GEOMETRIAS NO EUCLIDEAS.

Lucía Contreras Caballero.

Profesora Titular Numeraria jubilada de la
Universidad Autónoma de Madrid. (lucia.contreras11@gmail.com)

La Geometría está constituida por proposiciones y teoremas basados en postulados inducidos de observaciones experimentales. La Geometría griega estaba basada en los llamados postulados de Euclides. Los cinco primeros postulados de Euclides son:

I. Por dos puntos pasa una única recta.

II. Toda recta puede prolongarse indefinidamente.

III. Con cualquier centro y cualquier radio se puede trazar una circunferencia.

(Cualquier segmento de recta AB (radio) se puede trasladar y luego girar haciendo coincidir el extremo A con un centro fijado C y determinando entre C y la imagen del punto B cualquier dirección fijada de antemano.)

IV. Todos los ángulos rectos son iguales.

(Veamos como se construyen los ángulos rectos: Trazada una recta en una hoja de papel se puede doblar la hoja por uno de los puntos de la recta de forma que las dos semirrectas determinadas en ella por el punto coincidan; entonces quedan determinadas entre la recta dada y la recta del doblez cuatro regiones, iguales porque pueden superponerse dos a dos doblando también por la recta del doblez, llamándose ángulos rectos). También se pueden obtener ángulos rectos con compás, a partir de un punto y una recta dada si la superficie no se puede doblar. Tiene sentido plantearse si los ángulos rectos obtenidos a partir de distintas rectas son iguales entre sí, y efectivamente podemos comprobar que lo son trasladando una escuadra en ángulo recto por los distintos ángulos construidos.

V. Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a dicha recta.

Como se definen las rectas paralelas como las rectas que no se cortan por mucho que se prolonguen, se define la paralela a una recta dada por un punto exterior como la recta que pasa por ese punto exterior y no encuentra a la recta dada por mucho que ambas se prolonguen. El caso es que no podemos trasladarnos todo lo lejos que imaginemos para comprobar si se cortan, por eso no estamos totalmente seguros si, en efecto, dos rectas dadas del plano aparentemente paralelas se cortan alguna vez.

Es por ello, por lo que la definición de paralelismo tiene la limitación de que por medios convencionales, las rectas no se pueden prolongar todo lo que la mente puede imaginar.

Podemos aproximarnos a la recta paralela a una dada por un punto exterior trazando una secante a la dada que pase por el punto exterior y deslizando al máximo el punto de corte de la recta secante a la recta dada a un lado de dicho punto de corte o al otro lado. La recta límite de las secantes a la recta dada que parten del punto exterior cuando el punto de corte de una secante y la recta dada se aleja infinitamente, sería una recta paralela a la dada en cualquier geometría.

Aparentemente, en las construcciones usuales de la geometría euclídea, los dos límites de las rectas secantes coinciden, pero esto tampoco se puede comprobar rigurosamente porque, al alejarlos infinitamente, los puntos de corte se salen del papel o del plano considerado, quedando fuera del alcance de la vista. Como el proceso de paso al límite puede hacerse en los dos sentidos opuestos de la recta dada, tiene sentido dudar si se obtiene la misma recta deslizando los puntos de corte en cada uno de los dos sentidos y por tanto dudar si en la realidad, las rectas paralelas resultantes son dos distintas o existe una única paralela.

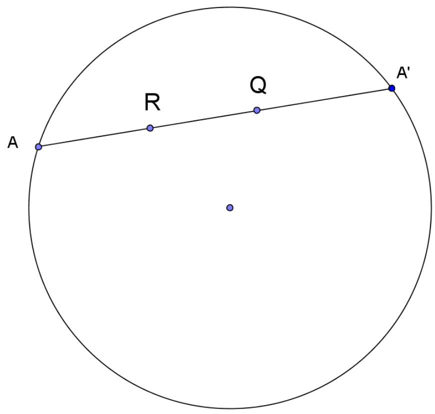
En Matemáticas, cuando no se está seguro de una afirmación se recurre a conocimientos anteriores de los que se está seguro, se razona y se hace una demostración del hecho en duda o del contrario, basada en los hechos de los que se está seguro. Los matemáticos estuvieron empeñados durante mucho tiempo, sin conseguirlo, en hacer una demostración del V postulado de Euclides a partir de los cuatro anteriores, que son fácilmente comprobables por métodos directos y a mano.

Gauss trató de probar que las paralelas no se cortaban, experimentalmente haciendo mediciones topográficas de largas distancias y ángulos pero no lo consiguió. [S'].

Entonces, otros matemáticos (Bolyay, Beltrami, Lobachevski, Klein...) [S'], empezaron a razonar indirectamente, por reducción al absurdo, negando el V postulado y viendo si había alguna contradicción entre esta negación y los anteriores postulados, no encontrando nunca esa contradicción en los resultados obtenidos.

Pero una demostración contundente de que el postulado V no es consecuencia de los cuatro primeros es la construcción de un modelo no contradictorio de plano con rectas en el que se cumplen los cuatro primeros postulados de Euclides y no el quinto, habiendo dos paralelas a una recta por un punto exterior. Uno de esos modelos es el modelo proyectivo (de Klein) y hay otros modelos (de Poincaré) que se llaman planos hiperbólicos.

A continuación se explica un poco el modelo proyectivo: se obtiene del interior de un círculo considerando como rectas los interiores de los segmentos intersecciones de las rectas euclídeas con dicho interior (exceptuando los puntos de la circunferencia) y cambiando la forma de definir la distancia entre puntos, lo cual cambia la relación entre las rectas paralelas porque al ser una recta determinada por dos puntos la trayectoria de longitud mínima entre los dos puntos, las rectas dependen de la forma de definir la distancia. La distancia entre dos puntos R y Q interiores de un círculo se define [S], por:



$$d(R,Q) = ln(\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{A'R}} : \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{A'Q}}) = ln(\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{AQ}} : \frac{\overrightarrow{A'R}}{\overrightarrow{A'Q}})$$

donde A y A' son los extremos del segmento interior al círculo determinado por R y Q.

Esta distancia está bien definida porque las dos fracciones de la segunda expresión de la distancia son positivas al ser fracciones positivas (de segmentos con el mismo sentido) y por tanto está definido el logaritmo. Se ve que esta distancia es aditiva en la recta de la siguiente forma:

$$d(R,Q) + d(Q,S) =$$

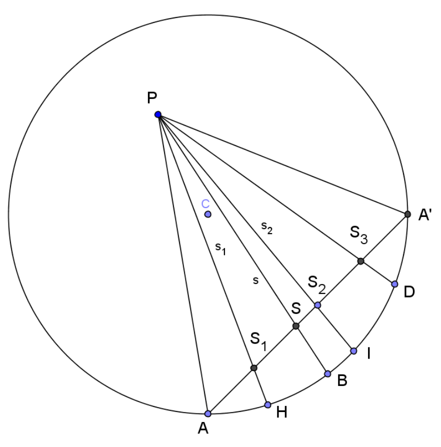
$$ln|\overrightarrow{AR}| - ln|\overrightarrow{AQ}| - ln|\overrightarrow{A'R}| + ln|\overrightarrow{A'Q}| + ln|\overrightarrow{AQ}| - ln|\overrightarrow{AS}| - ln|\overrightarrow{A'Q}| + ln|\overrightarrow{A'S}| =$$

$$ln|\overrightarrow{AR}| - ln|\overrightarrow{AS}| - ln|\overrightarrow{A'R}| + ln|\overrightarrow{A'S}| = d(R,S).$$

Por otra parte, se ve que cuando R tiende a A, d(R, Q) tiende a menos infinito porque en la primera expresión de d(R, Q), el numerador de la primera fracción tiende a cero y también se ve que cuando R tiende a A', d(R,Q) tiende a infinito porque en la segunda expresión de la distancia, el denominador de la segunda fracción tiende a cero.

Por eso se puede considerar que A y A' son puntos del infinito de la recta respecto a esta distancia. Son los puntos límites de la recta porque ésta está formada sólo por el interior del segmento AA'. Véase la figura a continuación.

Figura 1: Paralelas PA, PA' a AA', límites de secantes s_i



Dado un punto P exterior a la recta y una secante que pase por P y por un punto S de la recta, al deslizar al límite el punto S por la recta, llegamos a A en un sentido y a A' en el otro sentido, obteniéndose dos rectas límites: PA y PA', que por ser límites de secantes y pasar por los puntos del infinito de la recta son "paralelas" a la recta interior del segmento AA', en esta forma de definir la distancia. No tienen puntos en común con la recta dada porque los puntos A y A' no son de las rectas al no ser del interior del círculo.

Las dos rectas PA y PA' no son paralelas entre sí porque se cortan en P. Tenemos dos paralelas a una tercera que no son paralelas entre sí.

Aunque esto parezca un desafío al sentido común, Lobachevski hizo los cálculos de esta geometría en uno de los modelos de Poincaré (puede verse [S'']) comprobando que no hay contradicción en la geometría no euclídea si no la hay en la euclídea.

La geometría euclídea es más apropiada para distancias habituales, pero para la física de la relatividad y la física cuántica son más apropiadas las geometrías no euclídeas.

REFERENCIAS.

[A] Alfonso Gironza. Matemáticas. Primer curso de Bachillerato. Editor Alfonso Gironza. Barcelona. 1961.

[S] L. A. Santaló. Geometría Proyectiva. EUDEBA. Buenos Aires. 1964.

[S'] L. A. Santaló. Geometrías no Euclidianas. EUDEBA. Buenos Aires. 1961.

[S''] A. S. Smogorzhevski. Ed. Mir. Moscú. 1978.

Baeza, 10 de julio de 2015.