la curva $t \in \mathbb{R} \rightarrow ((X_t)_* Y)_p$.

Según 4.4.10 la derivada de esta curva en todo punto es 0, por lo que la curva es constante y se tiene $Y_p = ((X_t)_* Y)_p$. En consecuencia $Y = (X_t)_* Y$ y entonces el lema 4.4.6 nos dice que $X_t \circ Y_s$ y $Y_s \circ X_t$ están definidos y coinciden en $D_s(Y)$.

□

Corolario 4.4.12 *Sea M compacta y $X, Y \in \mathcal{D}(M)$. Se tiene $[X, Y] = 0$ si $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$, para todos t y s .*

Demostración. Es consecuencia del hecho de que todo campo de vectores en una variedad compacta es completo (ver el problema 4.5.11).

□

El enunciado de este teorema se resume a menudo diciendo que “los flujos conmutan si los campos conmutan”.

El siguiente ejemplo ilustra lo que puede ocurrir si ninguno de los campos es completo

Ejemplo 4.4.13 Se considera la aplicación

$$P : (u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v) \in \mathbb{R}^3,$$

que es una parametrización de su imagen, S . Dado $v_0 \in \mathbb{R}$, la restricción, P_{v_0} , de P a $\mathbb{R}^+ \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$ es también una parametrización, cuya imagen es $S_{v_0} = S \cap (\mathbb{R}^2 \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi))$. La restricción a este abierto de S de la proyección canónica de \mathbb{R}^3 sobre las dos primeras componentes, π_{v_0} , es un sistema de coordenadas de S porque el cambio con P_{v_0} es un difeomorfismo, como se vió en 1.3.11.

Así pues $\{(S_{v_0}, \pi_{v_0}) : v_0 \in \mathbb{R}\}$ es un atlas de S y los cambios de coordenadas entre sus cartas son la identidad. Como consecuencia de esta peculiaridad, si escribimos $\pi_{v_0} = (x_{v_0}, y_{v_0})$, existen campos de vectores, X e Y , en S cuyas expresiones locales en cada carta (S_{v_0}, π_{v_0}) son $\partial/\partial x_{v_0}$ y $\partial/\partial y_{v_0}$ respectivamente.

Es un ejercicio ver que $Y_{-2} \circ X_{-2}(1, 1, \pi/4) = (-1, -1, 5\pi/4)$ y que $X_{-2} \circ Y_{-2}(1, 1, \pi/4) = (-1, -1, -3\pi/4)$, de donde se deduce que $X_{-2} \circ Y_{-2} \neq Y_{-2} \circ X_{-2}$, aunque $[X, Y] = 0$.

Supongamos ahora que, como en el ejemplo anterior, ni X ni Y son completos, pero $[X, Y] = 0$. Para cada $p \in I_t(X)$ se puede considerar la curva $((X_s)_*Y)_p$, que está bien definida para s en $-J_p(X)$. Se deduce como antes que $Y_p = ((X_t)_*Y)_p$, es decir $(X_t)_*(Y|_{D_t(X)}) = Y|_{I_t(X)}$. Pero esto no nos basta para deducir que los flujos conmutan en todo caso.

Si $q \in D_t(X)$ es tal que en él está definido $X_t \circ Y_s$ y todos los $X_t \circ Y_{s'}$ con $s' \in [0, s]$ (lo que equivale a decir que $J_q(Y)$ contiene un intervalo, I , que contiene a $[0, s]$ y cuya imagen por la curva integral maximal de Y está contenida en $D_t(X)$) entonces $X_t \circ Y_h(q)$ como función de $h \in I$ es curva integral de Y con valor inicial $X_t(q)$, luego $X_t \circ Y_h(q) = Y_h \circ X_t(q)$. En particular $X_t \circ Y_s(q) = Y_s \circ X_t(q)$. Cambiando los papeles de X e Y , vemos que lo mismo ocurre si $X_r(q)$ está en $D_s(Y)$ para todo $r \in [0, t]$.

Dado $p \in M$, sean V_1 un entorno de p y $\varepsilon_1 > 0$ tales que X_t está definido en V_1 para todo $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$. Sean asimismo V_2 entorno de p y $\varepsilon_2 > 0$ tales que la aplicación

$$\varphi : (t, q) \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times V_2 \longrightarrow Y_s(q)$$

está bien definida y es C^∞ . Por ser φ continua y $\varphi(0, p) = p$, existen V_3 entorno de p y $\varepsilon_3 > 0$ tales que $\varphi((-\varepsilon_3, \varepsilon_3) \times V_3) \subset V_1$. Designando por V a $V_1 \cap V_3$, vemos que los puntos de V están en $D_t(X)$, para todo $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ y también lo están las imágenes de las curvas integrales de Y que tienen por valor inicial a uno de ellos y están definidas en $(-\varepsilon_3, \varepsilon_3)$. Denotando por ε al mínimo de ε_1 y ε_3 vemos que $X_t \circ Y_s$ está definido en V siempre que $t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y, como consecuencia de lo antes visto, también lo está $Y_s \circ X_t$, y coincide con él. Podemos enunciar

Lema 4.4.14 Sean $X, Y \in \mathcal{D}(M)$. Se tiene $[X, Y] = 0$ sii para todo $p \in M$ existen un entorno, V , de p y $\varepsilon > 0$ tales que $X_t \circ Y_s$ y $Y_s \circ X_t$ están definidos y coinciden en V para todos $t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Demostración. Acabamos de demostrar la parte “sólo si”. La parte “si” se demuestra igual que en 4.4.11.

□

Lema 4.4.15 Sean $X_i, i = 1, \dots, m$, campos de vectores C^∞ tales que $[X_i, X_j] = 0$ para todos $i, j = 1, \dots, m$. Para cada $p \in M$ existe un entorno, V , de p y $\varepsilon > 0$ tales que, siempre que $t_1, \dots, t_m \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, los difeomorfismos sobre su imagen $(X_{\sigma(1)})_{t_{\sigma(1)}} \circ \dots \circ (X_{\sigma(m)})_{t_{\sigma(m)}}$, donde σ es una permutación de $\{1, \dots, m\}$, están definidos en V y sus restricciones a ese abierto son independientes de σ .

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre m . El caso $m = 2$ es el contenido de 4.4.14. Admitámoslo para $m - 1$ campos, $m > 2$.

Basta demostrar que, dada σ , existen V y ε para los difeomorfismos $(X_{\sigma(1)})_{t_{\sigma(1)}} \circ \cdots \circ (X_{\sigma(m)})_{t_{\sigma(m)}}$ y el correspondiente a la permutación idéntica, pues, si se demuestra esto, se cumple lo enunciado para la intersección de esos V y el menor de los ε .

Aplicando la hipótesis de inducción a los campos $X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(m)}$ vemos que existe un entorno V_0 de p y ε_0 tales que, si $t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(m)} \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $(X_{\sigma(2)})_{t_{\sigma(2)}} \circ \cdots \circ (X_{\sigma(m)})_{t_{\sigma(m)}}$ está definido en V_0 y coincide en él con cualquier permutación de esos difeomorfismos, en particular coincide con $(X_1)_{t_1} \circ \cdots \circ (X_{(i-1)})_{t_{(i-1)}} \circ (X_{(i+1)})_{t_{(i+1)}} \circ \cdots \circ (X_m)_{t_m}$ si $\sigma(1) = i$.

Si $i = 1$, se considera un entorno V_1 de $(X_2)_{t_2} \circ \cdots \circ (X_m)_{t_m}(p)$ y $\varepsilon_1 > 0$ tales que $(X_1)_t$ esté definido en V_1 si $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ y entonces basta tomar $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ y por V la antiimagen de V_1 por la restricción a V_0 de $(X_2)_{t_2} \circ \cdots \circ (X_m)_{t_m}$.

Si $i \neq 1$, se considera un entorno V_2 de $(X_2)_{t_2} \circ \cdots \circ (X_{(i-1)})_{t_{(i-1)}} \circ (X_{(i+1)})_{t_{(i+1)}} \circ \cdots \circ (X_m)_{t_m}(p)$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que, para todos $t_i, t_1 \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, $(X_i)_{t_i} \circ (X_1)_{t_1}$ esté definido y coincida con $(X_1)_{t_1} \circ (X_i)_{t_i}$ en V_2 . Denotando por ε a $\min\{\varepsilon_0, \varepsilon_2\}$ y por V a la antiimagen de V_2 por la restricción a V_0 de $(X_2)_{t_2} \circ \cdots \circ (X_{(i-1)})_{t_{(i-1)}} \circ (X_{(i+1)})_{t_{(i+1)}} \circ \cdots \circ (X_m)_{t_m}$ vemos que el difeomorfismo de partida está definido y coincide en V con $(X_1)_{t_1} \circ (X_i)_{t_i} \circ (X_2)_{t_2} \circ \cdots \circ (X_{(i-1)})_{t_{(i-1)}} \circ (X_{(i+1)})_{t_{(i+1)}} \circ \cdots \circ (X_m)_{t_m}$ si las t_j están en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Si $i = 2$ hemos acabado. Si $i > 2$ se procede de manera similar para “conmutar” X_i con X_2 reduciendo V y ε , y así sucesivamente hasta “llevar” X_i a “su lugar”.

□

El siguiente teorema generaliza el lema 4.3.22.

Teorema 4.4.16 Sean $X_i, i = 1, \dots, c$, campos de vectores C^∞ en un entorno abierto de $p \in M$, cuyos valores en p son linealmente independientes, tales que $[X_i, X_j] = 0$ para todos $i, j = 1, \dots, c$. Entonces existe una carta local de M en p , $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, tal que

$$X_i|_U = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

para todo $i = 1, \dots, c$.

Demostración. En primer lugar, reducimos el problema a uno similar en \mathbb{R}^n considerando una carta, $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, tal que U está en el dominio de definición de los X_i . Los $\varphi_* X_i$ son campos de vectores en $\varphi(U)$ y si

encontramos un difeomorfismo sobre su imagen, $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde V es un entorno abierto en $\varphi(U)$ de $\varphi(p)$, tal que

$$\psi_*(\varphi_*X_i) = \frac{\partial}{\partial r^i}$$

para todo i , entonces $(\varphi^{-1}(V), \psi \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})$ es una carta que cumple lo pedido. En efecto, si $\psi \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} = (y^1, \dots, y^n)$, la relación

$$(\psi \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})_*X_i|_{\varphi^{-1}(V)} = \frac{\partial}{\partial r^i}$$

implica (ver ejercicio 4.5.2)

$$X_i|_{\varphi^{-1}(V)} = \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Vamos a demostrar la existencia de tal ψ .

Obsérvese en primer lugar que

- a) Los valores de los φ_*X_i en $\varphi(p)$ son linealmente independientes, porque son la imagen de los de los X_i en p por el isomorfismo $T_p\varphi$.
- b) Se tiene, para todos i y j

$$[\varphi_*X_i, \varphi_*X_j] = \varphi_*[X_i, X_j] = \varphi_*0 = 0.$$

Elegimos φ de forma que $\varphi(p) = 0$. Esto podemos hacerlo ya que, si $\varphi(p) = (a^1, \dots, a^n)$, designamos por τ la traslación $\tau : (r^1, \dots, r^n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow (r^1 - a^1, \dots, r^n - a^n) \in \mathbb{R}^n$, y entonces $(U, \tau \circ \varphi)$ es una carta como la anterior pero cumple $\tau \circ \varphi(p) = 0$.

También podemos elegir, y elegimos, φ de forma que para todo i

$$(\varphi_*X_i)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \right)_0.$$

En efecto, si

$$(\varphi_*X_i)_0 = \sum_{k=1}^n \lambda_i^k \left(\frac{\partial}{\partial r^k} \right)_0,$$

la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_c^1 & \dots & \lambda_c^n \end{pmatrix}$$

tiene rango c . Cambiando de numeración las x^i podemos suponer que el determinante de

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_1^c \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_c^1 & \dots & \lambda_c^c \end{pmatrix}$$

es distinto de 0. Designemos por Λ a la restricción a $\varphi(U)$ de la aplicación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$J = \begin{pmatrix} {}^tL^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix}$$

donde las O representan matrices nulas e I la matriz unidad $(n-c) \times (n-c)$.

Entonces, dado que la matriz jacobiana de Λ en todo punto es J ,

$$(\Lambda_*(\varphi_*X_i))_0 = T_0\Lambda \cdot (\varphi_*X_i)_0$$

tiene por componentes en la base $\{(\partial/\partial r^1)_0, \dots, (\partial/\partial r^n)_0\}$ a

$$J \begin{pmatrix} \lambda_i^1 \\ \vdots \\ \lambda_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_i^1 \\ \vdots \\ \delta_i^n \end{pmatrix}$$

luego

$$(\Lambda_*(\varphi_*X_i))_0 = \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \right)_0.$$

Vemos así que si hubiésemos usado la carta $(U, \Lambda \circ \varphi)$ en lugar de la (U, φ) , habríamos obtenido los campos $(\Lambda \circ \varphi)_*X_i = \Lambda_*(\varphi_*X_i)$ que en 0 valen $(\partial/\partial r^i)_0$.

Designemos por $\{X_t^i : t \in \mathbb{R}\}$ el flujo de φ_*X_i .

Aplicamos el lema 4.4.15 a los campos φ_*X_i y el punto $\varphi(p) = 0$. Si $\varepsilon_0 > 0$ es tal que $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)^n \subset V$, designamos por ε' al mínimo entre ε y ε_0 y definimos

$$\alpha : (a^1, \dots, a^n) \in (-\varepsilon', \varepsilon')^n \longrightarrow X_{a^1}^1 \circ \dots \circ X_{a^c}^c(0, \dots, 0, a^{c+1}, \dots, a^n).$$

Para cada $i = 1, \dots, c$ se tiene

$$\begin{aligned} T_0\alpha \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \right)_0 &= T_0\alpha \cdot \overline{\left\{ t \longrightarrow (0, \overset{i-1}{\dots}, 0, t, 0, \overset{n-i}{\dots}, 0) \right\}}_0 = \\ &= \overline{\alpha \circ \left\{ t \longrightarrow (0, \overset{i-1}{\dots}, 0, t, 0, \overset{n-i}{\dots}, 0) \right\}}_0 = \overline{\left\{ t \longrightarrow X_t^i(0, \dots, 0) \right\}}_0 = \end{aligned}$$

$$= (\varphi_* X_i)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \right)_0,$$

y si $i = c + 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} T_0 \alpha \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \right)_0 &= T_0 \alpha \cdot \overline{\left\{ t \longrightarrow (0, \overset{\cdot}{\dots}, 0, t, 0, \overset{\cdot}{\dots}, 0) \right\}}_0 = \\ &= \overline{\left\{ t \longrightarrow (0, \overset{\cdot}{\dots}, 0, t, 0, \overset{\cdot}{\dots}, 0) \right\}}_0 = \overline{\left\{ t \longrightarrow (0, \overset{\cdot}{\dots}, 0, t, 0, \overset{\cdot}{\dots}, 0) \right\}}_0 = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \right)_0, \end{aligned}$$

luego $T_0 \alpha$ es un isomorfismo, de forma que el teorema de la función inversa asegura que existen entornos abiertos, A y B , de 0 tales que $\alpha|_A$ es un difeomorfismo de A sobre B . Reduciendo ε' si fuese necesario, podemos suponer que $A = (-\varepsilon', \varepsilon')^n$.

Por otra parte, para cada $i = 1, \dots, c$, $(a^1, \dots, a^n) \in (-\varepsilon', \varepsilon')^n$, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\alpha_* \frac{\partial}{\partial r^i} \right)_{\alpha(a^1, \dots, a^n)} &= T_{(a^1, \dots, a^n)} \alpha \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r^i} \right)_{(a^1, \dots, a^n)} = \\ &= \overline{\left\{ t \in (-\varepsilon' - a^i, \varepsilon' - a^i) \longrightarrow (a^1, \dots, a^{i-1}, a^i + t, a^{i+1}, \dots, a^n) \right\}}_0 = \\ &= \overline{\left\{ t \longrightarrow X_{a^1}^1 \circ \dots \circ X_{a^i+t}^i \circ \dots \circ X_{a^c}^c(0, \dots, 0, a^{c+1}, \dots, a^n) \right\}}_0 = \\ &= \overline{\left\{ t \longrightarrow X_{a^i+t}^i \circ X_{a^1}^1 \circ \dots \circ X_{a^c}^c(0, \dots, 0, a^{c+1}, \dots, a^n) \right\}}_0 = \\ &= \overline{\left\{ t \longrightarrow X_t^i \circ X_{a^1}^1 \circ \dots \circ X_{a^i}^i \circ \dots \circ X_{a^c}^c(0, \dots, 0, a^{c+1}, \dots, a^n) \right\}}_0 = \\ &= \overline{\left\{ t \longrightarrow X_t^i(\alpha(a^1, \dots, a^n)) \right\}}_0 = (\varphi_* X_i)_{\alpha(a^1, \dots, a^n)}, \end{aligned}$$

luego

$$\alpha_* \frac{\partial}{\partial r^i} = \varphi_* X_i.$$

Entonces

$$(\alpha^{-1})_*(\varphi_* X_i) = \frac{\partial}{\partial r^i}$$

para todo $i = 1, \dots, c$, y por tanto podemos tomar $\psi = \alpha^{-1}$.

□

Ejemplo 4.4.17 En \mathbb{R}^2 se consideran los campos de vectores

$$X = (x + y - 1)^2 \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = (1 - y) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

cuyo corchete de Lie es 0 y cuyos valores en $(0,0)$ son linealmente independientes. Buscamos un sistema de coordenadas, (x', y') , en un entorno de $(0,0)$ en el que

$$X = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y'}.$$

El flujo de X viene dado por

$$X_t(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0 + (y_0 - 1)t(x_0 + y_0 - 1)}{1 - t(x_0 + y_0 - 1)}, y_0 \right)$$

y el de Y por

$$Y_t(x_0, y_0) = (x_0 + (1 - y_0)(e^t - 1), (y_0 - 1)e^t + 1).$$

Según la demostración del teorema precedente, un sistema de coordenadas como el buscado viene dado por la inversa de la restricción a un entorno de $(0,0)$ de la aplicación

$$\begin{aligned} (t, s) &\longrightarrow Y_s \circ X_t(0, 0) = Y_s \left(\frac{t}{1+t}, 0 \right) = \\ &= \left(\frac{t}{1+t} - 1 + e^s, 1 - e^s \right). \end{aligned}$$

Para encontrar la inversa planteamos

$$\begin{aligned} x &= \frac{t}{1+t} - 1 + e^s \\ y &= 1 - e^s \end{aligned}$$

lo que exige $y < 1$, $s = \text{Ln}(1 - y)$, $1 - x - y \neq 0$ y $t = (x + y)/(1 - x - y)$.

Podemos pues tomar en el entorno de $(0,0)$ dado por $y < 1$, $1 - x - y \neq 0$ el sistema de coordenadas

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + y}{1 - x - y} \\ y' &= \text{Ln}(1 - y). \end{aligned}$$

Se comprueba por cálculo directo que

$$\begin{aligned} X\left(\frac{x+y}{1-x-y}\right) &= 1 \\ X(\ln(1-y)) &= 0 \\ Y\left(\frac{x+y}{1-x-y}\right) &= 0 \\ Y(\ln(1-y)) &= 1. \end{aligned}$$

4.5. Ejercicios complementarios

Ejercicio 4.5.1 (Integrales primeras) Sea M una variedad diferenciable, $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathcal{D}(M)$. Demostrar que para que cada curva integral de X esté contenida en un subconjunto de la forma $f = cte$, es condición necesaria y suficiente que $X(f) = 0$.

Ejercicio 4.5.2 Se pide:

1. Sea $X \in \mathcal{D}(M)$. Demostrar que si $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta de M y

$$\varphi_*(X|_U) = \sum_{i=1}^n L^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

para unas ciertas funciones L^i en $\varphi(U)$, entonces

$$X|_U = \sum_{i=1}^n (L^i \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

2. Dada $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ por $F = (x^2z, yx + z)$, demostrar que $X = x(\partial/\partial x) + xz(\partial/\partial y) + z(\partial/\partial z)$ es proyectable por F y determinar un Y tal que $F_*X = Y$. ¿Es único tal Y ?

3. Determinar otro $Z \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ que sea proyectable por F .

4. Determinar $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ que no sea proyectable por F .

Ejercicio 4.5.3 Sea $f = (f^1, \dots, f^m)$ una aplicación C^∞ de un abierto de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m que sea submersión en todo punto de $S = f^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{R}^m$. Designemos por i_S la inyección canónica de la subvariedad S en \mathbb{R}^n . Dado un campo de vectores C^∞ en un entorno de S , X , demostrar que existe un campo de vectores, Z , en S tal que $i_{S*}Z = X$ sii $X(f^i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Ejercicio 4.5.4 Sea S una subvariedad C^∞ de \mathbb{R}^n , i la inyección canónica de S en \mathbb{R}^n y $X \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que existe un campo de vectores, Z , sobre S tal que $i_*Z = X$. Demostrar que Z es C^∞ .

Ejercicio 4.5.5 Se designa por C la subvariedad de \mathbb{R}^3 dada por $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, z \neq 0\}$. Sea $Z \in \mathcal{D}(C)$ el único campo de vectores que cumple $i_*Z = X$ donde $i : C \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la inyección canónica y $X = x(\partial/\partial x) + y(\partial/\partial y) + z(\partial/\partial z)$. Determinar el flujo de Z .

Ejercicio 4.5.6 En la situación del problema anterior se considera el campo de vectores $D = x(\partial/\partial x) + (x + y)(\partial/\partial y) + z(\partial/\partial z)$. Determinar los puntos, p , de C y los $v \in T_p C$ tales que $T_p i \cdot v = D_p$.

Ejercicio 4.5.7 En $S^2 - \{N\}$ se consideran los campos de vectores cuyas expresiones locales para la proyección estereográfica de polo N son

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x_N^1} \\ Y &= (x_N^1)^3 \frac{\partial}{\partial x_N^1} \end{aligned}$$

¿Existen campos de vectores diferenciables en S^2 que coincidan con los anteriores en $S^2 - \{N\}$? Determinarlos en caso afirmativo.

Ejercicio 4.5.8 En S^2 se consideran las cartas $(U_n, Q_n = (x^1, x^2))$ y $(U_e, Q_e = (y^1, y^2))$, donde U_n es el conjunto $z > 0$, U_e el $y > 0$, $Q_n : (x, y, z) \in U_n \rightarrow (x, y)$ y $Q_e : (x, y, z) \in U_e \rightarrow (x, z)$. Determinar, si existe, un campo de vectores en $U_n \cup U_e$ cuya expresión local en U_n es

$$\sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \right).$$

Ejercicio 4.5.9 Se considera el campo de vectores X sobre \mathbb{R}^2 dado por $X = x^2 y(\partial/\partial x) + y^2(\partial/\partial y)$. Se pide

1. Determinar $c_{(x_0, y_0)}$ y $J_{(x_0, y_0)}$ para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
2. Dibujar la imagen de una $c_{(x_0, y_0)}$ que pase por cada cuadrante y de una que corte a cada eje coordenado.
3. Determinar D_t , I_t y X_t para cada $t \in \mathbb{R}$.
4. Comprobar explícitamente la relación $X_t \circ X_s = X_{t+s}$.

Ejercicio 4.5.10 Resolver un problema similar al anterior cuando X es el campo de vectores sobre \mathbb{R}^3 $X = x^2 y^2(\partial/\partial x) + 2(\partial/\partial y) + yz(\partial/\partial z)$.

Ejercicio 4.5.11 Sea M compacta. Demostrar que todo $X \in \mathcal{D}(M)$ es completo. Indicación: utilizar el teorema de existencia y 4.3.16 .

Ejercicio 4.5.12 Determinar $X, Y, Z, [X, Y], [X, Z] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, donde X, Y, Z vienen dados por sus flujos $\{X_t\}, \{Y_t\}, \{Z_t\}$ respectivamente, siendo

$$\begin{aligned} X_t &: p \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow e^t p \in \mathbb{R}^3 \\ Y_t &: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow e^{t \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, a, b, c \in \mathbb{R} \\ Z_t &: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D_t \longrightarrow \begin{pmatrix} x - zLn|1 - e^{yt}| \\ y - Ln|1 - e^{yt}| \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

donde $D_t = \mathbb{R}^3$ si $t \leq 0$ y $D_t = \{(x, y, z) : y < -Lnt\}$ si $t > 0$.

Ejercicio 4.5.13 Se consideran las familias

- $\{F_t : |t| < 1\}$ donde $F_t : x \in \{z \in \mathbb{R} : z > 1\} \longrightarrow \sqrt{t+x^2} \in \mathbb{R}$.
- $\{F_t : t \in \mathbb{R}\}$ donde $F_t : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x, ye^t) \in \mathbb{R}^2$.
- $\{F_t : t \in \mathbb{R}\}$ donde $F_t : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow ((x-t) \operatorname{Arctg} y, y) \in \mathbb{R}^2$, siendo Arctg la determinación de arco tangente que toma valores en $(-\pi/2, \pi/2)$.
- $\{F_t : t \in \mathbb{R}\}$ donde $F_t : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (x + tz, y - t, z) \in \mathbb{R}^3$.

Determinar cuales de estas familias son flujo de algún campo de vectores y determinar éste en los casos favorables.

Ejercicio 4.5.14 Determinar los campos de vectores C^∞ de \mathbb{R}^n cuyo flujo está formado por homotecias de razón positiva, *i.e.*, para cada $t \in \mathbb{R}$ existe $K(t) \in \mathbb{R}^+$ tal que $X_t(p) = K(t)p$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 4.5.15 Sea M una variedad diferenciable, $X \in \mathcal{D}(M)$, I un intervalo y $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva integral de X . Demostrar que si existe un $s \in I$ tal que $\dot{\gamma}_s = 0$, entonces γ es constante.

Ejercicio 4.5.16 Se consideran en \mathbb{R}^2 los campos de vectores $X = y(\partial/\partial x)$ e $Y = (x^2/2)(\partial/\partial y)$. Se pide

- Determinar los flujos de X , Y y $[X, Y]$.
- Determinar la curva integral maximal de $X + Y$ que tiene a $(1, 1/\sqrt{3})$ por valor inicial.
- Indicar cuales de los campos X , Y , $[X, Y]$ y $X + Y$ son completos.

Ejercicio 4.5.17 Determinar todos los campos de vectores diferenciables de \mathbb{R}^3 cuyas curvas integrales tengan sus imágenes contenidas en curvas de la forma

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= C \\x + y + z &= K\end{aligned}$$

donde C y K son números reales.

Ejercicio 4.5.18 Se considera a \mathbb{R} dotado de su estructura diferenciable habitual. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función cuya derivada no se anula en ningún punto.

a) Demostrar que, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, existe un intervalo abierto que contiene a 0, I_{x_0} , una aplicación C^∞ de I_{x_0} en \mathbb{R} , γ_{x_0} , tal que $f(\gamma_{x_0}(t)) = t + f(x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ se elige un I_{x_0} y un γ_{x_0} como los de a) y se define un campo de vectores, X_f , sobre \mathbb{R} mediante $(X_f)_{x_0} = (\dot{\gamma}_{x_0})_0$. Determinése la expresión local de X_f en la carta dada por la identidad.

c) Demuéstrese que cada una de las curvas γ_{x_0} es curva integral de X_f .

Capítulo 5

Teorema de Frobenius

5.1. Subvariedades

En esta sección vamos a generalizar la noción de subvariedad de un espacio euclideo, que hemos recordado en el Capítulo 1.

Con el fin de matizar algunos resultados interesantes, no trataremos sólo de variedades Hausdorff con base numerable.

Sean L y M variedades diferenciables y $f \in C^\infty(L, M)$.

Definición 5.1.1 Dado $x \in L$, se dice que f es **inmersión** en x si $T_x f$ es inyectiva. Se dice que f es **inmersión** si lo es en todo punto.

Obsérvese que si f es inmersión en algún punto, $\dim(L) \leq \dim(M)$.

Lema 5.1.2 Sea $x \in L$, (U, φ) carta de L en x y (V, ψ) carta de M en $f(x)$. La aplicación f es inmersión en x sii la derivada en $\varphi(x)$ de la expresión local de f en esas cartas es inyectiva.

Demostración. La jacobiana de la expresión local de f en esas cartas en $\varphi(x)$ es a la vez la matriz de $T_x f$ y la de la derivada en bases apropiadas, luego cada una de estas aplicaciones es inyectiva sii la otra lo es.

□

Definición 5.1.3 Se dice que (L, f) es una **subvariedad inmersa** de M si f es inmersión inyectiva.

Ejemplo 5.1.4 Sea S una subvariedad C^∞ de dimensión d de \mathbb{R}^n e $i : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ la inyección canónica. Entonces (S, i) es subvariedad inmersa de \mathbb{R}^n .

Para ver que $T_x i$ es inyectiva para todo $x \in S$ se procede así: se toma una carta de \mathbb{R}^n de subvariedad para S , $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, en x . La expresión local de i en las cartas

$$(U \cap S, (x^1|_{U \cap S}, \dots, x^d|_{U \cap S}))$$

de S en x y $(U, (x^1, \dots, x^n))$, de \mathbb{R}^n en x es

$$(x^1, \dots, x^d) \longrightarrow (x^1, \dots, x^d, 0, \dots, 0),$$

cuya derivada en todo punto es inyectiva.

Definición 5.1.5 *Dos subvariedades inmersas de M , (L, f) y (P, g) , se dicen **equivalentes** si existe un difeomorfismo, φ , de L sobre P tal que el diagrama siguiente es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ \varphi \downarrow & & \nearrow g \\ P & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

Así se define una relación de equivalencia.

Si (L, f) es una subvariedad inmersa de M , existe una única estructura diferenciable en $f(L)$ que hace de f (pensada como aplicación en $f(L)$) un difeomorfismo: si (U, ψ) es una carta de L , $(f(U), \psi \circ f^{-1})$ es carta de $f(L)$. La topología de $f(L)$ correspondiente a esta estructura diferenciable, que ha de ser tal que f sea un homeomorfismo, es aquella para la que un subconjunto de $f(L)$ es abierto sii su imagen por f^{-1} es un abierto de L . Cuando en $f(L)$ consideramos esta estructura diferenciable, $(f(L), i)$, donde i es la inyección canónica de $f(L)$ en M , es una subvariedad inmersa de M , equivalente a (L, f) . Si (N, g) es una subvariedad equivalente a la (L, f) , se tiene $g(N) = f(L)$ y la estructura diferenciable de $f(L)$ que hace de f un difeomorfismo es la misma que hace de g un difeomorfismo.

Vemos así que toda subvariedad inmersa de una variedad diferenciable es equivalente a una en la que el conjunto es un subconjunto de la variedad ambiente y la aplicación es la inyección canónica. Esta equivalencia hace que en algunos libros, sólo se consideren subvariedades dadas por subconjuntos de la variedad considerada. El conjunto está dotado de una estructura diferenciable cuya relación con la dada en la variedad es que la inyección canónica sea inmersión. La topología no tiene que coincidir con la relativa, pero tiene que ser igual o más fina, por ser la inyección canónica continua. En estas condiciones se suele decir simplemente que el subconjunto dotado de la estructura diferenciable que se considera “*es una subvariedad inmersa*”.

Ejemplo 5.1.6 Volvamos al ejemplo 2.2.9. La restricción a $(0, 2\pi)$ de Φ viene dada por $f : s \in (0, 2\pi) \longrightarrow (\sin 2s, \sin s) \in \mathbb{R}^2$. La aplicación f es inyectiva y además es inmersión porque su jacobiana es $(2 \cos 2s, \cos s)$, que no se anula en ningún punto. En consecuencia, $((0, 2\pi), f)$ es una subvariedad inmersa de \mathbb{R}^2 . La imagen de f es \mathcal{K} y la estructura diferenciable de \mathcal{K} que hace de f un difeomorfismo es aquella para la que $f^{-1} \equiv \mathbf{x}$ es un sistema global de coordenadas, que es una de las consideradas en 2.2.9. Podemos pues decir que la Figura de Ocho, dotada de la estructura diferenciable que contiene a \mathbf{x} es una subvariedad inmersa de \mathbb{R}^2 . La topología que corresponde a esta estructura diferenciable no es la relativa, porque admite entornos de $(0, 0)$ de la forma



mientras que todo entorno de $(0, 0)$ en la topología relativa, ha de contener algún subconjunto de la forma



De manera similar se ve que \mathcal{K} dotado de la estructura diferenciable que contiene a la inversa, \mathbf{y} , de la restricción de Φ a $(-\pi, \pi)$ es subvariedad inmersa de \mathbb{R}^2 . Pero es otra, ya que las estructuras diferenciables son diferentes. La topología también cambia. En particular, aunque las dos estructuras diferenciables sean difeomorfas, las dos subvariedades inmersas no son equivalentes, porque, de serlo, las estructuras deberían coincidir.

Proposición 5.1.7 Sean M y N variedades y S un subconjunto de M dotado de una estructura diferenciable para la que es subvariedad inmersa. Para toda $f \in C^\infty(M, N)$ se tiene $f|_S \in C^\infty(S, N)$.

Demostración. La restricción de f a S es la composición de f con la inyección canónica de S en M , y ambas aplicaciones son C^∞ para las estructuras diferenciables consideradas.

□

Definición 5.1.8 Una inmersión se dice **regular** si es un homeomorfismo sobre su imagen dotada de la topología relativa.

Definición 5.1.9 Una subvariedad inmersa, (L, f) , se dice **subvariedad regular** si f es inmersión regular.

Si (L, f) es una subvariedad inmersa, decir que es regular es lo mismo que decir que la topología de $f(L)$ que corresponde a la estructura diferenciable para la que f es difeomorfismo, es la relativa.

En particular, cuando (S, i) es una subvariedad inmersa de M , siendo S un subconjunto de M dotado de una cierta estructura diferenciable e i la inyección canónica, decir que es subvariedad regular es decir que la topología de variedad de S es la relativa. En estas circunstancias se dirá simplemente que S es subvariedad regular.

Evidentemente, si una subvariedad inmersa es equivalente a una subvariedad regular, es regular.

Proposición 5.1.10 Sea (L, f) una subvariedad inmersa de M . Si L es compacta y M Hausdorff, f es regular.

Demostración. La imagen de f es compacta y Hausdorff para la topología relativa. La aplicación f es pues biyectiva y continua del compacto L en el Hausdorff $f(L)$, luego es un homeomorfismo. En efecto, dado un cerrado de L , su imagen es compacto en Hausdorff y, por tanto, cerrado.

□

Definición 5.1.11 Un subconjunto, S , de M se dice **subvariedad propia** de M de dimensión d si, para todo $p \in S$ existe una carta local, (U, φ) , de M en p tal que

$$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap \left(\mathbb{R}^d \times \left\{ (0, \overset{(n-d)}{\dots}, 0) \right\} \right).$$

La expresión anterior no tiene sentido estricto si $d = n$. Si extendemos esta definición de manera natural al caso $d = n$, podremos decir que las subvariedades propias de dimensión $\dim(M)$ de M son las subvariedades abiertas.

Si S es una subvariedad propia de M de dimensión d , a cada carta como la (U, φ) , cuya existencia asegura la definición anterior, podemos asociar el par $(U \cap S, \pi \circ \varphi|_{U \cap S})$, donde π es la proyección sobre las d primeras componentes. Obsérvese que si $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, $\pi \circ \varphi|_{U \cap S} = (x^1|_{U \cap S}, \dots, x^d|_{U \cap S})$. Estos pares son cartas locales que componen un atlas. La estructura diferenciable definida por ese atlas se llama “**estructura de subvariedad de S** ”, una carta como la (U, φ) , “**carta de M de subvariedad para S** ”, y una como la $(U \cap S, \pi \circ \varphi|_{U \cap S})$, “**carta de subvariedad de S** ”.

Lema 5.1.12 *Toda subvariedad propia es subvariedad regular para su estructura diferenciable de subvariedad.*

Demostración. Se trata de demostrar que si S es una subvariedad propia de M , designamos por i la inyección canónica de S en M y consideramos en S la estructura de subvariedad, (S, i) es una subvariedad regular de M .

Para cada p en S tomamos una carta de M de subvariedad para S en p , (U, φ) . La expresión local de i en las cartas $(U \cap S, \pi \circ \varphi|_{U \cap S})$ y (U, φ) es la restricción a $\varphi(U)$ de $j(d, n)$. Esto muestra que i es C^∞ y, dado que la jacobiana de $j(d, n)$ es de rango d , deducimos que el $T_p i$ es inyectiva. En consecuencia, i es inmersión, y (S, i) es subvariedad inmersa.

Mostrar que i es homeomorfismo sobre su imagen dotada de la topología relativa es demostrar que la topología de variedad es la misma que la relativa, pero esto es consecuencia de 2.3.5. En efecto, las cartas $(U \cap S, \pi \circ \varphi|_{U \cap S})$ forman un atlas y, si consideramos en S la topología relativa, los sistemas de coordenadas correspondientes, $\pi \circ \varphi|_{U \cap S}$, son homeomorfismos sobre su imagen.

□

Proposición 5.1.13 *Una subvariedad propia de dimensión menor que la de la variedad ambiente, no puede ser densa en ella.*

Demostración. Sea S subvariedad propia de dimensión d de la variedad M de dimensión n y $d < n$. Sea (U, φ) una carta de M de subvariedad de S . Entonces $\varphi^{-1} \left(\mathbb{R}^d \times \left(\mathbb{R}^{n-d} - \left\{ (0, \overset{n-d}{\dots}, 0) \right\} \right) \right)$ es un abierto que no contiene puntos de S .

□

En todo lo referente a subvariedades inmersas, es fundamental el siguiente resultado, que generaliza el teorema de inmersión del capítulo 1.

Teorema 5.1.14 (de inmersión) *Sean L y M variedades de dimensiones respectivas d y n y $f : L \rightarrow M$ inmersión en $p \in L$. Existen cartas locales, (U, φ) de L en p y (V, ψ) de M en $f(p)$, tales que $f(U) \subset V$ y la expresión local de f en ellas es la restricción a $\varphi(U)$ de*

$$j(d, n) : (x^1, \dots, x^d) \rightarrow (x^1, \dots, x^d, 0, \overset{n-d}{\dots}, 0).$$

La demostración de este teorema consiste en tomar cartas, (U_0, φ_0) de L en p y (V_0, ψ_0) de M en $f(p)$, tales que $f(U_0) \subset V_0$ y aplicar el teorema de inmersión para espacios euclideos a la expresión local de f en esas cartas.

Corolario 5.1.15 Sea (L, f) una subvariedad inmersa de M y $p \in L$. Existe un entorno, U , de p en L tal que $(U, f|_U)$ es subvariedad regular.

Demostración. Consideremos cartas locales, (U, φ) de L en p y (V, ψ) de M en $f(p)$, tales que $f(U) \subset V$ y la expresión local de f en ellas es la restricción a $\varphi(U)$ de $j(d, n)$. Entonces

$$f|_U = \psi^{-1} \circ j(d, n) \circ \varphi = \psi^{-1}|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}} \circ j(d, n) \circ \varphi$$

es homeomorfismo sobre su imagen por ser compuesta de aplicaciones que lo son.

□

Sean M y P variedades, (L, f) una subvariedad inmersa de M y $g \in C^\infty(P, M)$ tales que $g(P) \subset f(L)$. Por ser f inyectiva, tiene sentido considerar $f^{-1} : f(L) \rightarrow L$ y entonces definir $g_0 = f^{-1} \circ g$ que aplica P en L . Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & M \\ & \searrow g_0 & \uparrow f \\ & & L \end{array}$$

Si L es un subconjunto de M y f es la inyección canónica, g_0 no es sino g pensada como aplicación en L .

Proposición 5.1.16 En las condiciones anteriores:

1. La aplicación g_0 es C^∞ sii es continua.
2. Si f es regular, g_0 es C^∞ .

Demostración. 1. La parte solo si es trivial. Supongamos que g_0 es continua y sea $p \in P$. Sean (U, φ) y (V, ψ) cartas de L en $g_0(p)$ y M en $g(p)$ respectivamente, tales que $f(U) \subset V$ y la expresión local de f en ellas es la restricción a $\varphi(U)$ de $j(d, n)$, donde d es la dimensión de L .

Como g_0 es continua, $g_0^{-1}(U)$ es entorno abierto de p en P . Entonces, existe una carta de P en p , (W, ρ) , tal que $W \subset g_0^{-1}(U)$.

El siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 W & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^n \\
 & \searrow g_0 & \uparrow f & & \uparrow j(d, n) \\
 & & U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^d
 \end{array}$$

y de él deducimos que la expresión local de g_0 cumple

$$\varphi \circ g_0 \circ \rho^{-1} = \pi \circ \psi \circ g \circ \rho^{-1},$$

donde π es la proyección canónica de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}^d . Esto demuestra que g_0 es C^∞ en p , por serlo g .

2. Si f es regular, g_0 es continua. En efecto: la antiimagen por g_0 de un abierto, A , de L es la antiimagen por g de $f(A)$. Si f es regular, $f(A)$ es abierto de $f(L)$ en la topología relativa, de forma que es la intersección de un abierto A' de M con $f(L)$. Entonces $g_0^{-1}(A)$ coincide con $g^{-1}(A')$, que es abierto por ser g continua.

□

Ejemplo 5.1.17 Consideremos de nuevo la Figura de Ocho de 5.1.6 y 2.2.9, \mathcal{K} , dotada de la estructura diferenciable que contiene a \mathbf{x} , que es una subvariedad inmersa de \mathbb{R}^2 . La aplicación $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene su imagen en \mathcal{K} y por tanto induce una aplicación $\Phi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^2 \\
 & \searrow \Phi_0 & \uparrow i \\
 & & \mathcal{K}
 \end{array}$$

donde i es la inyección canónica de \mathcal{K} en \mathbb{R}^2 .

La aplicación Φ_0 no es continua en 0. En efecto, su expresión local en la carta canónica de \mathbb{R} y la correspondiente a \mathbf{x} de \mathcal{K} es $\mathbf{x} \circ \Phi_0$, cuya restricción a $(-\pi, \pi)$ coincide con $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1}$, que no es continua según vimos en 2.2.9.

Ejemplo 5.1.18 La aplicación, g , de S^1 en \mathbb{R}^2 dada por $g(x + iy) = (2xy, y)$ es C^∞ y su imagen es \mathcal{K} . La aplicación g_0 que induce sobre \mathcal{K} no puede ser continua porque S^1 es compacta y \mathcal{K} no.

El siguiente resultado puede ser enunciado diciendo que, en subvariedades, la topología determina la estructura diferenciable.

Corolario 5.1.19 *Supongamos que (L, f) es subvariedad inmersa para dos estructuras diferenciables de L , tales que las topologías correspondientes coinciden. Entonces las estructuras diferenciables coinciden.*

Demostración. Sean L_1 y L_2 las variedades que resultan de considerar en L sendas estructuras diferenciables, correspondientes a la misma topología, tales que f es inmersión inyectiva.

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{f} & M \\ & \searrow Id_L & \uparrow f \\ & & L_2 \end{array}$$

e Id_L es continua como aplicación de L_1 en L_2 por ser iguales las topologías. Como consecuencia de 5.1.16 Id_L es C^∞ . Cambiando 1 por 2, vemos que Id_L es un difeomorfismo y entonces, por 2.6.8, las estructuras diferenciables coinciden.

□

Corolario 5.1.20 *Sean M y N variedades, $f \in C^\infty(M, N)$ y S una subvariedad propia de N , tal que $f(M) \subset S$. Entonces, si consideramos en S la estructura de subvariedad y pensamos en f como aplicación de M en S , f es C^∞ .*

Demostración. Sea i la inyección canónica de S en N . Por 5.1.12, sabemos que, si consideramos en S la estructura de subvariedad, i es regular. Pensar en f como aplicación de M en S , es confundirla con la aplicación f_0 que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow f_0 & \uparrow i \\ & & S \end{array}$$

y es C^∞ como consecuencia de 5.1.16.

□

Teorema 5.1.21 *Si (L, f) es subvariedad regular, $f(L)$ es subvariedad propia. Cuando consideramos en $f(L)$ la estructura de subvariedad, la biyección de L sobre $f(L)$ inducida por f es un difeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que f es regular. Dado $p \in f(L)$, consideramos cartas (U, φ) de L en $f^{-1}(p)$ y (V, ψ) de M en p , tales que $f(U) \subset V$ y la expresión local de f en ellas es la restricción a $\varphi(U)$ de $j(d, n)$.

Vamos a construir, a partir de (V, ψ) , una carta (V', ψ') tal que

$$\psi'(V' \cap f(L)) = \varphi(U) \times \left\{ (0, \overset{(n-d)}{\dots}, 0) \right\} = \psi'(V') \cap \left(\mathbb{R}^d \times \left\{ (0, \overset{(n-d)}{\dots}, 0) \right\} \right),$$

donde n es la dimensión de la variedad ambiente y d la de L . V' será un abierto de V y ψ' la restricción de ψ a él. La existencia de esta carta demostrará que $f(L)$ es subvariedad propia.

Sabemos que

$$\psi(V \cap f(U)) = \psi(f(U)) = \varphi(U) \times \left\{ (0, \overset{(n-d)}{\dots}, 0) \right\}.$$

Vamos a reducir V para que la intersección con $f(L)$ coincida con la que tiene con $f(U)$. Por ser $f(U)$ abierto de $f(L)$ en la topología relativa, existe un abierto, V'' , de M tal que $f(U) = f(L) \cap V''$. Entonces

$$\psi(V \cap V'' \cap f(L)) = \psi(f(U)) = \varphi(U) \times \left\{ (0, \overset{(n-d)}{\dots}, 0) \right\}.$$

Ahora, basta tomar

$$V' = V \cap V'' \cap (\psi^{-1}(\varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-d}))$$

para tener lo propuesto.

Consideremos en $f(L)$ la estructura de subvariedad y sea i la inyección canónica. Por 5.1.12 i es regular, de forma que la aplicación, f_0 , de L en $f(L)$ inducida por f es C^∞ . Al ser f regular, la aplicación de $f(L)$ en L inducida por i , que es f_0^{-1} , es también C^∞ , luego f_0 es difeomorfismo.

□

Corolario 5.1.22 *Si S es un subconjunto que es subvariedad regular, es una subvariedad propia y la estructura diferenciable es la de subvariedad.*

Demostración. Sea S_1, S dotado de la estructura diferenciable para la que S es subvariedad regular. Entonces (S_1, i) , es inmersión regular, donde i es la inyección canónica. Por 5.1.21, S es subvariedad propia. Sea S_2, S dotado de su estructura de subvariedad. Usando de nuevo 5.1.21 vemos que la aplicación de S_1 en S_2 inducida por i es un difeomorfismo, pero esta aplicación es la identidad de S , luego las estructuras son la misma.

□

Ya hemos visto que el que dos subvariedades inmersas tengan la misma imagen no implica que sean equivalentes, pero la patología puede ser mayor: dos subvariedades inmersas de diferentes dimensiones, pueden tener la misma imagen.

Ejemplo 5.1.23 Sea \mathbb{R}^2_{nn} la variedad diferenciable que resulta de considerar a \mathbb{R}^2 dotado de la estructura diferenciable definida en 2.3.13. Seguiremos designando por \mathbb{R}^2 a la variedad que resulta de considerar en ese conjunto la estructura diferenciable habitual.

La aplicación $j : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ es una inmersión inyectiva (regular) para las estructuras diferenciables canónicas, por lo que (\mathbb{R}^2, j) es una subvariedad inmersa de \mathbb{R}^3 .

Considerada como aplicación de \mathbb{R}^2_{nn} en \mathbb{R}^3 , j es también inmersión inyectiva. En efecto, dado un punto arbitrario, (b, a) , de \mathbb{R}^2_{nn} , la expresión local de j en las cartas $(\mathbb{R} \times \{a\}, \pi_a)$ de \mathbb{R}^2_{nn} y canónica de \mathbb{R}^3 , es $x \longrightarrow (x, a, 0)$, lo que muestra que j es diferenciable e inmersión.

Las subvariedades inmersas (\mathbb{R}^2, j) y (\mathbb{R}^2_{nn}, j) tienen, obviamente, la misma imagen, pero la primera es de dimensión 2 y la segunda de dimensión 1.

Esta situación se produce porque \mathbb{R}^2_{nn} no tiene base numerable, como vemos en el siguiente resultado.

Teorema 5.1.24 Sean (A, α) y (B, β) subvariedades inmersas de una variedad diferenciable, tales que $\beta(B) \subset \alpha(A)$. Entonces, si A tiene base numerable de abiertos, $\dim(B) \leq \dim(A)$.

Demostración. Sea M la variedad ambiente, $n = \dim(M)$, $a = \dim(A)$ y $b = \dim(B)$. Supongamos que $a < b$. Llegaremos a contradicción como sigue.

Tomamos p en B y consideramos cartas (U, φ) de B en p y (V, ψ) de M en $\beta(p)$ tales que $\beta(U) \subset V$ y la expresión local de β en ellas sea $j(b, n)$. Entonces, $\psi(\beta(U)) = \varphi(U) \times \left\{ (0, \overset{(n-b)}{\dots}, 0) \right\} \subset \mathbb{R}^n$. Si designamos por π la proyección de \mathbb{R}^n sobre las b primeras componentes, $\pi \circ \psi(\beta(U))$ coincide con $\varphi(U)$, que es un abierto de \mathbb{R}^b .

Designemos por A' el abierto $\alpha^{-1}(V)$ de A . Se tiene $\beta(U) \subset \alpha(A')$, luego $\pi \circ \psi \circ \alpha|_{A'}$ es una aplicación diferenciable de A' en \mathbb{R}^b , cuya imagen contiene el abierto $\varphi(U)$. Sea A'' la antiimagen de $\varphi(U)$, que también es abierta.

Los elementos de una base topológica numerable de A que estén contenidos en A'' , forman una base numerable, \mathcal{B} , de A'' .

Existe un atlas numerable de A'' . En efecto, si $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ es un atlas de A , para cada p en A'' se toma $i \in I$ tal que $p \in U_i$ y $L \in \mathcal{B}$ tal que $p \in L \subset U_i$. Los L así elegidos forman una familia numerable. Para cada una de ellos, se considera un $i \in I$ tal que $L \subset U_i$ y, entonces, el par $(L, \varphi_i|_L)$. Los pares construidos así forman un atlas numerable de A'' .

Sea ahora $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ un atlas numerable de A'' . Fijemos $i \in I$. Para cada $p \in \varphi_i(U_i)$ se elige una bola cerrada, C , de \mathbb{R}^a que lo contenga, que esté contenida en $\varphi_i(U_i)$, de radio racional y tal que su centro tenga todas sus coordenadas racionales. Las C así escogidas componen un recubrimiento numerable de $\varphi_i(U_i)$, de forma que los $\varphi_i^{-1}(C)$ obtenidas al variar i y C , forman un recubrimiento numerable de A'' . En consecuencia, los $\pi \circ \psi \circ \alpha \circ \varphi_i^{-1}(C)$ constituyen una familia numerable que recubre el abierto $\varphi(U)$. Cada uno de estos conjuntos es cerrado en $\varphi(U)$ por ser compacto en Hausdorff.

Recordemos un enunciado del teorema de la categoría de Baire (ver [6]): si un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto, es unión de una familia numerable de cerrados, alguno de los cerrados contiene un abierto.

En consecuencia alguno de los $\pi \circ \psi \circ \alpha \circ \varphi_i^{-1}(C)$ contiene un abierto de \mathbb{R}^b .

Por otra parte, la aplicación $\pi \circ \psi \circ \alpha \circ \varphi_i^{-1}$, definida en $\varphi_i(U_i)$, admite una extensión diferenciable al abierto $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^{b-a}$ de \mathbb{R}^b : su composición con la proyección de \mathbb{R}^b sobre las a primeras componentes. La imagen de C por la primera de estas aplicaciones, es la de $C \times \{0\}$ por la segunda. Pero la imagen de un conjunto de medida nula por una aplicación diferenciable de \mathbb{R}^b en \mathbb{R}^b , es de medida nula, luego no puede contener ningún abierto. Contradicción.

□

El siguiente teorema, es un recíproco de 5.1.21, cuya demostración utiliza el resultado anterior y, por tanto, depende de manera esencial del segundo axioma de numerabilidad.

Teorema 5.1.25 *Sea (L, f) una subvariedad inmersa, donde L tiene una base numerable de abiertos. Si el conjunto $f(L)$ es subvariedad propia, la aplicación f es regular.*

Demostración. Supongamos que $f(L)$ es subvariedad propia y designemos por i la inyección canónica de $f(L)$ en M . Como consecuencia de 5.1.12 sabemos que $(f(L), i)$ es subvariedad regular de M , de forma que la aplicación

f_0 de L sobre $f(L)$ inducida por f es C^∞ . Demostrar que f es homeomorfismo sobre su imagen dotada de la topología relativa es demostrar que f_0 es homeomorfismo. Vamos a ver que f_0 es difeomorfismo. Para ello, dado que es biyección, basta ver que es difeomorfismo local y esto será consecuencia del teorema de inversión local, si demostramos que la aplicación tangente en cada punto es un isomorfismo (ver 3.6.6 y 3.6.7).

Como consecuencia de 5.1.24, sabemos que $\dim(f(L)) \leq \dim(L)$, por lo que basta demostrar que f_0 es inmersión, pero esto es inmediato ya que, para todo $p \in L$ se tiene

$$T_p f = T_{f_0(p)} i \circ T_p f_0$$

y de aquí se deduce que el núcleo de $T_p f_0$ es $\{0\}$, por serlo el de $T_p f$.

□

Proposición 5.1.26 *Sea S una subvariedad propia cerrada de una variedad Hausdorff con base numerable. Toda función real sobre S , C^∞ para su estructura de subvariedad, admite una extensión C^∞ a la variedad ambiente.*

Demostración. Designemos por M la variedad ambiente, por n su dimensión y por d la dimensión de S . Sea $f \in C^\infty(S)$. Para cada $p \in S$ consideramos una carta de la variedad ambiente, de subvariedad para S , (U_p, φ_p) . La función $f_p \equiv f \circ \varphi_p^{-1} \circ \rho \circ \varphi_p$, donde ρ es la aplicación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n dada por $\rho(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^1, x^2, \dots, x^d, 0, \dots, 0)$, es una extensión de $f|_{U_p \cap S}$ a U_p , que es diferenciable para las estructuras diferenciables consideradas por coincidir con $f \circ (\pi \circ \varphi_p|_{U_p \cap S})^{-1} \circ \pi \circ \varphi_p$, donde π es la aplicación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^d dada por $\pi(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^1, x^2, \dots, x^d)$.

Los U_p y $M - S$ componen un recubrimiento abierto, R , de M . Consideramos una partición numerable de la unidad subordinada a R , y designamos por $\{g_i : i \in \mathbb{N}\}$ la familia formada por los elementos de la partición cuyo soporte no está en $M - S$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, se considera un $p_i \in S$ tal que el soporte de g_i esté en U_{p_i} , y se define

$$f_i = \begin{cases} f_{p_i} g_i & \text{en } U_{p_i} \\ 0 & \text{fuera de } U_{p_i}. \end{cases}$$

La función $\sum_i f_i$ es una extensión C^∞ de f .

□

Definición 5.1.27 *Sean M y N variedades diferenciables, $f \in C^\infty(M, N)$ y $p \in M$. Se dice que f es **submersión** en p si $T_p f$ es suprayectiva.*

Obsérvese que si f es submersión en p , $\dim N \leq \dim M$.

Lema 5.1.28 *Sea $p \in M$, (U, φ) carta de M en p y (V, ψ) carta de N en $f(p)$. La aplicación f es submersión en p sii la derivada en $\varphi(p)$ de la expresión local de f en esas cartas es suprayectiva.*

Demostración. La jacobiana de la expresión local de f en esas cartas en $\varphi(p)$ es a la vez la matriz de $T_p f$ y la de la derivada en bases apropiadas, luego cada una de estas aplicaciones es suprayectiva sii la otra lo es.

□

En lo sucesivo, M y N son variedades diferenciables, de dimensiones respectivas de m y n , y $f \in C^\infty(M, N)$.

Teorema 5.1.29 (de submersión) *Si f es submersión en $p \in M$, existen cartas locales, (U, φ) de M en p y (V, ψ) de N en $f(p)$, tales que $f(U) \subset V$ y la expresión local de f en ellas es la restricción a $\varphi(U)$ de*

$$\pi : (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

La demostración es un ejercicio, aplicando el teorema de submersión de espacios euclídeos a la expresión local de f en dos cartas arbitrarias. En la demostración se ve que la carta (U, φ) , puede ser tomada como restricción de una carta arbitraria de M .

Teorema 5.1.30 *Sea $q \in N$ tal que f es submersión en todo punto de $f^{-1}(q)$. Entonces $f^{-1}(q)$ es subvariedad propia de dimensión $m - n$ de M .*

Demostración. Dado $p \in f^{-1}(q)$, tomemos cartas como aquellas cuya existencia asegura 5.1.29.

La situación se esquematiza en la figura 5.1. Se tiene

$$\varphi(f^{-1}(q) \cap U) = \pi^{-1}(\psi(q)) \cap \varphi(U) = (\{\psi(q)\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap \varphi(U).$$

Si designamos por τ la traslación en $-(\psi(q), 0, \dots, 0)$ y por Φ el difeomorfismo de \mathbb{R}^m dado por

$$\Phi(a^1, \dots, a^m) = (a^{n+1}, \dots, a^m, a^1, \dots, a^n),$$

el par $(U, \Phi \circ \tau \circ \varphi)$ es una carta de M de subvariedad para $f^{-1}(q)$.

□

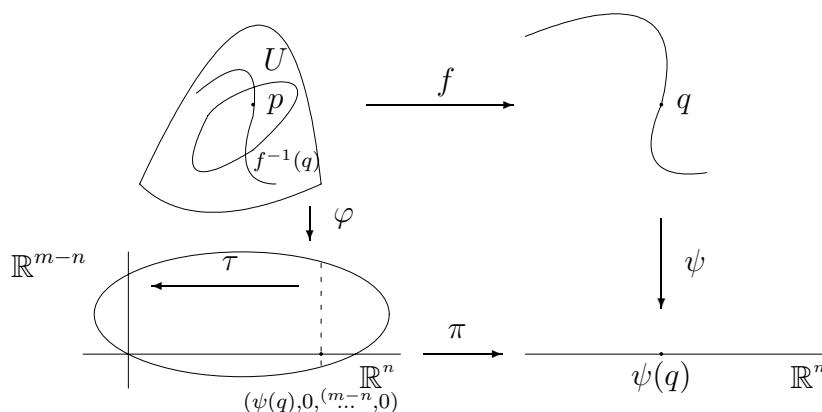


Figura 5.1: Antiimagen de un punto por una submersión.

Corolario 5.1.31 Sean $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ tales que el subconjunto, S , de M dado por las ecuaciones $f_1 = a^1, \dots, f_n = a^n$, donde $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}$, no es vacío y en cada uno de sus puntos, las diferenciales de las funciones dadas son linealmente independientes. Entonces S es subvariedad propia de dimensión $m - n$ de M .

Demostración. La aplicación de M en \mathbb{R}^n dada por $f = (f_1, \dots, f_n)$, cumple $f^{-1}(a^1, \dots, a^n) = S$. Vamos a ver que f es submersión en cada punto de S , lo que acabará la demostración.

Sea $p \in S$ y $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ una carta de M en p . La jacobiana de la expresión local de f en esa carta y la canónica de \mathbb{R}^n , tiene por filas las matrices de las $(df_i)_p$ en la base $\{(dx_1)_p, \dots, (dx_m)_p\}$, que, por hipótesis, son linealmente independientes. Esta jacobiana es pues de rango máximo, de forma que la derivada es suprayectiva.

□

5.1.1. Espacio tangente a una subvariedad.

Supongamos que (L, f) es una subvariedad inmersa de dimensión d de una variedad diferenciable, M , de dimensión n .

Por el teorema de inmersión, para cada $p \in L$ existen cartas locales, $(U, \varphi = (y^1, \dots, y^d))$ de L en p y $(V, \psi = (x^1, \dots, x^n))$ de M en $f(p)$, tales que $f(U) \subset V$ y la expresión local de f en ellas es la restricción a $\varphi(U)$ de $j(d, n)$.

Entonces, vista la forma de la jacobiana de $j(d, n)$ se tiene

$$T_p f \cdot \sum_{i=1}^d v^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p = \sum_{i=1}^d v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{f(p)}.$$

En particular $T_p f(T_p L)$ es el subespacio de $T_{f(p)} M$ generado por los $(\partial/\partial x^i)_{f(p)}$, $i = 1, \dots, d$.

Proposición 5.1.32 *Sea $X \in \mathcal{D}(M)$ tal que $X(f(z)) \in T_z f(T_z L)$ para todo $z \in L$. Entonces existe un único $Y \in \mathcal{D}(L)$ que se proyecta en X .*

Demostración. Para todo $z \in L$, $T_z f$ es inyectiva, luego existe un único vector, Y_z , tal que $T_z f \cdot Y_z = X_{f(z)}$. Si demostramos que $Y : z \in L \rightarrow Y_z$ es un campo de vectores diferenciable de L , habremos acabado.

Dado $z \in L$, consideramos cartas locales, $(U, \varphi = (y^1, \dots, y^d))$ de L en z y $(V, \psi = (x^1, \dots, x^n))$ de M en $f(z)$, tales que $f(U) \subset V$ y la expresión local de f en ellas es la restricción a $\varphi(U)$ de $j(d, n)$. Se tiene

$$x^i \circ f = r^i \circ \psi \circ f = r^i \circ j(d, n) \circ \varphi = r^i \circ \varphi = y^i,$$

para todo $i = 1, \dots, d$, de forma que, si $z' \in U$,

$$\begin{aligned} (Y \cdot y^i)(z') &= Y_{z'}(y^i) = Y_{z'}(x^i \circ f) = (T_{z'} f \cdot Y_{z'})(x^i) = \\ &= X_{f(z')}(x^i) = (X \cdot x^i)(f(z')) = (X \cdot x^i) \circ f(z'), \end{aligned}$$

luego $Y \cdot y^i = (X \cdot x^i) \circ f$, lo que demuestra que $Y \cdot y^i$ es C^∞ .

□

Sea S una subvariedad propia de dimensión d , y designemos por i_S la inyección canónica de S en M . Dado $p \in S$ supongamos que $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta de M en p de subvariedad para S . Entonces

$$(U \cap S, (x^1|_{U \cap S}, \dots, x^d|_{U \cap S}))$$

es una carta de S en p para su estructura de subvariedad y la expresión local de i_S en estas cartas es $j(d, n)$, de forma que tenemos

$$T_p i_S \cdot \sum_{i=1}^d v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i|_{U \cap S}} \right)_p = \sum_{i=1}^d v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p,$$

y $T_p i_S(T_p S)$ es el subespacio de $T_p M$ generado por los $(\partial/\partial x^i)_p$, $i = 1, \dots, d$.

El siguiente resultado debe ser comparado con 3.5.8.

Proposición 5.1.33 Sea S una subvariedad propia dada por ecuaciones $f_1 = a^1, \dots, f_d = a^d$, donde las f_i son funciones C^∞ , tales que en cada uno de los puntos de S , sus diferenciales son linealmente independientes y las a_i son números reales. Entonces, para cada $p \in S$,

$$T_p i_S(T_p S) = \{v \in T_p M : v(f_i) = 0, i = 1, \dots, d.\}$$

Demostración. Dado $u \in T_p S$ se tiene

$$(T_p i_S \cdot u)(f_i) = u(f_i \circ i_S) = u(a^i) = 0,$$

luego

$$T_p i_S(T_p S) \subset \{v \in T_p M : v(f_i) = 0, i = 1, \dots, d.\}.$$

Pero el primer miembro tiene dimensión $n - d$ por ser i_S inmersión y el segundo tiene la misma, por ser el subespacio de $T_p M$ aniquilado por $\{(df_1)_p, \dots, (df_d)_p\}$, luego los subespacios coinciden.

□

5.2. Sistemas diferenciales.

Mientras no se diga nada en contra, supondremos que todas las variedades consideradas en esta sección y siguientes, son separadas Hausdorff y tienen base numerable.

Dada una variedad diferenciable, M , se llama **sistema diferencial** a toda aplicación, \mathcal{D} , que a cada punto, p , de M hace corresponder un subespacio, $\mathcal{D}(p)$, de $T_p M$. Si todos los subespacios $\mathcal{D}(p)$ tienen la misma dimensión c , se dice que \mathcal{D} es un **sistema diferencial c -dimensional**.

Los sistemas diferenciales se llaman a veces **distribuciones**.

Sea \mathcal{D} un sistema diferencial c -dimensional. Se dice que \mathcal{D} es diferenciable si, para todo $p \in M$, existe un entorno, U , de p y c campos de vectores, X^1, \dots, X^c , diferenciables en U tales que, para todo $y \in U$, el conjunto $\{X_y^1, \dots, X_y^c\}$ es un sistema de generadores de $\mathcal{D}(y)$. En estas condiciones se dice que $\{X^1, \dots, X^c\}$ **genera** \mathcal{D} en U .

Un campo de vectores diferenciable en M , X , se dice que **pertenece** a \mathcal{D} si $X_p \in \mathcal{D}(p)$, para todo $p \in M$. En estas condiciones escribiremos, con evidente abuso del lenguaje, $X \in \mathcal{D}$.

Se dice que \mathcal{D} es **involutivo** si, para todo par de campos diferenciables pertenecientes a \mathcal{D} , su corchete de Lie también pertenece a \mathcal{D} .

Una subvariedad inmersa, (L, f) , se dice **variedad integral** de \mathcal{D} si, para todo $z \in L$, $T_z f(T_z L) = \mathcal{D}(f(z))$. Si (L, f) es variedad integral de \mathcal{D} , se dice

que **pasa por** p , si $p \in f(L)$. Si además L es conexa, se dice que (L, f) es **variedad integral conexa**.

Si (L, f) es variedad integral de \mathcal{D} , y (L', f') es subvariedad inmersa equivalente a (L, f) , entonces (L', f') es también variedad integral de \mathcal{D} .

Se dice que \mathcal{D} es **integrable**, si por cada punto pasa una variedad integral.

Proposición 5.2.1 *Todo sistema diferencial integrable, es involutivo.*

Demostración. Sea \mathcal{D} integrable, $X, Y \in \mathcal{D}$ y $p \in M$. Vamos a demostrar que $[X, Y]_p \in \mathcal{D}(p)$.

Si (L, f) es una variedad integral que pasa por p , designamos por x al punto de L cuya imagen por f es p .

Como consecuencia de 5.1.32, existen dos campos, \bar{X} e \bar{Y} , diferenciables sobre L que se proyectan por f en X e Y respectivamente.

Entonces $[\bar{X}, \bar{Y}]$ se proyecta en $[X, Y]$ y tenemos

$$[X, Y]_p = T_x f \cdot [\bar{X}, \bar{Y}]_x \in \mathcal{D}(f(x)) = \mathcal{D}(p).$$

□

Proposición 5.2.2 *Sea C un conjunto de campos de vectores diferenciables tal que*

a) *Para todo $p \in M$, el subespacio de $T_p M$ generado por los valores en p de los elementos de C , C_p , tiene la misma dimensión, c .*

b) *Si $X, Y \in C$, $[X, Y]$ puede ser expresado como combinación lineal de un número finito de elementos de C con coeficientes en $C^\infty(M)$.*

Entonces la aplicación que a cada $p \in M$ hace corresponder C_p es un sistema diferencial involutivo, diferenciable, c -dimensional.

Demostración. Dado $p \in M$, existen Z^1, \dots, Z^c , en C tales que $\{Z_p^1, \dots, Z_p^c\}$ es linealmente independiente.

Sea $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta local de M en p . Entonces las filas de la matriz de funciones

$$H = \begin{pmatrix} Z^1 \cdot x^1 & \dots & Z^1 \cdot x^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z^c \cdot x^1 & \dots & Z^c \cdot x^n \end{pmatrix}$$

son las componentes de los campos Z^i en la base asociada a la carta, de forma que el valor de esta matriz en p tiene rango c . En consecuencia, existen i_1, \dots, i_c , tales que el menor de $H(p)$ formado por las columnas i_1, \dots, i_c , tiene determinante no nulo.

Sea

$$H' = \begin{pmatrix} Z^1 \cdot x^{i_1}, & \dots & Z^1 \cdot x^{i_c} \\ \vdots & & \vdots \\ Z^1 \cdot x^{i_1} & \dots & Z^c \cdot x^{i_c} \end{pmatrix}.$$

La función $DetH'$ es continua en U y su valor en p es no nulo, luego existe un entorno, A , de p en U en que esa función no se anula. Pero eso significa que, para todo $q \in A$, los valores de los Z^i en q son linealmente independientes y esto, a su vez, implica que son un sistema de generadores de C_q , por ser este de dimensión c . En particular, $\{Z^1|_A, \dots, Z^c|_A\}$ genera el sistema diferencial en A , lo que demuestra que éste es diferenciable.

Antes de ver que es involutivo, obsérvese que si X es un campo de vectores que pertenece al sistema, y tomamos p y A como antes, existen funciones diferenciables en A , F_1, \dots, F_c , tales que

$$X|_A = \sum_{i=1}^c F_i(Z^i|_A). \quad (5.1)$$

En efecto, si $q \in A$, $X_q \in C_q$, luego existen unos únicos números, $F^1(q), \dots, F^c(q)$, tales que

$$X_q = \sum_{i=1}^c F_i(q)Z_q^i.$$

Entonces, las funciones $F_i : q \in A \longrightarrow F_i(q) \in \mathbb{R}$, cumplen 5.1. Sólo falta demostrar que estas funciones son diferenciables. Se tiene

$$X \cdot x^k(q) = X_q(x^k) = \sum_{i=1}^c F_i(q)(Z_q^i(x^k)) = \sum_{i=1}^c F_i(q)(Z^i \cdot x^k(q)),$$

para todo $k = 1, \dots, n$. Esto es un sistema de n ecuaciones lineales para los números $F_i(q)$, que tiene solución única. El subsistema dado por las ecuaciones i_1, \dots, i_c , es de Cramer, por lo que cada solución $F_i(q)$, viene dada por un cociente de una combinación lineal de productos de elementos de $\{X \cdot x^k(q), Z^i \cdot x^k(q)\}$ por $DetH'(q)$. Vemos así que F_i es cociente de una función diferenciable, por otra función diferenciable, que no se anula en ningún punto, y es por tanto diferenciable.

Entonces, si X e Y pertenecen al sistema diferencial, para cada $p \in M$ consideramos A como antes, y sabemos que existen $F_1, \dots, F_c, G_1, \dots, G_c \in C^\infty(A)$, tales que

$$X|_A = \sum_{i=1}^c F_i(Z^i|_A), \quad Y|_A = \sum_{j=1}^c G_j(Z^j|_A).$$

Designando a $Z^i|_A$ simplemente por Z^i , se tiene para toda $f \in C^\infty(A)$

$$\begin{aligned} [X, Y]|_A \cdot f &= [X|_A, Y|_A] \cdot f = \sum_{i=1, j=1}^{c, c} [F_i Z^i, G_j Z^j] \cdot f = \\ &= \sum_{i=1, j=1}^{c, c} (F_i((Z^i \cdot G_j)(Z^j \cdot f) + G_j(Z^i \cdot (Z^j \cdot f))) - \\ &\quad - G_j((Z^j \cdot F_i)(Z^i \cdot f) + F_i(Z^j \cdot (Z^i \cdot f)))) = \\ &= \sum_{i=1, j=1}^{c, c} (F_i(Z^i \cdot G_j)Z^j \cdot f + F_i G_j[Z^i, Z^j] \cdot f - G_j(Z^j \cdot F_i)Z^i \cdot f), \end{aligned}$$

luego

$$[X, Y]|_A = \sum_{i=1, j=1}^{c, c} (F_i G_j[Z^i, Z^j] + F_i(Z^i \cdot G_j)Z^j - G_j((Z^j \cdot F_i)Z^i)).$$

Pero $[Z^i, Z^j]$ puede, por hipótesis, ser expresado como combinación lineal con coeficientes en $C^\infty(M)$ de un número finito de elementos de C , luego lo mismo ocurre con $[X, Y]|_A$, lo que demuestra que su valor en p pertenece a C_p .

□

El sistema diferencial considerado en el enunciado anterior se dice **generado por C** .

5.3. Teorema de Frobenius local.

En esta sección vamos a demostrar el siguiente teorema

Teorema de Frobenius local. *Un sistema diferencial diferenciable, c -dimensional es integrable sii es involutivo.*

El que todo sistema integrable es involutivo, ya fué demostrado en 5.2.1. Falta demostrar el recíproco parcial contenido en el enunciado anterior.

Sea M una variedad diferenciable. Si $p \in M$ y $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ es una carta local de M en p , basta componer φ con la traslación de vector $-\varphi(p)$ para obtener una carta tal que la imagen de p es el origen de coordenadas. Tales cartas se llaman **centradas en p** . Reduciendo U , se puede conseguir que $\varphi(U)$ sea un hipercubo, y entonces se dice que son **cúbicas**.

Sea S el subconjunto de M dado por las ecuaciones $x^{c+1} = a^{c+1}, \dots, x^n = a^n$, donde las a^i son números reales tales que S es no vacío. Como consecuencia de 5.1.31, S es subvariedad propia de dimensión c , de U , y por tanto de M . Tales subvariedades se llamarán **lonchas** de la carta.

Vemos además que, por 5.1.33,

$$T_p i_S(T_p S) = \{v \in T_p M : v(x^{c+1}) = 0, \dots, v(x^n) = 0\}$$

lo que indica que este subespacio es el generado por $\{(\partial/\partial x^i)_p : i = 1, \dots, c\}$.

En consecuencia, las lonchas son variedades integrales del sistema diferencial generado en U por los campos $\{\partial/\partial x^i : i = 1, \dots, c\}$. Para cada punto de U hay una loncha que pasa por él.

El siguiente resultado, completa la demostración del teorema de Frobenius local y da alguna información suplementaria.

Teorema 5.3.1 *Sea \mathcal{D} un sistema diferencial diferenciable, c -dimensional involutivo sobre M y $p \in M$. Existe un sistema de coordenadas cúbico, centrado en p , cuyas lonchas son variedades integrales de \mathcal{D} .*

Además, si (N, f) es una variedad integral conexa de \mathcal{D} tal que $f(N) \subset U$, es equivalente a una subvariedad abierta de una de las lonchas.

Para demostrarlo, necesitamos el siguiente lema.

Lema 5.3.2 *En las condiciones del teorema anterior, existe un entorno, V , de p y campos de vectores diferenciables en V , X_1, \dots, X_c , que generan \mathcal{D} en V y cumplen $[X_i, X_j] = 0$ para todos $i, j = 1, \dots, c$.*

Demostración. Sea W un entorno de p en el que existen campos de vectores diferenciables, Y_1, \dots, Y_c , que generan \mathcal{D} . Sea $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta de M en p , con $U \subset W$.

Si las expresiones locales de los Y_i son

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + Y_1^c \frac{\partial}{\partial x^c} + Y_1^{c+1} \frac{\partial}{\partial x^{c+1}} + \dots + Y_1^n \frac{\partial}{\partial x^n} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ Y_c &= Y_c^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + Y_c^c \frac{\partial}{\partial x^c} + Y_c^{c+1} \frac{\partial}{\partial x^{c+1}} + \dots + Y_c^n \frac{\partial}{\partial x^n} \end{aligned} \quad (5.2)$$

el hecho de ser linealmente independientes los valores de los Y_i en p , implica que las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} Y_1^1(p), & \dots, & Y_1^c(p), & Y_1^{c+1}(p), & \dots, & Y_1^n(p) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_c^1(p), & \dots, & Y_c^c(p), & Y_c^{c+1}(p), & \dots, & Y_c^n(p) \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes. Supongamos que las primeras c columnas forman una matriz con determinante no nulo.

Entonces existe un entorno de p , V , en el que los valores de la matriz

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1^1, & \dots, & Y_1^c \\ \vdots & & \vdots \\ Y_c^1, & \dots, & Y_c^c \end{pmatrix}$$

son no singulares. En lo que queda de demostración nos restringimos a V .

En 5.2 realizamos las siguientes operaciones: multiplicamos ordenadamente las ecuaciones por los elementos de la primera fila de Y^{-1} y sumamos, luego hacemos lo mismo con la segunda fila de esa matriz, y así con todas. Obtenemos

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} + f_1^{c+1} \frac{\partial}{\partial x^{c+1}} + \dots + f_1^n \frac{\partial}{\partial x^n} \\ &\vdots \\ X_c &= \frac{\partial}{\partial x^c} + f_c^{c+1} \frac{\partial}{\partial x^{c+1}} + \dots + f_c^n \frac{\partial}{\partial x^n} \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde los X_i son combinaciones lineales, con coeficientes funciones diferenciables, de los Y_k y las f_i^j son también funciones diferenciables.

Es inmediato ver que los valores de los X_i en cada punto de V son linealmente independientes, de donde se deduce que los X_i generan \mathcal{D} .

Además se tiene

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{n-c} f_i^{c+k} \frac{\partial}{\partial x^{c+k}}, \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{h=1}^{n-c} f_j^{c+h} \frac{\partial}{\partial x^{c+h}} \right] = \\ &= \sum_{h=1}^{n-c} \frac{\partial}{\partial x^i} (f_j^{c+h}) \frac{\partial}{\partial x^{c+h}} - \sum_{k=1}^{n-c} \frac{\partial}{\partial x^j} (f_i^{c+k}) \frac{\partial}{\partial x^{c+k}} + \\ &+ \left[\sum_{k=1}^{n-c} f_i^{c+k} \frac{\partial}{\partial x^{c+k}}, \sum_{h=1}^{n-c} f_j^{c+h} \frac{\partial}{\partial x^{c+h}} \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

de donde se deduce que $[X_i, X_j]$ es combinación lineal de

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{c+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$$

con coeficientes funciones.

Por otra parte, han de existir funciones F_{ij}^k tales que

$$[X_i, X_j] = \sum_{s=1}^c F_{ij}^s X_s = \sum_{s=1}^c F_{ij}^s \frac{\partial}{\partial x^s} + \sum_{s=1}^c F_{ij}^s \sum_{k=1}^{n-c} f_s^{c+k} \frac{\partial}{\partial x^{c+k}}. \quad (5.5)$$

y, como esto ha de ser combinación de

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{c+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$$

vemos que las F_{ij}^k , han de ser 0 y, en consecuencia, $[X_i, X_j] = 0$.

□

Demostración de 5.3.1. Como consecuencia del lema precedente y de 4.4.16 existe una carta local de M en p , $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, tal que \mathcal{D} es generado en U por los campos de vectores

$$\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, c.$$

Componiendo eventualmente φ con una traslación, se consigue que la carta sea centrada en p . Si el nuevo sistema de coordenadas es (x^1, \dots, x^n) , se tiene en U

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x'^i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

por lo que \mathcal{D} es generado en U por

$$\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, c.$$

Reduciendo U se consigue que la carta sea cúbica. Las lonchas de esta carta son variedades integrales de \mathcal{D} .

Sea (N, f) una variedad integral conexa de \mathcal{D} tal que $f(N) \subset U$.

Para cada $i = c + 1, \dots, n$ se tiene $d(x^i \circ f) = 0$. En efecto, para todos $q \in N$ y $v \in T_q N$ podemos escribir

$$(d(x^i \circ f))_p \cdot v = v(x^i \circ f) = T_p f \cdot v(x^i) = 0$$

por ser $T_p f \cdot v$ combinación lineal de los

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{f(q)}, \quad j = 1, \dots, c.$$

Como consecuencia de 3.6.3, estas funciones han de ser globalmente constantes.

Vemos así que la imagen de f está contenida en la loncha $x^i = x^i \circ f(q)$, $i = c + 1, \dots, n$, donde q es un punto arbitrario de N . Designemos por S esa loncha dotada de su estructura de subvariedad propia, por i su inyección canónica en M y por $f_0 : N \rightarrow S$ la aplicación tal que $f = i \circ f_0$.

Por ser i regular, f_0 es C^∞ (ver 5.1.16). Además es inmersión porque el núcleo de su aplicación tangente en cada punto, está contenido en el de la tangente a f , que se reduce a 0. Pero tanto S como N son de dimensión c , de donde se deduce que f_0 es difeomorfismo local, que, además es inyectivo, luego es un difeomorfismo sobre su imagen, que ha de ser abierta. Este difeomorfismo establece la equivalencia de la subvariedad (N, f) con una subvariedad abierta de S .

□

Las cartas de M relacionadas con \mathcal{D} como en el enunciado de 5.3.1 se llaman **cartas adaptadas**.

Lema 5.3.3 *Sea \mathcal{D} un sistema diferencial de M , diferenciable, involutivo, c -dimensional, (N, f) una de sus variedades integrales y $q \in N$. Existe un entorno abierto, E_q , de q en N y una carta adaptada centrada en $f(q)$, $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, tal que $f(E_q)$ es la loncha $x^{c+1} = 0, \dots, x^n = 0$.*

Demostración. Sea $(U', \varphi' = (x'^1, \dots, x'^n))$ una carta adaptada centrada en $f(q)$, y E la componente conexa de q en el abierto $f^{-1}(U')$. Entonces $(E, f|_E)$ es variedad integral con imagen en U' , luego $f(E)$ es un abierto en la topología relativa de la loncha dada por las ecuaciones $x'^{c+1} = 0, \dots, x'^n = 0$, y $f|_E$, pensada como aplicación de la subvariedad abierta E de N , sobre la subvariedad abierta $f(E)$ de la loncha, es un difeomorfismo. Supongamos que $\varphi'(U') = (-a, a)^n$.

El conjunto $\varphi'(f(E))$ es un abierto de $(-a, a)^c \times \{(0, \overset{(n-c)}{\dots}, 0)\}$, para la topología relativa. Tomamos un número real positivo, a' , tal que $((-a', a')^c \times \{(0, \overset{(n-c)}{\dots}, 0)\}) \subset \varphi'(f(E))$, y definimos

$$\begin{aligned} E_q &= f^{-1} \circ \varphi'^{-1} \left((-a', a')^c \times \{(0, \overset{(n-c)}{\dots}, 0)\} \right) \\ U &= \varphi'^{-1}((-a', a')^n) \\ \varphi &= \varphi'|_U. \end{aligned}$$

Es inmediato ver que se cumplen las condiciones requeridas.

□

Observación 5.3.4 En las condiciones de 5.3.3, si además A es un entorno abierto de q , E_q puede ser elegido dentro de A . En efecto, basta aplicar el lema a la variedad integral $(A, f|_A)$.

Proposición 5.3.5 *Supongamos que \mathcal{D} es un sistema diferencial de M , diferenciable, involutivo, c -dimensional, (N, f) una de sus variedades integrales, P una variedad diferenciable y $\psi \in C^\infty(P, M)$ tal que $\psi(P) \subset f(N)$, entonces la única aplicación $\psi_0 : P \rightarrow N$ que cumple $\psi = f \circ \psi_0$, es C^∞ .*

Demostración. Por 5.1.16, basta demostrar que ψ_0 es continua. Sea A un abierto de N y $q \in \psi_0^{-1}(A)$, vamos a demostrar que existe un entorno de q cuya imagen por ψ_0 está en A , lo que acabará la demostración.

Sea E_q un entorno abierto de $\psi_0(q)$ en A y $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta adaptada centrada en $\psi(q)$, tales que $f(E_q)$ coincide con la loncha $x^{c+1} = 0, \dots, x^n = 0$. Entonces $\psi^{-1}(U)$ es un abierto de P , que contiene a q . Designemos por C la componente conexa de q en $\psi^{-1}(U)$. C es un abierto de P y la imagen $\psi(C)$ está en $U \cap f(N)$. Por otra parte $U \cap f(N)$ no puede tocar más que un conjunto numerable de lonchas de U . En efecto, $f^{-1}(U)$ es un abierto de N que tiene un conjunto numerable de componentes conexas, y cada componente de esas va a parar por f a una loncha de U .

Afirmo que $\psi(C)$ está contenido en la loncha $x^{c+1} = 0, \dots, x^n = 0$. En efecto, para cada q' en C , consideramos una curva continua, $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$, tal que $\gamma(0) = q$ y $\gamma(1) = q'$. La curva $\psi \circ \gamma$ toma valores en $U \cap f(N)$. Para cada $i = c + 1, \dots, n$, la función $x^i \circ \psi \circ \gamma$ es continua, luego toma todos los valores entre $x^i \circ \psi \circ \gamma(0) = 0$ y $x^i \circ \psi \circ \gamma(1)$. Si este último número no fuese 0, la función tomaría un infinito no numerable de valores, lo que implicaría que $\psi \circ \gamma$ pasaría por un infinito no numerable de lonchas, lo que es absurdo, estando su imagen contenida en $U \cap f(N)$. En consecuencia $x^i(\psi(q')) = x^i \circ \psi \circ \gamma(1) = 0$, para todo $i = c + 1, \dots, n$.

Pero entonces $\psi_0(C) \subset E_q \subset A$, lo que acaba la demostración.

□

5.4. Teorema de Frobenius global.

Si \mathcal{D} es un sistema diferencial, una de sus variedades integrales conexas, (N, f) , se dice **maximal conexa** si $f(N)$ no es subconjunto propio de la imagen de ninguna otra variedad integral conexa de \mathcal{D} .

Cuando (N, f) y (N', f') son variedades integrales tales que la intersección de $f(N)$ con $f'(N')$ no es vacía y la primera es maximal, no es obvio en este momento que $f'(N') \subset f(N)$, aunque si lo es que no existe una variedad integral cuya imagen sea $f'(N') \cup f(N)$.

Teorema 5.4.1 (de Frobenius global). Sea \mathcal{D} un sistema diferencial, diferenciable, c -dimensional, involutivo de una variedad M . Para todo $p \in M$

existe una única (salvo equivalencia de subvariedades) variedad integral maximal conexa que pase por p . Toda variedad integral conexa que pase por p , es equivalente a una subvariedad abierta de la maximal.

Demostración. Para cada $q \in M$ tomamos una carta adaptada en q , obteniendo así un atlas. Por tener M base numerable, podemos elegir entre las cartas anteriores para quedarnos con un atlas numerable, $\{(U_a, \varphi_a = (x_a^1, \dots, x_a^n)) : a \in A\}$.

Designaremos por $(-\delta_a, \delta_a)^n$ a $\varphi_a(U_a)$, y por $S_a^{(r^{c+1}, \dots, r^n)}$ la loncha dada por las ecuaciones $x_a^{c+1} = r^{c+1}, \dots, x_a^n = r^n$.

Dado $p \in M$, se considera $a_0 \in A$ tal que $p \in U_{a_0}$ y se designa por $S_{a_0}^{(r_0^{c+1}, \dots, r_0^n)}$, la loncha de p .

Una loncha, $S_{a_i}^{(r_i^{c+1}, \dots, r_i^n)}$, se dice “unida a p ” si existe una sucesión a_0, a_1, \dots, a_i y lonchas

$$S_{a_0}^{(r_0^{c+1}, \dots, r_0^n)}, S_{a_1}^{(r_1^{c+1}, \dots, r_1^n)}, \dots, S_{a_i}^{(r_i^{c+1}, \dots, r_i^n)},$$

tales que

$$S_{a_k}^{(r_k^{c+1}, \dots, r_k^n)} \cap S_{a_{k+1}}^{(r_{k+1}^{c+1}, \dots, r_{k+1}^n)} \neq \emptyset \quad k = 0, \dots, i-1.$$

Una sucesión de lonchas como las anteriores, será denominada “cadena” de lonchas.

Una loncha, S , de una carta adaptada sólo corta un conjunto numerable de lonchas de otra carta adaptada, (U, φ) . En efecto, $S \cap U$ es un abierto de S y cada una de sus componentes conexas, de las que sólo hay una cantidad numerable, es variedad integral contenida en U , que, como consecuencia de 5.3.1, es equivalente a una subvariedad abierta de una loncha de (U, φ) , por lo que debe estar contenida en ella. La intersección se produce con esta familia numerable de lonchas. En consecuencia, sólo un conjunto numerable de lonchas están unidas a p .

Obsérvese que, de paso, hemos demostrado que $S \cap U$ es unión de abiertos de lonchas de U para la topología relativa. En particular la intersección de S con cualquier loncha de U , es una unión de abiertos de esta última y por tanto, abierto. Deducimos que la intersección de dos lonchas de dos cartas adaptadas es abierta en ambas.

Sea N_p la unión de todas las lonchas unidas a p . Para cada loncha unida a p , $S_{a_i}^{(r_i^{c+1}, \dots, r_i^n)}$, consideramos el par

$$\left(S_{a_i}^{(r_i^{c+1}, \dots, r_i^n)}, \pi \circ f_i \right),$$

donde f_i es la restricción de φ_{a_i} a $S_{a_i}^{(r_i^{c+1}, \dots, r_i^n)}$, y π la proyección de \mathbb{R}^n sobre las c primeras componentes.

Vamos a demostrar que los pares así obtenidos forman un atlas C^∞ de N_p . Si q pertenece al último elemento de una cadena, se dice que ésta une p con q .

Supongamos que

$$S_{a_k}^{(r_k^{c+1}, \dots, r_k^n)} \cap S_{a_i}^{(r_i^{c+1}, \dots, r_i^n)} \neq \emptyset.$$

Esa intersección es abierta en cada una de esas lonchas para la topología relativa, de donde se deduce que su imagen por f_i , que es su imagen por φ_{a_i} , es un abierto de $\mathbb{R}^c \times \{(r_i^{c+1}, \dots, r_i^n)\}$ para la topología relativa y entonces, que su imagen por $\pi \circ f_i$ es un abierto de \mathbb{R}^c . Lo mismo ocurre con su imagen por $\pi \circ f_k$.

Además se tiene

$$(\pi \circ f_k) \circ (\pi \circ f_i)^{-1}(b^1, \dots, b^c) = \pi \circ \varphi_{a_k} \circ \varphi_{a_i}^{-1}(b^1, \dots, b^c, r_i^{c+1}, \dots, r_i^n),$$

de donde se deduce que los cambios de coordenadas son C^∞ .

Consideramos a N_p dotado de la estructura diferenciable que contiene a ese atlas.

Si tomamos una base numerable para la topología relativa de cada $S_{a_i}^{(r_i^{c+1}, \dots, r_i^n)}$, la unión de estas bases es una base numerable de N_p . Estos abiertos pueden no serlo para la topología relativa de N_p .

Veamos que para esta topología, N_p es separada Hausdorff. Dados dos puntos diferentes, q y q' , de N_p , se toman entornos abiertos, U y U' , de q y q' respectivamente en M , que sean disjuntos. Existen cartas adaptadas centradas en q y q' , cuyos dominios están contenidos en U y U' respectivamente. Las lonchas de q y q' en esas cartas están unidas a p , luego contenidas en N_p . Por construcción de la topología de N_p , esas lonchas son entornos abiertos disjuntos de q y q' en N_p .

Además N_p es conexa. En efecto, usando el hecho de que la unión de dos subespacios conexos con un punto común es conexa, y que cada $S_{a_i}^{(r_i^{c+1}, \dots, r_i^n)}$ es conexo, se demuestra por inducción que la unión de los elementos de una cadena es conexa. Entonces, si $q \in N_p$ considerando una cadena que una p con q , vemos que q es equivalente a p para la relación de equivalencia que define las componentes conexas. Vemos así que solo hay una de estas.

Es variedad integral porque la restricción de la inyección canónica a cada abierto $S_{a_i}^{(r_i^{c+1}, \dots, r_i^n)}$ es la inyección canónica de éste, que es variedad integral.

Sea (N, f) otra variedad integral conexa que pasa por p . Queremos demostrar que $f(N) \subset N_p$. Dado $q \in N$ consideramos una curva continua, $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$, tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Vamos a demostrar que

la imagen de γ está contenida en N_p . Veremos en primer lugar que existen $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{s-1} < t_s = 1$ y $a_1, \dots, a_s \in A$ tales que $f \circ \gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{a_i}$, $i = 1, \dots, s$. En efecto, las componentes conexas de los $(f \circ \gamma)^{-1}(U_a)$, $a \in A$ componen un recubrimiento de $[0, 1]$ por intervalos abiertos o de las formas $[0, 1]$ ó $[0, d]$ ó $(e, 1]$. Por compacidad, existe un subrecubrimiento finito. Si $[0, 1]$ pertenece al recubrimiento, nos quedamos con él. Si no, podemos elegir un elemento del recubrimiento de la forma $[0, d]$, despues uno que contenga a d y seguimos eligiendo uno que contenga el supremo del anterior, hasta llegar a uno que contenga a 1. En las intersecciones de cada dos consecutivos vamos eligiendo los t_1, \dots, t_{s-1} . A continuación, observemos que cada $f \circ \gamma([t_{i-1}, t_i])$ está contenido en una loncha de U_{a_i} , ya que $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ está contenido en una componente conexa de $f^{-1}(U_{a_i})$, y esa componente conexa, con la restricción de f a ella es una variedad integral conexa, por lo que su imagen es subconjunto de una loncha. Existen pues lonchas S_1, \dots, S_s , que contienen los tramos $\gamma([t_0, t_1]), \dots, \gamma([t_{s-1}, t_s])$ respectivamente. La primera contiene a p y cada $S_i \cap S_{i+1}$, $i = 1, \dots, s-1$, contiene al menos a $f \circ \gamma(t_i)$, luego todas las S_i están unidas a p y, por tanto, contenidas en N_p . En particular la curva $f \circ \gamma$ tiene su imagen en N_p , de donde se deduce que $q \in N_p$. Esto muestra, entre otras cosas, que N_p es maximal.

Designemos por i la inyección canónica de N_p en M y por $f_0 : N \rightarrow N_p$ la aplicación que cumple $f = i \circ f_0$. Según 5.3.5 f_0 es C^∞ . Pero además f_0 es inmersión entre variedades de la misma dimensión, luego es difeomorfismo local. Como es inyectiva, es difeomorfismo y proporciona una equivalencia entre N y una subvariedad abierta de N_p .

Solo falta por demostrar la unicidad. Si (N, f) fuese otra variedad integral maximal conexa que pasase por p , $f(N)$ sería un abierto de N_p y por la maximalidad de (N, f) habría de ser $f(N) = N_p$, de forma que ambas variedades integrales serían equivalentes.

□

5.5. Ejercicios complementarios

Ejercicio 5.5.1 ¿ Es el subconjunto de \mathbb{R}^2

$$S = \left\{ \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

subvariedad inmersa?.

Ejercicio 5.5.2 Sea M una variedad diferenciable y S un subconjunto de M , que admite un recubrimiento por cartas de M tales que, para cada una de ellas, (U, φ) , $\varphi(U \cap S)$ es subvariedad propia de dimensión d de \mathbb{R}^m . Demostrar que S es subvariedad propia de dimensión d de M .

Ejercicio 5.5.3 Sea S una subvariedad propia de dimensión d de una variedad diferenciable M . Demostrar que para toda carta, (U, φ) , de M tal que $S \cap U \neq \emptyset$, el conjunto $\varphi(S \cap U)$ es subvariedad propia de dimensión d de \mathbb{R}^m .

Ejercicio 5.5.4 Dar los detalles de la demostración de 5.1.14.

Ejercicio 5.5.5 Dar los detalles de la demostración de 5.1.29.

Ejercicio 5.5.6 Demostrar que un sistema diferencial, diferenciable, 1-dimensional, es involutivo.

Ejercicio 5.5.7 Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\tau_M : TM \rightarrow M$ la proyección canónica. Se define un sistema diferencial, \mathcal{D} , en TM como aquel cuyo valor en $v \in TM$ es el núcleo de $T_v \tau_M$. Demostrar que \mathcal{D} es diferenciable, n -dimensional e involutivo.

Ejercicio 5.5.8 Sea \mathcal{D} un sistema diferencial en la variedad M y $f \in C^\infty(M)$ tal que $v(f) = 0$, si $v \in \mathcal{D}_p$ para algún p . Demostrar que, si (N, ψ) es variedad integral conexa de \mathcal{D} , $\psi(M)$ está contenido en un conjunto de la forma $f = cte$.

Ejercicio 5.5.9 Se considera un sistema diferencial, c -dimensional, \mathcal{D} , en una variedad diferenciable, M , de dimensión n . Sean f_1, \dots, f_{n-c} funciones C^∞ en M , cuyas diferenciales son linealmente independientes en cada punto, y tales que $v(f_1) = \dots = v(f_{n-c}) = 0$ si $v \in \mathcal{D}_p$ para algún p . Demostrar que las subvariedades $f_1 = cte, \dots, f_{n-c} = cte$, son variedades integrales de \mathcal{D} y que sus componentes conexas son variedades integrales maximales conexas.

Ejercicio 5.5.10 Se designa por (r^1, r^2, r^3, r^4) el sistema canónico de coordenadas de \mathbb{R}^4 , y por P la subvariedad abierta $r^2 > 0$. En P se consideran los campos de vectores:

$$\begin{aligned} X &= ((r^1)^2 + r^2) \frac{\partial}{\partial r^2} + (r^1)^2 \frac{\partial}{\partial r^4} \\ Y &= r^2 \frac{\partial}{\partial r^2} + (r^1)^2 \frac{\partial}{\partial r^4} \\ Z &= (1 + r^1) \frac{\partial}{\partial r^4} \end{aligned}$$

y se designa por Q el sistema diferencial generado por $\{X, Y, Z\}$.

¿Es Q un sistema diferencial diferenciable, involutivo, c -dimensional para algún c ? En caso afirmativo, determinar las variedades integrales maximales conexas de Q .

Ejercicio 5.5.11 Se consideran en $M = \mathbb{R}^3 - \{z = 0\}$ los campos de vectores

$$\begin{aligned} X &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \\ Y &= -\frac{x}{z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{z} \frac{\partial}{\partial y} + (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

a) Demostrar que el sistema diferencial generado por $\{X, Y\}$, es diferenciable, involutivo, 2-dimensional. Encontrar sus variedades integrales maximales conexas.

b) Sea P la subvariedad abierta complementaria en M del eje \overline{oz} y Q el sistema diferencial en P generado por X . Encontrar las variedades integrales maximales conexas de Q .

Ejercicio 5.5.12 En \mathbb{R}^3 se define

$$\begin{aligned} X &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \\ Y &= x \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

a) Encontrar el mayor abierto en el que el sistema diferencial generado por $\{X, Y\}$ es diferenciable, 2-dimensional e integrable.

b) Designamos por \mathcal{D} la restricción del sistema diferencial generado por $\{X, Y\}$ al abierto encontrado en a. Comprobar aplicando directamente la definición de variedad integral que

$$g : (u, v) \in (0, 1) \times (1, 2) \longrightarrow (u^2, 1, v^2),$$

es variedad integral de \mathcal{D} .

c) Encontrar las variedades integrales maximales conexas de \mathcal{D} .

Ejercicio 5.5.13 Encontrar un número finito de campos de vectores diferenciables en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, tales que el sistema diferencial generado por ellos, admita como variedades integrales las dadas por ecuaciones $x^2 + y^2 - z^2 = cte$.

Bibliografía

- [1] R Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of mechanics*, Second Edition, Addison-Wesley, 1978.
- [2] L. Auslander and R. E. Mackenzie, *Introduction to differentiable manifolds*, McGraw-Hill, 1963.
- [3] F. Brickell and R. S. Clark, *Differentiable manifolds. An introduction*, Van Nostrand, 1970.
- [4] J. Dieudonné, *Fundamentos de análisis moderno*, Reverté, 1966.
- [5] M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie différentielle*, Armand Colin, 1972.
- [6] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press Inc., 1978.
- [7] S. Lang, *Introduction to differentiable manifolds*, John Wiley & Sons, 1962.
- [8] Pham Mau Quan, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, 1969.
- [9] S.Kobayashi and K.Nomizu, *Foundations of differential geometry vol.1*, Interscience Publishers, 1963.
- [10] M. Spivak, *Cálculo en variedades*, Reverté, 1970.
- [11] ———, *A comprehensive introduction to differential geometry vol.1*, Publish or Perish, Inc., 1979.
- [12] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer-Verlag, 1983.