Geometría III, Problemas 7

Primer semestre, 2007/08.

Instrucciones: Redacte la solución del problema propuesto tan claramente como le sea posible, y entréguela al inicio de la clase del día **14 de Enero**. Todo el trabajo debe realizarse de forma absolutamente individual. En esta ocasión, el problema es el mismo para todos.

Sea M la variedad de rectas en el plano afín con la estructura diferencial estudiada en clase. Recuerde que teníamos dos cartas, (U, ϕ), (V, ψ) donde

- U está formado por todas aquellas rectas $Ax + By + C = 0$ con $A \neq 0$, $\phi(\ell) = \left(\frac{B}{A}, \frac{C}{A}\right)$.
- V está formado por todas aquellas rectas $Ax + By + C = 0$ con $B \neq 0$, $\psi(\ell) = \left(\frac{A}{B}, \frac{C}{B}\right)$.

Por motivos notacionales, escribiremos $\phi = (x_1, x_2)$, $\psi = (y_1, y_2)$.

1. En M consideramos la curva $\alpha : \mathbb{R} \to M$, donde para cada $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ es la recta de ecuación $x \cos t + y \sin t + 1 + t = 0$. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es la función $f(\ell) = \mathrm{dist}(\ell, (0,0))$, halle $\alpha'(0)(f)$.
2. Sea $p = \alpha(0)$.Halle la expresión local del vector $\alpha'(0)$ en la base de vectores coordenados $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p \right\}$ correspondiente a la carta (U, ϕ).
3. Si $q = \alpha(\pi/4)$, halle la matriz de cambio de base desde la base de vectores coordenados $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_q, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_q \right\}$ a la base de vectores coordenados $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_q, \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_q \right\}$.
4. Sea $F : M \to M$ la aplicación diferenciable que manda cada recta ℓ a la recta obtenida tras una rotacion de ángulo $\pi/2$ con centro el origen. Halle la matriz de dF_p en las bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p \right\}$ de p y $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{F(p)}, \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{F(p)} \right\}$ de $F(p)$.
