---

1. Como os he repetido una y mil veces en las largas horas de clase, $\alpha'(0)(f) = (f \circ \alpha)'(0)$; en este caso $\alpha(t)$ es la recta $x\cos t + y\sin t + t + 1 = 0$, y $f(\ell) = \text{dist}(\ell, (0,0))$, así que calculo la distancia de $\alpha(t)$ al punto $(0,0)$, y recordando lo que aprendí en Geometría I,

$$\text{dist}(\alpha(t), (0,0)) = \frac{0\cos t + 0\sin t + t + 1}{\sqrt{(\cos t^2 + \sin t^2}} = t + 1$$

con lo que la respuesta es $\alpha'(0)(f) = (t+1)'_{t=0} = 1$.

---

2. En este caso hay que recordar que si en la carta $(U, \phi = (x_1, x_2))$ las coordenadas de la curva son $(x_1(t), x_2(t))$, entonces $\alpha'(0) = x_1'(0)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2'(0)\frac{\partial}{\partial x_2}$. Como $\phi(Ax + By + C = 0) = (B/A, C/A)$, obtengo que $x_1(t) = \sin t / \cos t$, $x_2(t) = (t+1)/\cos t$; derivando y sustituyendo posteriormente en t me queda $x_1'(0) = 1$, $x_2'(0) = 1$, y por lo tanto

$$\alpha'(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$$

---

3. En este caso tenemos que escribir los vectores $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ en $q = \alpha(\pi/4)$ en términos de los correspondientes vectores $\frac{\partial}{\partial y_1}\big|_q$, $\frac{\partial}{\partial y_2}\big|_q$; como sabemos de clase, habrá que calcular $\psi \circ \phi^{-1}$ y su derivada en el punto $(x_1(q), x_2(q))$. Empezamos:

$$q = \alpha(\pi/4) = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\pi}{4} + 1 = 0 \right\}; \quad (x_1(q), x_2(q)) = \left(1, \frac{\frac{\pi}{4}+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \left(1, \frac{\pi+4}{2\sqrt{2}}\right)$$

Seguimos:

$$\psi \circ \phi^{-1}(x_1, x_2) = \psi(\{x + x_1 \cdot y + x_2 = 0\}) = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right); \quad D(\psi \circ \phi^{-1}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \end{pmatrix}$$

Sustituimos las coordenadas de q y obtenemos la matriz del cambio pedido:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{\pi+4}{2\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

---

4. En este apartado tenemos que escribir F en las cartas dadas y hallar la diferencial de esta expresión en las coordenadas del punto indicado. Lo más complicado es escribir la ecuación de una recta ℓ tras rotarla $\frac{\pi}{2}$ respecto al origen, pero esto tampoco es tan duro: la rotación indicada manda el punto (a, b) al punto $(-b, a)$; la inversa manda pues (x, y) a $(y, -x)$;por lo tanto, si $Ax + By + C = 0$ es la ecuación de ℓ, y $Dx + Ey + F = 0$ es la ecuación de $F(\ell)$, entonces $(x, y) \in F(\ell)$ si y solo si $(y, -x) \in \ell$. Por lo tanto $(x, y) \in F(\ell)$ solo si $Ay - Bx + C = 0$, así que ésta es la ecuación de la recta rotada.

Ahora seguimos el habitual "subir-cruzar-bajar":

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x_1, x_2) = \psi \circ F(\{x + x_1 y + x_2 = 0\}) = \psi(\{-x_1 x + y + x_2 = 0\}) = (-x_1, x_2)$$

que tiene como derivada la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en cualquier punto.