1. Sea X_1 una variedad topológica (sin borde) de dimensión n_1. Sea X_2 variedad topológica de dimensión n_2. Demuestre que

- Si X_2 no tiene borde, $X_1 \times X_2$ es una variedad topológica (sin borde) de dimensión $n_1 + n_2$.
- Si X_2 tiene borde, $X_1 \times X_2$ es una variedad topológica con borde de dimensión $n_1 + n_2$. ¿Cuál es el borde de $X_1 \times X_2$?

2. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ la unión conjuntista de todas las rectas que pasan por $(0,0)$, excepto la horizontal. Demuestre que si damos a X la topología inducida de $\mathbb{R}^2$ entonces X no es una variedad topológica.

3. Este ejercicio es muy útil cuando hay que trabajar con la topología cociente.

1. Sea X un espacio topológico compacto. Demuestre que si $f : X \to Y$ es una biyección continua sobre un espacio de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.
2. Sea Z un espacio topológico en el que hay definida una relación de equivalencia $\sim$. Denotamos por $X = Z/\sim$ y por $\pi : Z \to X$ el espacio y la aplicación cociente respectivamente. Deduzca bajo qué condiciones una aplicación $f : Z \to Y$ induce una aplicación $g : X \to Y$ con $f = g \circ \pi$. ¿Es g continua si lo es f?
3. Suponga ahora que X es compacto e Y Hausdorff. Demuestre que una aplicación continua y sobreyectiva $f : Z \to Y$ con $f(z) = f(z')$ sii $z \sim z'$ induce un homeomorfismo $g : X \to Y$.

4. En $Z = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ definimos la relación de equivalencia:

$$(0, y) \sim (2\pi, y)\ ,\ (x, 0) \sim (x, 2\pi)\ ,\ (x, y) \sim (x, y)$$

Demuestra que $X = Z/\sim$ es homeomorfo a el toro $S^1 \times S^1$ (como variedad producto). Dé también un homeomorfismo explícito de X a una superficie de $\mathbb{R}^3$ (conviene repasar el curso de curvas y superficies)

5. Recuerde que el plano proyectivo real $P^2_{\mathbb{R}}$ se definía como el cociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mediante la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si existe un $\lambda \neq 0$ tal que $x = \lambda y$.

1. Demuestre que $P^2_{\mathbb{R}}$ es compacto describiéndolo como imagen de un compacto mediante la aplicación cociente.
2. Sea $\overline{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ el disco cerrado. Pruebe que $P^2_{\mathbb{R}}$ es homeomorfo al cociente $\overline{D}/\sim$ dado por
   - Cada punto del interior de $\overline{D}$ sólo es equivalente a sí mismo.
   - $p \sim -p$ para $p \in S^1 = \partial\overline{D}$.

   Para esta parte, puede usar que $\overline{D}$ es homeomorfo a la semiesfera

   $$\{\,(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\,\}.$$
3. Use este resultado para exhibir una banda de Möbius dentro de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (esto tiene como consecuencia que $P^2_{\mathbb{R}}$ no es orientable tal y como veremos más adelante).