En los cuatro primeros problemas, conteste las siguientes preguntas:

- Demuestre que la aplicación $\Theta : G \times M \to M$ es una acción.
- Demuestre que el cociente $\widetilde{M} = M/G$ admite estructura de variedad diferencial cociente.
- Dé una carta de $\widetilde{M}$ en el punto p indicado, y las coordenadas de p en esa carta.
- Demuestre que la aplicación indicada $F : \widetilde{M} \to N$ está bien definida y es diferenciable.

1.

- $G = \mathbb{Z}, \qquad M = \mathbb{R}^2 - (0,0), \qquad p = [(1,0)]$.
- $\Theta(k,(x,y)) = R_{k\pi}(x,y)$, donde $R_\vartheta(x,y)$ es la rotación central de ángulo ϑ en el plano $\mathbb{R}^2$.
- $F : \widetilde{M} \to S^1 \times [0,\infty), \qquad F[(x,y)] = \left((\frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^4}}, \frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}), \sqrt{x^2+y^2} \right)$

2.

- $G = \mathbb{Z}_2 = \{+1,-1\}, \qquad M = S^2, \qquad p = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
- $\Theta(a,p) = a \cdot p$.
- $F : \widetilde{M} \to S^2, \qquad F[x,y,z] = \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^4+z^4}}, \frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4+z^4}}, \frac{z^2}{\sqrt{x^4+y^4+z^4}} \right)$.

3.

- $G = \mathbb{Z}, \qquad M = (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}, \qquad p = [(-1/2, 7/2)]$.
- $\Theta(k,(s,t)) = ((-1)^k s, t+k)$.
- $F : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^2, \qquad F[s,t] = (s^2 \cos 2\pi t, s^2 \sin 2\pi t)$.

4.

- $G = \mathbb{Z}$, $M = S^1 \times \mathbb{R}$ donde vemos S^1 como la circunferencia unidad en el plano complejo $\mathbb{C}$.
- $\Theta(k,(z,t)) = ((-1)^k z, t+k)), \qquad p = (i, 7/2)$.
- $F : \widetilde{M} \to \mathbb{C}, \qquad F[z,t] = z^2 \exp 2i\pi t$.

---

5. Halle una acción de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}^2$ cuyo espacio cociente sea difeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.

---

6. Halle una acción de $\mathbb{Z}_2$ en $S^1 \times (-1,1)$ cuyo espacio cociente sea difeomorfo al interior de una cinta de Moebius.