

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRIA. 1^{er} Curso de CC. Físicas.
Examen Final. Junio de 2001.

APELLIDOS:

NOMBRE:

DNI:

GRUPO:

1. Sea $E = R_5[x]$ el espacio de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que cuatro. Sea F el subconjunto de los polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, tales que $a_0 = 0$.

a) Demostrar que F es subespacio vectorial de E .

b) En F se consideran los vectores $u_1 = x + x^2 + 3x^3 + 3x^4$, $u_2 = 3x + 2x^2 + 6x^3 + 6x^4$, $u_3 = x^2$, $v_1 = x + 3x^4$, $v_2 = x + x^2 + x^3 + 3x^4$, $v_3 = -x^2 + 2x^3$. Encontrar bases de los subespacios de F : F_1 , F_2 , $F_1 \cap F_2$, $F_1 + F_2$.

2. Sea $E = R^4[x]$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Sean los subespacios de E : $F_1 = \{p(x) \in E | p(0) = p(1) = 0\}$ y $F_2 = \mathcal{L}\{1, x^3\}$.

a) Comprobar que $E = F_1 \oplus F_2$.

b) Encontrar la matriz en la base canónica de E de la proyección Q correspondiente a la suma directa anterior tal que $Im(Q) = F_1$ y $N(Q) = F_2$.

3. Sea $M_2(R)$ el espacio vectorial de las matrices de números reales 2×2 .

Sea $f : M_2(R) \rightarrow M_2(R)$ el endomorfismo definido para $A \in M_2(R)$ por

$$f(A) = \alpha A + Tr(A)I$$

donde α es real y distinto de cero e I es el endomorfismo identidad de $M_2(R)$.

a) Verificar que f es una aplicación lineal. Calcular la matriz de f en la base canónica de $M_2(R)$:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

b) Calcular sus autovalores y sus correspondientes subespacios de autovectores. ¿Es f diagonalizable?

4. En el espacio euclídeo R^3 se considera la aplicación $f : R^3 \rightarrow R^3$ dada por $f(x, y, z) = (z, x, y)$

a) Demostrar que es un movimiento.

b) Hallar sus puntos fijos.

c) Determinar de qué movimiento se trata y dar sus elementos geométricos.