ALGUNAS PROPIEDADES INUSUALES DE LAS PERPENDICULARES RESPECTO A LAS PARALELAS EN DOS MODELOS NO EUCLIDEOS DEL PLANO.

Lucía Contreras Caballero, Profesora Titulas Numeraria
U. A. M.(jubilada).lucia.contreras11@gmail.com

Comunicación.

RESUMEN.

Si cambiamos la manera de medir la distancia en el plano cambian las líneas rectas obteniéndose rectas o curvas tales que por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas y donde las perpendiculares tienen propiedades distintas de las que tienen en el espacio euclídeo, p. ej. Las perpendiculares a una misma recta no son paralelas, las paralelas no tienen perpendicular común y el ángulo de paralelismo es menor que un recto.

Esto lo vamos a ver en el modelo proyectivo del plano, cuyas rectas son los segmentos interiores de rectas euclídeas en un círculo (un plano) y en el modelo de Poincaré, cuyas rectas son los diámetros y los trozos interiores de circunferencias ortogonales a la circunferencia exterior de un círculo (otro plano).

Nivel educativo:
Segundo curso de Bachillerato. Primeros cursos de Universidad.

1. INTRODUCCIÓN.

La recta que une dos puntos es la que recorrida da la mínima distancia entre los dos puntos.

Se llaman rectas paralelas a las rectas que por mucho que se prolonguen no se encuentran. Son a la vez límites de rectas secantes trazadas por un punto cuando el otro punto de intersección con la recta se aleja infinitamente.

Se llaman ángulos rectos los que son iguales a sus adyacentes, entendiendo por iguales que pueden superponerse por una transformación biyectiva del plano que conserva la alineación (es decir, transforma puntos alineados en puntos alineados).

Las líneas rectas del plano usual, que se llama euclídeo, cumplen las propiedades geométricas que se llaman axiomas de Euclides: 1) dos puntos determinan una recta que pasa por ellos, 2) toda línea se puede prolongar indefinidamente en la misma dirección, 3) con cualquier centro y con cualquier radio se puede trazar una circunferencia, 4) Todos los ángulos rectos se pueden superponer por una transformación del espacio que conserva la alineación.

El V axioma de Euclides afirma que por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela a dicha recta.

Un problema pendiente de la Geometría griega hasta el siglo XIX era averiguar si el V axioma de Euclides era o no una consecuencia de los otros cuatro

El origen de los axiomas es empírico, es decir, son una abstracción de las construcciones que se pueden hacer experimentalmente en el plano y así como se ve claro que los cuatro primeros axiomas son realizables, en cuanto que la definición de paralelismo incluye la consideración de rectas que se prolongan infinitamente saliéndose de nuestro campo visual, el axioma V no se puede comprobar con métodos corrientes. Por eso, para tener la certeza de su adecuación a la realidad, estaban empeñados hasta el siglo XIX, muchos matemáticos en comprobar que era una consecuencia lógica de los otros cuatro.

Si cambiamos la manera de medir la distancia en el plano cambian las líneas rectas obteniéndose rectas o curvas tales que por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas a la recta dada, pero que si siguen cumpliendo los cuatro primeros postulados de Euclides.

Al encontrar modelos del plano que verifican los cuatro primeros axiomas (aunque en este artículo no se prueba, se puede encontrar en la bibliografía), pero no verifican el quinto, queda establecido que el quinto axioma no es una consecuencia de los cuatro primeros y que para su certeza habría que recurrir a medios físicos.

Además, en el plano euclídeo usual, todas las perpendiculares a una recta dada son paralelas y dos rectas paralelas tienen perpendiculares comunes. Se llama ángulo de paralelismo al ángulo que forma una perpendicular a la recta por un punto con una paralela a la recta por ese mismo punto. Como consecuencia de que las rectas paralelas tienen perpendiculares comunes tenemos que el ángulo de paralelismo es un recto en el plano euclídeo. Estas propiedades no se cumplen en los modelos proyectivo y de Poincaré del plano que se llama hiperbólico, como vemos a continuación.

2. Modelo Proyectivo del Plano.

La recta que une dos puntos es la que recorrida da la mínima distancia entre los dos puntos. Sean A, A' los extremos de un segmento de línea recta, podemos definir la distancia entre dos puntos R y Q del segmento por
$d(R,Q)=(1/2)\ln(AR/AQ:A'R/A'Q)=1/2\ln(AR/A'R:AQ/A'Q)$; entonces, las líneas rectas coinciden con las rectas euclídeas, pero cuando R se acerca a A, este número se va haciendo cada vez más grande siendo negativo y cuando R se acerca a A', este número se va haciendo cada vez más grande siendo positivo. Entonces, los puntos A y A' están infinitamente lejos de Q y de cualquier punto del segmento AA' de la recta.

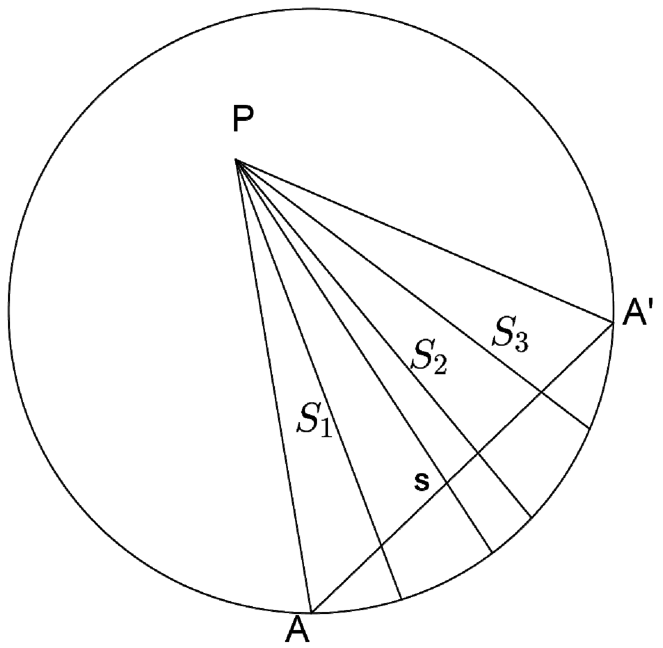
El modelo proyectivo del plano consiste en el círculo interior a una circunferencia, en la que se consideran rectas las intersecciones con el círculo interior de las rectas euclídeas, que por lo visto en el párrafo anterior son de longitud infinita con la distancia definida.

2.1. Rectas paralelas.

En el espacio euclídeo usual, la recta límite de las secantes a una recta dada cuando el punto de corte se aleja infinitamente se llama paralela y a simple vista coincide en los dos casos en que el punto de corte se aleja en un sentido o en el contrario. Sin embargo, dada una recta de extremos A, A′ en el modelo proyectivo del plano (Figura 1), y trazada otra recta que pase por un punto P exterior a AA′ y que corte a AA′ en S, al variar la recta secante alejándose el punto S de corte infinitamente hacia A, tendemos al segmento PA, que en esta manera de medir es el límite de las secantes hacia el punto A. Lo mismo ocurre cuando el punto S se mueve hacia el punto A′, teniendo que el segmento PA′ es el límite de las secantes hacia el punto A′. Con la forma de dar la distancia que hemos introducido, hemos encontrado dos segmentos límites de las rectas secantes, que son paralelas no euclídeas, habiendo encontrado dos paralelas a la recta dada.

Son paralelas, en general, las rectas determinadas en el interior del círculo por rectas que se cortan sobre la circunferencia exterior.

Figura 1:PA y PA' son PARALELAS a AA' como límites de secantes S_i



2.2. RECTAS PERPENDICULARES.

Son perpendiculares las rectas que forman un ángulo recto. Se llaman ángulos rectos los que son iguales a sus adyacentes, entendiendo por iguales el que pueden superponerse por una transformación biyectiva del plano que conserva la alineación (es decir, transforma líneas rectas en líneas rectas).

Las transformaciones del plano proyectivo que conservan la alineación de los puntos y por tanto transforman rectas en rectas son las que conservan el valor del número (AR/AQ):(A′R/A′Q) que se llama razón doble de la cuaterna (A,A′,R,Q) donde A, A′, R y Q son cuatro puntos alineados cualesquiera y en nuestro modelo proyectivo del plano estas transformaciones son las restricciones al interior de la circunferencia de las transformaciones proyectivas que además dejan invariante la circunferencia exterior y el círculo interior.

Por ello, (Figura 2), dado un segmento AA′ de recta euclídea, que es una recta en el modelo proyectivo del plano si A y A′ están en la circunferencia exterior, y un punto P en este segmento, se puede trazar la perpendicular p a la recta por el punto P teniendo en cuenta que la recta p, que pasa por P es perpendicular a AA′ si existe una transformación restricción de una proyectiva, que conserva la alineación, que intercambia A con A′ y deja p invariante. Veamos cómo tiene que ser esta transformación: ya que la circunferencia exterior ha de quedar invariante, rectas tangentes se transforman en rectas tangentes; Si A y A′ se intercambian, las tangentes en A y A′ también se intercambian en la transformación extensión a todo el plano proyectivo, por lo que su punto de corte O ha de ser fijo por estar en la intersección de dos rectas intercambiadas. Podemos construir la transformación proyectiva si p pasa por O de la siguiente manera:

Si el punto S pertenece a la recta OP, lo dejamos fijo. Si el punto S pertenece a la recta AA′ la imagen S′ de S ha de quedarse en la recta porque puntos alineados se transforman en puntos alineados. S′ se determina porque la razón doble (AA′PS) debe ser igual a la razón doble (A′APS′). La imagen R′ de otro punto R del plano que no esté en p ni en AA′, (Figura 2), queda determinada trazando la recta s que pasa por R y O, que cortará a la recta AA′ en un punto S. Entonces la imagen S′ de S queda determinada por (AA′PS)=(A′APS′) y la recta OS se transforma en la recta OS′, por lo que R′ estará en OS′. Sean B, B′ los puntos de corte de p con la circunferencia exterior. Al quedar fijos, queda fijo el punto O′, intersección de las tangentes al círculo en B y en B′. Trazamos la recta que une R con O′, que cortará a p en otro punto T, que también queda fijo, entonces, la recta O′T es invariante y la imagen de R estará en la recta O′T que coincide con O′R. Siendo la imagen R′ de R la intersección de O′R con OS′.

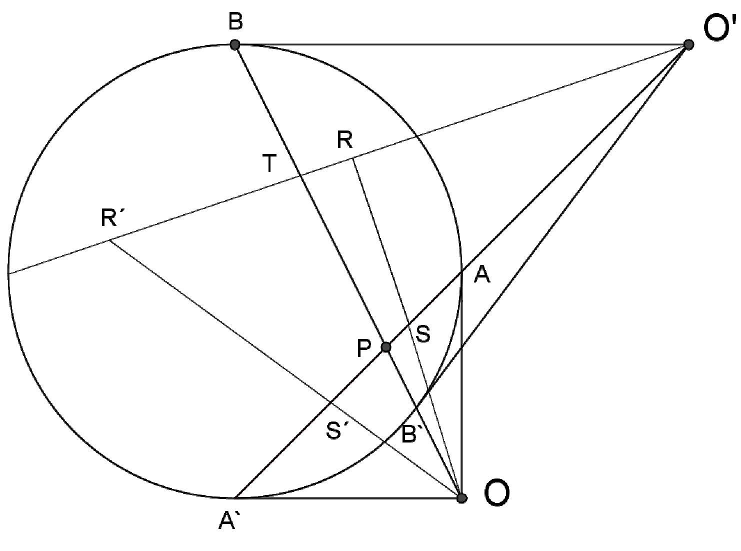


Figura 2: rectas AA' y BB' perpendiculares.
La transformación R→R' lleva el ángulo APB a A'PB.

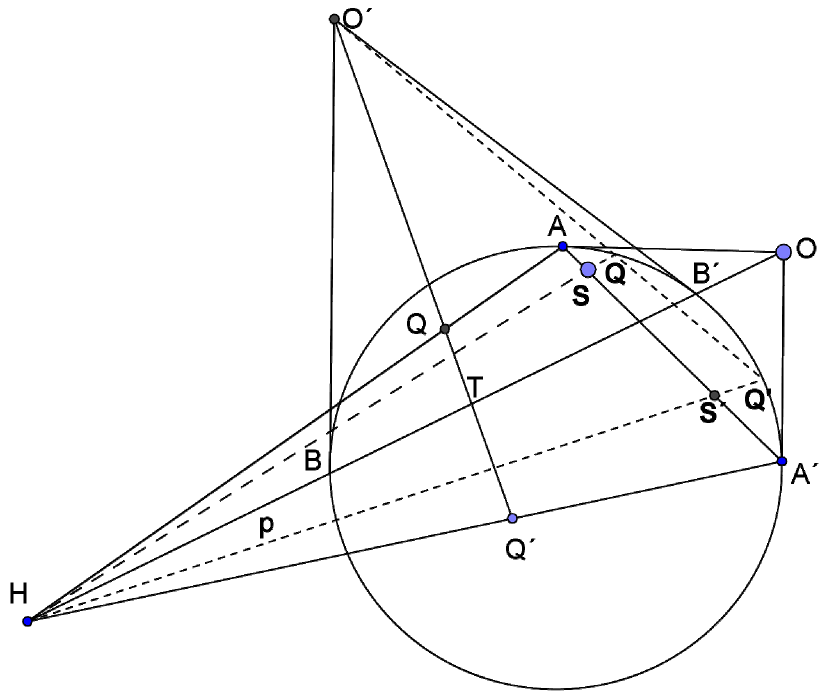
Se puede demostrar utilizando resultados en Santaló (referencias), que esta transformación conserva la alineación de todas las rectas y las distancias proyectivas entre dos puntos cualesquiera del interior del círculo.

Otra forma geométrica (sin usar la razón doble) de determinar la imagen Q′ de un punto Q (Figura 3), es trazar la recta que pasa por Q y A, que cortará a la recta p en un punto H fijo o es paralela a p (en sentido euclídeo). Si la recta que pasa por Q y A corta a p en H, por conservar la transformación la alineación, Q′ estará sobre la recta A′H que pasa por A′. La recta OH es fija porque O y H son fijos. La recta O′Q es invariante por contener a T (fijo por estar en p) y a O´, y contiene a Q′. Entonces, Q′ es la intersección de A′H y O′Q.

Si la recta que pasa por Q y A es paralela a p, la imagen de Q es la intersección Q′ de la recta paralela a p por A′ y O′Q.

Para los puntos S de AA′, podemos coger un punto Q en la recta HS, distinto de S, hallamos su imagen Q′ por el método anterior y entonces la imagen S′ es la intersección de HQ′ con AA′. (El punto Q puede ser la intersección de la prolongación de HS con la circunferencia exterior, fig. 3 en puntos).

Figura 3: Transformación Q→Q' que lleva el ángulo APB a A'PB



Así hemos definido de dos formas distintas la misma transformación que tiene tres pares de puntos correspondientes en la circunferencia: (A,A′), (A′,A) y (B,B) dejando por ello invariante la circunferencia exterior, según resultados en Santaló (referencias), y que deja fija la recta p; como B, B′ son los extremos de la recta p (intersecciones de p con la circunferencia), intercambia los ángulos BPA y BPA′, que por ello, son rectos.

Además, cualquier otra recta l que pase por P y no pase por O no determina un ángulo recto. En efecto, sean B y B′ las intersecciones de l con la circunferencia. Para que los ángulos APB y A′PB se puedan superponer por una transformación que conserve la alineación, la circunferencia y P, ha de ser fijo también el punto B′, entonces la transformación dejaría invariantes las tangentes en B y B′ y el punto de intersección O′ de dichas tangentes que quedaría fijo y no coincide con O. La transformación tendría cuatro puntos fijos: B, B′, O, O′, tales que ninguna terna de puntos está alineada por lo que sería la identidad (resultados de las referencias), y no podría transformar A en A′.

Por tanto, las rectas perpendiculares por distintos puntos a una recta dada son las rectas que pasan por cada punto y por la intersección de las tangentes a la circunferencia en los extremos de la recta. (Figura 4). Se ve que no son paralelas.

También se ve en la Figura 5 que no hay perpendicular común a dos rectas paralelas HH′ y HH′′, porque esta perpendicular común tendría que pasar por los puntos O y O′ correspondientes y coincidir con la tangente a la circunferencia exterior en el punto común H de las dos paralelas, no determinando ningún segmento en el interior y por tanto ninguna recta.

Fig. 4. Perpendiculares a AA´, no paralelas entre sí.

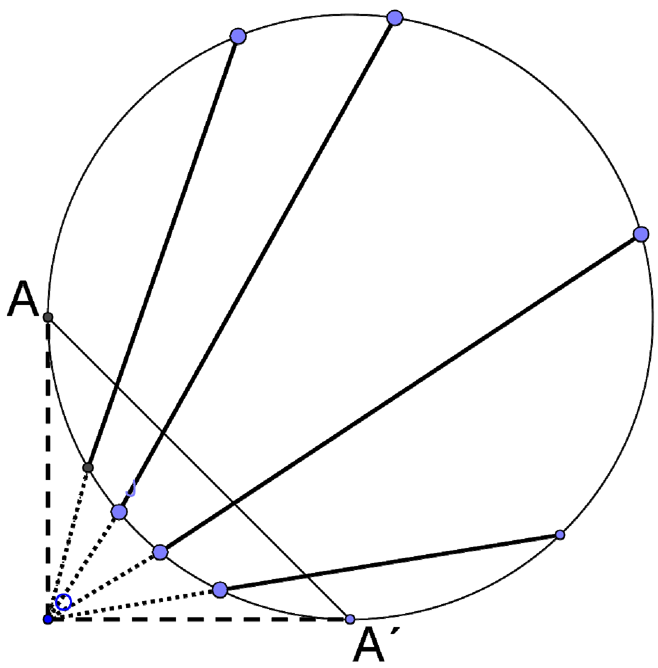
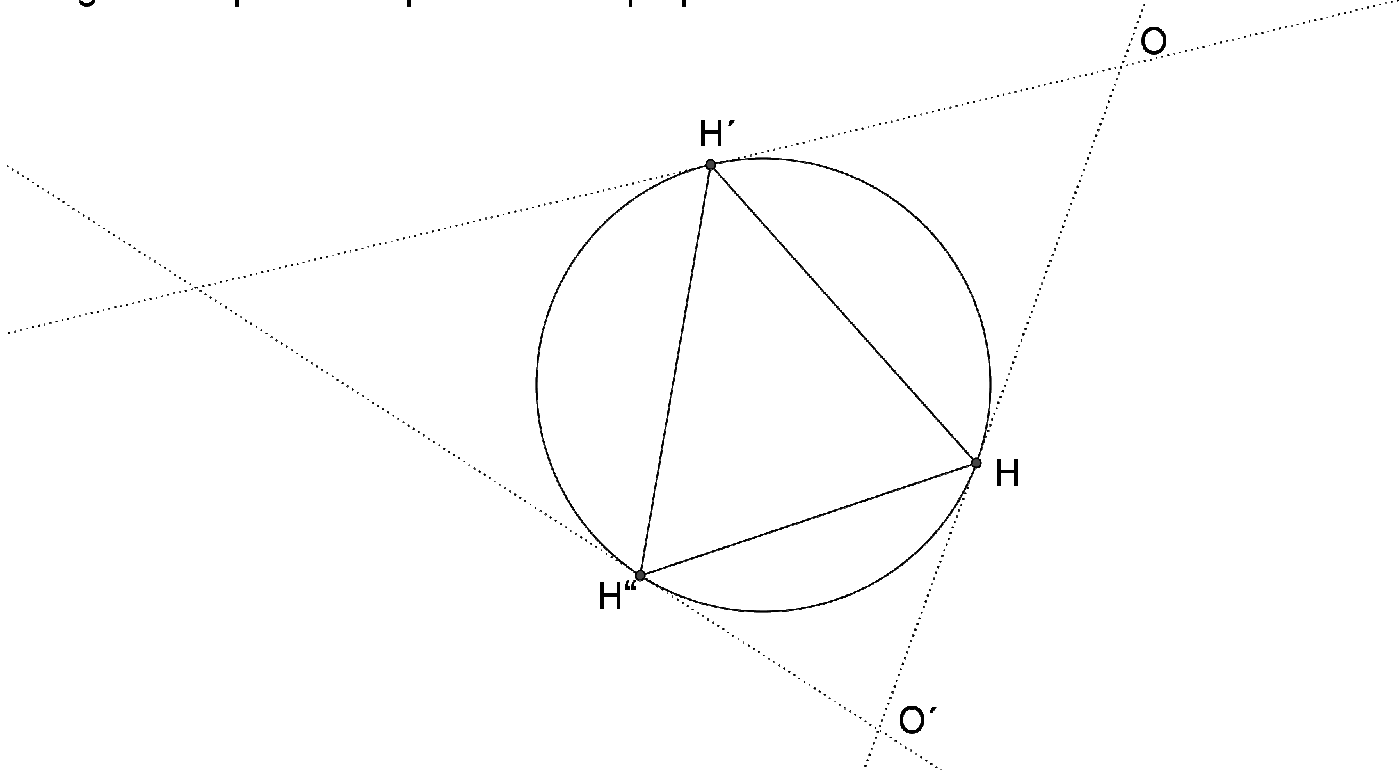
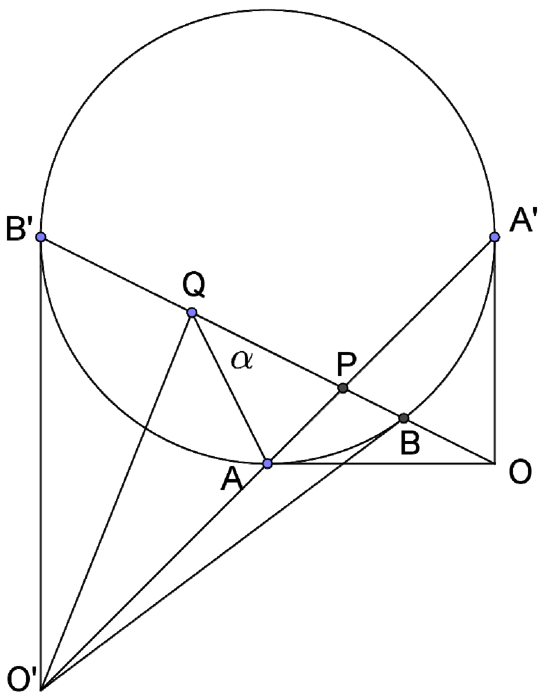


Fig.5. Tres paralelas que no tienen perpendicular común dos a dos.



2.3. El ángulo de paralelismo es menor que un recto.

Figura 6: ángulo de paralelismo α=AQB, menor que ángulo O'QB que es recto.



Se llama ángulo de paralelismo a una recta en un punto Q al ángulo que forman la perpendicular a la recta dada por el punto y una paralela por el punto a la recta dada.

Dada la recta AA', (Figura 6), la perpendicular por P a AA' es la recta que pasa por P y por O, siendo O la intersección de las tangentes en A y A'. Cojamos un punto Q de dicha recta y una paralela QA por el punto Q a AA'. El ángulo de paralelismo PQA es menor que el ángulo recto PQO' que forman PQ y la recta O'Q, perpendicular por Q a QP. (O' es la intersección de las dos tangentes en los puntos B, B', intersecciones de la recta PO con la circunferencia exterior).

3. Rectas en el Modelo de Poincaré del Plano.

Las líneas rectas son también las trayectorias de los rayos de luz. Si en lugar de ser constante la velocidad de la luz, esta velocidad es en el interior de un círculo igual a la distancia del punto a la circunferencia exterior, puede demostrarse que las trayectorias de los rayos de luz son los diámetros y los trozos de circunferencia que cortan ortogonalmente a la circunferencia exterior. El modelo de Poincaré del plano hiperbólico, consiste en el interior de un círculo en el que las rectas son las trayectorias de los rayos de luz con la velocidad proporcional a la distancia de cada punto al exterior. Los puntos de la circunferencia exterior no se alcanzan nunca porque la velocidad se va haciendo cero al acercarse a esos puntos; por ello son los puntos del infinito, en este modelo.

3.1. Rectas paralelas.

Dada una circunferencia ortogonal a la circunferencia exterior (una recta en este modelo), son paralelas a ella las rectas límite de las rectas secantes cuando el punto de intersección se aleja infinitamente, es decir, se va acercando a los puntos en la circunferencia exterior de la recta dada. (Figura 7).

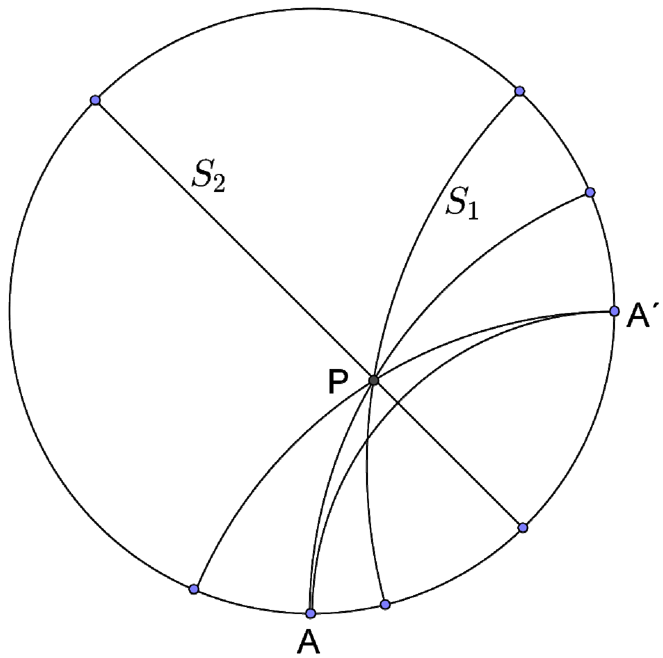


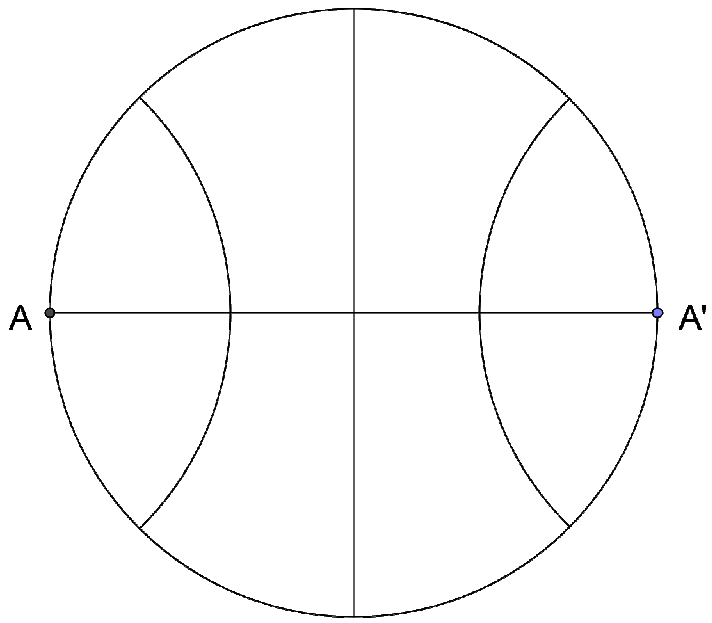
Fig.7. Dos secantes y dos paralelas a AA' pasando por P.

Por tanto, hay dos paralelas a una recta dada, (circunferencia ortogonal a la circunferencia exterior), pasando por un punto P, que son las dos circunferencias tangentes a la circunferencia dada en sus puntos A y A′ de la circunferencia exterior en los que cortan ortogonalmente a dicha circunferencia exterior y pasan por P. Sus centros están uno en la intersección de la perpendicular euclídea al radio de la circunferencia exterior que pasa por A y la mediatriz del segmento PA y otro en la intersección de la perpendicular euclídea al radio de la circunferencia exterior que pasa por A′ y la mediatriz del segmento PA′.

3.2. RECTAS PERPENDICULARES.

Son perpendiculares las rectas que forman un ángulo recto. Se llaman ángulos rectos los que son iguales a sus adyacentes, entendiendo por iguales el que pueden superponerse por una transformación biyectiva del plano que conserva la alineación (es decir, transforma líneas rectas en líneas rectas). Las transformaciones biyectivas que conservan la circunferencia exterior y transforman rectas en rectas (en este caso, rectas o circunferencias ortogonales a la circunferencia exterior entre sí), son los giros de centro el origen, las simetrías respecto a los diámetros y las inversiones respecto a los centros de las circunferencias ortogonales a la exterior.

Figura 8: Perpendiculares a AA' no paralelas.



El diámetro vertical es perpendicular al diámetro AA′. También, las circunferencias ortogonales a la exterior, dibujadas son ortogonales a AA´ya que se ve que las tangentes en los puntos de intersección la cortan ortogonalmente.

Veamos cómo son las perpendiculares a trozos de circunferencias ortogonales a la circunferencia exterior: (Figura 9).

Dada r, una circunferencia ortogonal a la circunferencia exterior, cualquier circunferencia con centro en la secante que pasa por sus dos puntos del infinito tiene tangentes a dichas circunferencias de la misma longitud, (por las propiedades de la potencia de un punto respecto a una circunferencia).

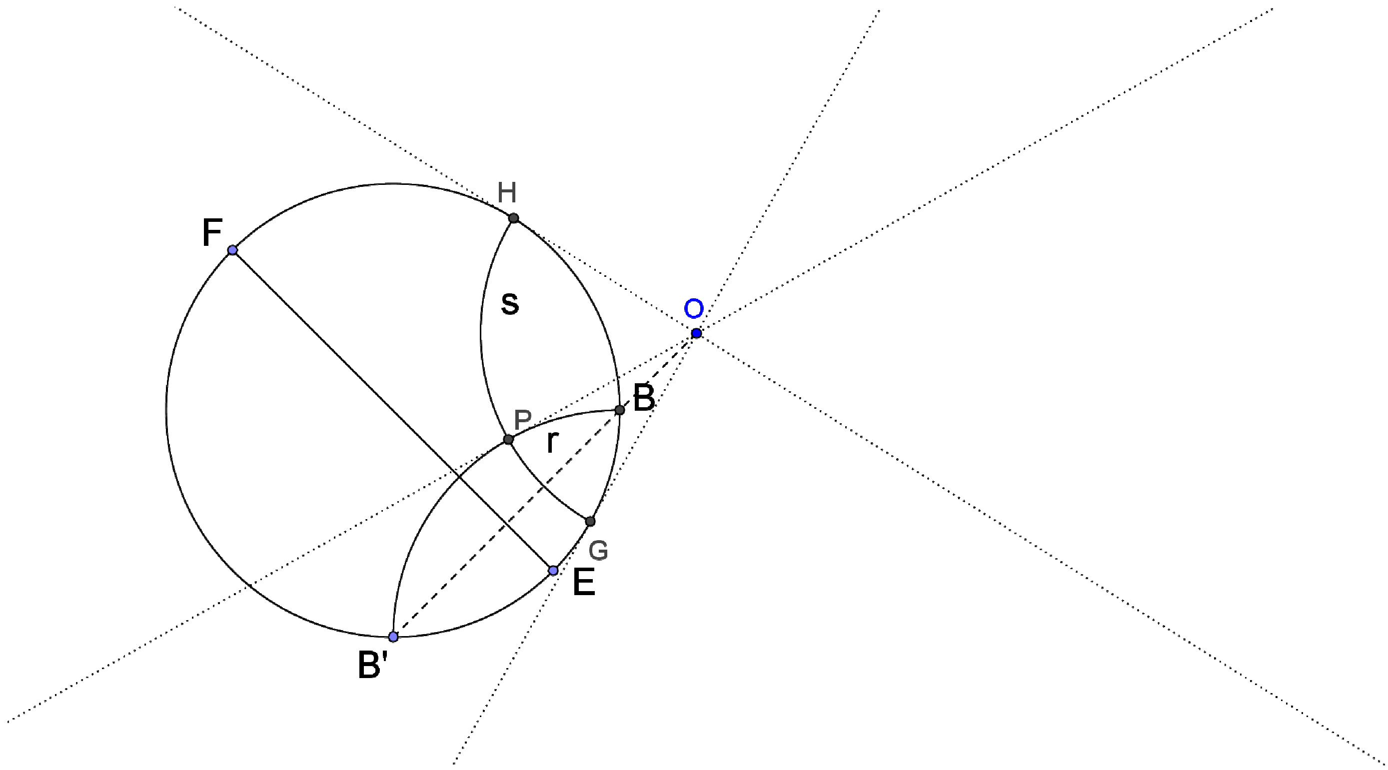


Fig.9. EF y s son perpendiculares a r, no paralelas entre sí.

Si cogemos un punto P en r y trazamos la tangente a r en P, esta tangente corta a la secante anteriormente considerada en un punto O tal que la circunferencia s de centro O, que pasa por P pasa también por los puntos de tangencia de las tangentes a la circunferencia exterior trazadas desde O, por lo que s es perpendicular a la circunferencia exterior y por ello una recta del nuevo modelo de plano. La inversión cuyo centro es O y cuya razón es el cuadrado del radio de s, deja fija s e invariante a r intercambiando los puntos B y B' de r en el infinito, por lo que superpone los ángulos entre r y s adyacentes a ambos lados de s, que por ello son rectos, siendo r y s perpendiculares.

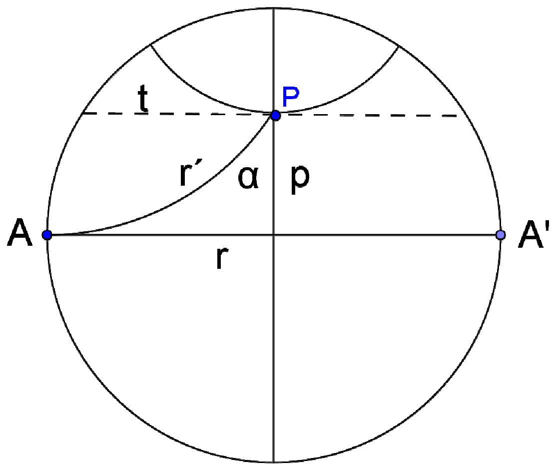
El diámetro EF es también perpendicular a r por la simetría respecto a EF. Se ve fácilmente que EF y s no son paralelas.

También se ve fácilmente que rectas paralelas (circunferencias ortogonales a la circunferencia exterior que tienen en común un punto de esta circunferencia exterior) no tienen perpendicular común porque su centro tendría que estar en la intersección de las dos secantes de la circunferencia exterior que pasan por los pares de puntos del infinito de dichas circunferencias, y que sólo tienen en común el punto común en el infinito de las circunferencias dadas; como tendría que tener radio tangente a la circunferencia exterior, este debe ser 0.

3.3. EL ÁNGULO DE PARALELISMO ES MENOR QUE UN RECTO.

Se ve fácilmente que la paralela r’ a un diámetro r por un punto P de su diámetro perpendicular p forma con este diámetro perpendicular un ángulo alfa menor que el recto que forma p con la circunferencia ortogonal a p en P (y a la circunferencia exterior), que sería tangente a t en P, (Figura 10).

Figura 10. Ángulo de paralelismo: α



Estas propiedades parecen un desafío al sentido común, por eso Gauss, que hizo construcciones geométricas correspondientes a geometría hiperbólica no se atrevió a darlas a conocer; se dudó si al seguir sacando consecuencias se llegaría alguna vez a una contradicción, pero Lobachevski, consiguió explicitar los cálculos de esta geometría llamada hiperbólica, algunos de los cuales se pueden ver en [S’’], no encontrando contradicción a no ser que hubiera contradicción en la geometría euclídea en la que se considera cierto el quinto postulado.

Para los usos de la práctica, la geometría euclidiana es la que mejor se adapta. En cambio, para ciertos capítulos de la matemática pura (teoría de funciones automorfas) o de la física teórica (teoría de la relatividad) los esquemas de las geometrías no euclidianas son más apropiados. Podría ser que la intuición fallara y que otras geometrías fueran apropiadas en fenómenos cuyo orden de magnitud sea como las distancias estelares o las partículas elementales (física cuántica). Véase [S’’].

REFERENCIAS.

[C] COURANT ROBBINGS, ¿Qué es la Matemática?, Aguilar, 1971.

[S] SANTALO, L. A. Geometría no Euclídea, EUDEBA, 1961.

[S’] SANTALO, L. A. Geometría Proyectiva, EUDEBA, 1966.

[S’’] SMOGORZHEVSKI, A. S. Acerca de la Geometría de Lobachevski, Mir, 1978.