CURSO DE ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA. Vol. 1.
LUCÍA CONTRERAS CABALLERO.

Profesora jubilada del Depto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias.
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID.

Registrada la séptima versión de esta obra en 2012 como Curso de Álgebra Lineal en el Registro de la Propiedad Intelectual de la Comunidad de Madrid con número de asiento registral 16/2012/7857.

PRÓLOGO

Este libro ha sido redactado durante los años en que he ejercido la docencia de Álgebra Lineal del primer curso de la Licenciatura y del Grado de CC. Físicas y ha sido completado para cubrir los cursos cuatrimestrales de Álgebra y Geometría del primer curso de la Licenciatura y del Grado de CC. Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Madrid.

El material es adecuado también para los primeros cursos de las ingenierías.

El curso está escrito tratando de expresar de la manera más sencilla posible sus conceptos, teoremas y demostraciones, basándose solamente en los conceptos previos de Bachillerato. Además es autocontenido, estando detalladas las demostraciones de forma lógica y rigurosa. Y motivada cada etapa de la teoría por problemas teóricos de los que surge.

Al principio de cada capítulo se encuentran introducciones que preparan para la comprensión de los conceptos correspondientes. Con el mismo objetivo he realizado dibujos, que facilitan la comprensión de los razonamientos. Dicha comprensión puede irse afianzando al realizar los numerosos grupos de ejercicios intercalados, que tienen un orden progresivo en dificultad, pudiéndose resolver algunos de dos formas. Hay muchos problemas tipo resueltos. Al final de todos los capítulos de este volumen, excepto el de determinantes, hay problemas resueltos de los propuestos por la autora en los exámenes.

Además de los programas de las asignaturas y al hilo de ellos, he añadido otros trabajos originales míos, en este volumen:

Caracterización de las matrices invertibles.

Una introducción geométrica a los determinantes.

Una demostración sencilla y corta de la regla de Cramer.

Aplicaciones de la teoría de espacios vectoriales a la independencia del número de escalones de la matriz escalonada procedente de una matriz dada, al cálculo del rango de una matriz y a la obtención de las ecuaciones cartesianas de un subespacio.

Espacio vectorial cociente.

Estoy agradecida a Isabel Contreras Caballero y a Isabel García Contreras, quienes me han facilitado las instrucciones para adaptarme al formato del libro.

Lucía Contreras Caballero. Profesora Titular Numeraria Jubilada.
Departamento Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma de Madrid.

TABLA DE CONTENIDOS.

NÚMEROS COMPLEJOS.

Introducción.

Los distintos tipos de números han ido apareciendo en la historia del hombre progresivamente, según las necesidades de las actividades que realizaba y son estudiados hoy también progresivamente desde la escuela primaria a la Universidad.

Debido a la necesidad de contar las cabezas de ganado surgieron los números naturales, (que son todos positivos) con los que se puede sumar; los números enteros, (que pueden ser positivos o negativos e incluyen al cero) sirven para indicar los intercambios de mercancías y dinero; con ellos se puede sumar y restar. La multiplicación es una forma más rápida de hacer una suma de sumandos iguales y entonces se plantea el problema de hacer la operación inversa a la multiplicación que es la división, pero esta operación no siempre tiene solución con números enteros, por lo que se crearon otros números llamados fraccionarios o racionales.

Los números enteros se caracterizan por el hecho de que cualquier ecuación de la forma $x + a = b$ tiene solución cuando los números que aparecen en ella son enteros.

Los números fraccionarios se caracterizan por el hecho de que cualquier ecuación de la forma $a_1x + a = b$ tiene solución cuando los números que aparecen en ella son fraccionarios y $a_1 \neq 0$.

Hay otro conjunto de números en los que también la ecuación $a_1x+a = b$ tiene solución si $a_1 \neq 0$, son los números reales que se construyen como límites de sucesiones de números fraccionarios. Los números reales incluyen a los fraccionarios. La ecuación anterior es una ecuación de primer grado con una incógnita, que también se puede escribir $a_1x+a_0 = 0$. Nos podemos plantear el problema sobre si una ecuación más general: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ tiene siempre solución cuando los números que aparecen en ella son reales. La respuesta es que no y para obtener respuesta positiva tenemos que construir otro conjunto de números que se llama números complejos y se designa por $\mathcal{C}$.

Hay ejemplos de ecuaciones de segundo grado que no tienen solución real. La ecuación más simple que no tiene solución real es $x^2 + 1 = 0$. La ecuación general de segundo grado, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ tiene la solución $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pero si $b^2-4ac < 0$ no encontramos ningún número real para x.

Lo asombroso es que escribiendo por i un número imaginario que satisfaga $i^2 + 1 = 0$, encontramos números, llamados complejos, que son soluciones de todas las ecuaciones de segundo grado planteadas. Ya que si $b^2 - 4ac < 0$, tenemos $\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$ que tiene un sentido imaginario. Entonces, el conjunto de los números soluciones de todas las ecuaciones de segundo grado que se pueden plantear es el conjunto de los binomios de la forma $\frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ donde el segundo sumando puede ser real o imaginario. Éste es el conjunto de los números complejos en el que $i^2 = -1$ por ser i solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Los representaremos, en general, como $a + bi$, donde a y b son ahora números reales cualesquiera. El conocimiento de las propiedades de las operaciones de los números complejos amplía la cantidad de ecuaciones que podemos resolver. Es muy importante y sorprendente el teorema fundamental del álgebra que afirma que cualquier ecuación de grado n con coeficientes complejos tiene siempre al menos un número complejo como solución.

Haciendo ingeniosas combinaciones con los coeficientes de la ecuación de tercer grado, del Ferro y Tartaglia encontraron la forma general de sus soluciones, que ha pasado a la historia como fórmula de Cardano. La resolución de la ecuación de cuarto grado fué reducida a la solución de la ecuación de tercer grado por Ferrari. Pero el problema es mucho más difícil si el grado de la ecuación es mayor, no estando claro ni siquiera que la ecuación tenga solución. En este sentido, la importancia de los números complejos, de los que hemos hablado en la introdución, y del **Teorema Fundamental del Algebra** demostrado por Gauss estriba en que afirma que **cualquier ecuación de grado n con coeficientes complejos tiene siempre al menos un número complejo como solución**. Este teorema afirma la existencia de la solución pero sigue quedando el problema de cómo encontrarla efectivamente. Durante mucho tiempo, los matemáticos estuvieron buscando una fórmula general para todas las ecuaciones de un cierto grado expresada por raices de expresiones racionales de sus coeficientes, hasta que un matemático llamado Abel demostró que esta forma general expresada por radicales común para todas las ecuaciones de un cierto grado no existía a partir de grado 5. Más tarde, otro matemático llamado Galois encontró las condiciones necesarias y suficientes que han de verificar los coeficientes de la ecuación para que sus soluciones se puedan expresar por radicales. Aún hoy no todas las ecuaciones están resueltas y en eso trabajan los algebristas.

Sin embargo, se puede demostrar y lo demostraremos más adelante que, debido a las propiedades de los números complejos, si los coeficientes de la ecuación son reales las soluciones complejas aparecen por parejas conjugadas de la misma multiplicidad. Y de aquí, que toda ecuación de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una solución real.

El Algebra es el estudio de la resolubilidad de las ecuaciones; en cuanto que las ecuaciones se resuelven haciendo operaciones con los coeficientes que aparecen en ellas, el álgebra es también el estudio de las propiedades de las operaciones que podemos hacer con esos números.

En este capítulo repasaremos algunos resultados de bachillerato, los generalizaremos y además estudiaremos ciertas propiedades de los números complejos que nos servirán para ampliar la cantidad de ecuaciones que sabemos resolver.

Recordemos resultados de Bachillerato sobre las ecuaciones de grado n:
Las soluciones enteras de una ecuación de grado n con coeficientes enteros deben ser divisores del término independiente.

Veamos por qué: Sea $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ una ecuación de grado n donde todos los a_i son enteros y sea a una solución entera de la ecuación. Entonces,

$$a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1a + a_0 = 0 \Longrightarrow a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1a = -a_0,$$

de donde

$$(a_na^{n-1} + a_{n-1}a^{n-2} + \cdots + a_1)a = -a_0;$$

como todos los números del paréntesis son enteros, la última expresión indica que la solución a divide a a_0.

Esta regla nos permite muchas veces encontrar las soluciones enteras de una ecuación de grado n por tanteo, ya que el número de divisores de un número fijado es finito. Y se puede utilizar para ecuaciones con coeficientes fraccionarios, una vez que hemos quitado los denominadores.

En Bachillerato se estudia también la regla de Ruffini, que es un algoritmo para hallar $P_n(a)$ y los coeficientes del polinomio cociente $Q_{n-1}(x)$.
Este algoritmo es un método para obtener el resto $P_n(a) = a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1a + a_0$ resultante de dividir $P_n(x)$ por $x - a$, consistente en lo siguiente:
Se colocan en una fila los coeficientes $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots\ a_1,\ a_0$ y debajo de ésta, a la izquierda el número a y se hace una línea horizontal:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
a) & 0 & a_n a & \cdots & \cdots & a_n a^n + \cdots + a_1 a \\
-- & -- & ----- & --- & ----- & ------- \\
 & a_n & a_n a + a_{n-1} & \cdots & a_n a^{n-1} + \cdots + a_1 & a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0
\end{array}
$$

Se suma 0 a a_n y se pone debajo de la línea horizontal a la altura de a_n; se multiplica por a, se pone $a_n a$ debajo de a_{n-1} al que se suma, obteniéndose debajo de la línea horizontal $a_n a + a_{n-1}$; de nuevo, se multiplica este número por a, se coloca debajo de a_{n-2} y se suman los dos números, obteniéndose $a_n a^2 + a_{n-1} a + a_{n-2}$ debajo de la línea horizontal; se va repitiendo el mismo proceso con las sumas que se van obteniendo debajo de la línea horizontal, teniéndose a la altura de a_1 la suma $a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} + \cdots + a_2 a + a_1$, que multiplicada por a y sumada a a_0 da: $a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 = P_n(a)$. Según lo demostrado anteriormente, este número es cero si y sólo si el polinomio considerado es divisible por $x - a$.

Además, los números obtenidos debajo de la línea horizontal son los coeficientes de los términos de mayor grado de los restos sucesivos obtenidos al hacer la división del polinomio $P_n(x)$ por $x - a$; por ello son los coeficientes de las potencias de x en el polinomio cociente $Q_{n-1}(x)$.

Por ejemplo, la ecuación $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ puede admitir como soluciones los divisores de 24, entre ellos está el 3; para ver si el 3 es efectivamente una solución aplicamos la regla de Ruffini para hallar el resto de la división del polinomio dado por $x - 3$:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 1 & -10 & 35 & -50 & 24 \\
3) & 0 & 3 & -21 & 42 & -24 \\
-- & -- & -- & -- & -- & -- \\
 & 1 & -7 & 14 & -8 & 0
\end{array}
$$

Habiendo salido cero el último número de abajo a la derecha, el resto de dividir el polinomio por $x - 3$ es cero y el cociente es $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. Efectivamente, una solución de la ecuación es 3.

Apliquemos estos conocimientos en los <u>Ejercicios:</u>

1.1.1. Resolver utilizando la regla de Ruffini las ecuaciones:

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0. \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

1.1.2. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0. \quad x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 = 0.$$

La regla de Ruffini se puede generalizar a soluciones fraccionarias:

Regla de Ruffini para soluciones fraccionarias.

Se puede generalizar a las soluciones fraccionarias el resultado 1) demostrado para las soluciones enteras de una ecuación de grado n con coeficientes enteros, encontrándose que **3) si un número racional M/N irreducible es solución de la ecuación de grado n con coeficientes enteros, M debe ser divisor del término independiente y N debe ser divisor del coeficiente del término de mayor grado.**

Demostración: Sustituyendo la solución M/N en la ecuación dada tenemos:

$$a_n(\frac{M}{N})^n + a_{n-1}(\frac{M}{N})^{n-1} + \cdots + a_1\frac{M}{N} + a_0 = 0 \equiv$$

$$\equiv a_n\frac{M^n}{N^n} + a_{n-1}\frac{M^{n-1}}{N^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{M}{N} + a_0 = 0$$

donde quitando denominadores y sacando factor común tenemos

$$a_nM^n + a_{n-1}M^{n-1}N + \cdots + a_1MN^{n-1} = -a_0N^n \equiv$$

$$\equiv M(a_nM^{n-1} + a_{n-1}M^{n-2}N + \cdots + a_1N^{n-1}) = -a_0N^n.$$

Como todos los números son enteros y M no tiene factor común con N, se llega a que M divide a a_0.

También tenemos:

$$-a_nM^n = a_{n-1}M^{n-1}N + \cdots + a_1MN^{n-1} + a_0N^n \equiv$$

$$\equiv -a_nM^n = N(a_{n-1}M^{n-1} + \cdots + a_1MN^{n-2} + a_0N^{n-1})$$

donde, debido a que todos los números son enteros y a que N no tiene ningún factor cómún con M, se llega a que N divide a a_n.

La regla de Ruffini también se puede utilizar con las raices fraccionarias.

Conviene practicar esta generalización en los Ejercicios:

1.2.1. Resolver las ecuaciones:

$$a)\ 6x^2 - 5x + 1 = 0.$$
$$b)\ 12x^3 - 40x^2 + 27x - 5 = 0.$$
$$c)\ 24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0.$$
$$d)\ 12x^3 - 32x^2 + 25x - 6 = 0.$$
$$e)\ 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Números Complejos.

Veremos ahora los Números Complejos, cuyo conocimiento nos permitirá la resolución de más ecuaciones:

Se llama expresión binómica de un número complejo a la forma $a + ib$, donde a y b son números reales, en la cual a es la parte real y b es la parte imaginaria. El conjugado de un número complejo $z = a + ib$ es $\overline{z} = a - ib$.

Los números complejos se pueden sumar como binomios:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

y pueden comprobarse fácilmente, utilizando las propiedades de los números reales, (lo cual se recomienda como ejercicio), las propiedades de la suma:

a) Asociativa.

b) Tiene elemento neutro: 0+i0 (un elemento que sumado a cualquier otro lo deja igual).

c) Todo número complejo tiene elemento opuesto respecto a la suma: (el elemento opuesto de uno dado es el elemento que sumado con él da el elemento neutro).

d) Conmutativa.

La existencia de la suma con las propiedades antes enumeradas se resume en una frase: *Los números complejos son un grupo aditivo conmutativo.*

Los números complejos también se pueden multiplicar como binomios donde $i^2 = -1$.

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

y puede comprobarse, también utilizando las propiedades de los números reales, que el producto es:

a) Asociativo.

b) Tiene elemento neutro (1=1+0i).

c) Todo elemento distinto del cero tiene elemento inverso.

d) Es conmutativo.

La existencia del producto con las propiedades antes enumeradas se resume en la frase: *Los números complejos distintos de cero son un grupo multiplicativo conmutativo.*

De las propiedades anteriores, sólo voy a comprobar aquí que todo número complejo distinto de cero tiene inverso.

Inverso de un número complejo.

Si buscamos el inverso $x+iy$ de un número complejo $a+ib$, buscamos un número tal que

$(a+ib)(x+iy)=1$ es decir, un número tal que $(ax-by)+i(ay+bx)=1$.

Si el número fuera real: $z=a$, de $a^{-1}a=1$ tenemos que $z^{-1}=a^{-1}$. Si el número fuera imaginario puro: $z=ib$, de $-ib^{-1}ib=1$ tenemos que $z^{-1}=-ib^{-1}$.

Podemos suponer en lo que sigue que el número no es real ni imaginario puro, es decir, que $a\neq 0\neq b$.

Como dos números complejos son iguales cuando tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{rr} ax-by= & 1 \\ bx+ay= & 0 \end{array}\right\} \equiv (si\ a\neq 0,\quad b\neq 0)\ \left.\begin{array}{rr} a^2x-aby= & a \\ b^2x+aby= & 0 \end{array}\right\}$$

de donde $(a^2+b^2)x=a$. Aquí podemos despejar x por ser $a^2+b^2\neq 0$, ya que estamos suponiendo $a\neq 0,\quad b\neq 0$. Entonces $x=a/(a^2+b^2)$.

También, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{rr} abx-b^2y= & b \\ abx+a^2y= & 0 \end{array}\right\}$$

de donde $(a^2+b^2)y=-b$, de donde despejando: $y=-b/(a^2+b^2)$.

Hemos obtenido que el inverso de $a+ib$, es $\frac{1}{(a^2+b^2)}(a-ib)$, siempre que $a+bi$ sea distinto de cero. Compruébese que esta fórmula es válida para los casos particulares hallados al principio, en los que el número era real o era imaginario puro.

Para dividir z_1 por z_2 (si $z_2\neq 0$) multiplicamos z_1 por el inverso de z_2.

Por un procedimiento similar de igualar partes real e imaginaria podemos hallar, dado un número complejo $c+di$ otro número complejo $a+bi$

que elevado al cuadrado dé $c + di$. Con ello, podemos resolver todas las ecuaciones bicuadradas en el conjunto de los números complejos.

e) Además el producto es distributivo respecto a la suma (debe comprobarse).

La existencia de la suma y del producto con las propiedades antes enumeradas se expresa en otra frase: *Los números complejos son un cuerpo conmutativo.*

Otros cuerpos ya conocidos son los conjuntos de los números racionales y de los números reales.

Ahora se puede comprobar como Ejercicios:

1.3.1. Comprobar que, en el cuerpo de los números complejos, tienen tantas soluciones como su grado, las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - x + 1 = 0.$$
$$x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0.$$
$$2x^3 + 4x^2 - 3x + 9 = 0.$$

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0.$$

$$x^6 + 4x^4 + 5x^2 + 2 = 0.$$
$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0.$$

$$x^4 + x^3 - x - 1 = 0.$$
$$6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$
$$6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0.$$
$$x^5 + x^4 - x - 1 = 0.$$

$$6x^4 + x^3 + 11x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$12x^4 + x^3 + 11x^2 + x - 1 = 0$$
$$6x^4 - 11x^3 + 10x^2 - 11x + 4 = 0$$
$$4x^4 + 4x^3 - 11x^2 + 4x - 15 = 0$$
$$4x^4 + 16x^3 + 31x^2 + 64x + 60 = 0$$

1.3.2. Factorizar los polinomios igualados a cero en las ecuaciones anteriores y en las siguientes:

$$x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2 = 0.$$
$$6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$$

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0.$$
$$x^7 + x^6 + 6x^5 + 6x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Observar que algunos polinomios no son totalmente factorizables en binomios de grado 1 con coeficientes reales. Cuando se admiten los coeficientes complejos, o bien hay tantos factores como el grado de la ecuación, o bien llamando al número de veces que se repite un factor, multiplicidad de ese factor, la suma de las multiplicidades de los factores de primer grado es igual al grado de la ecuación.

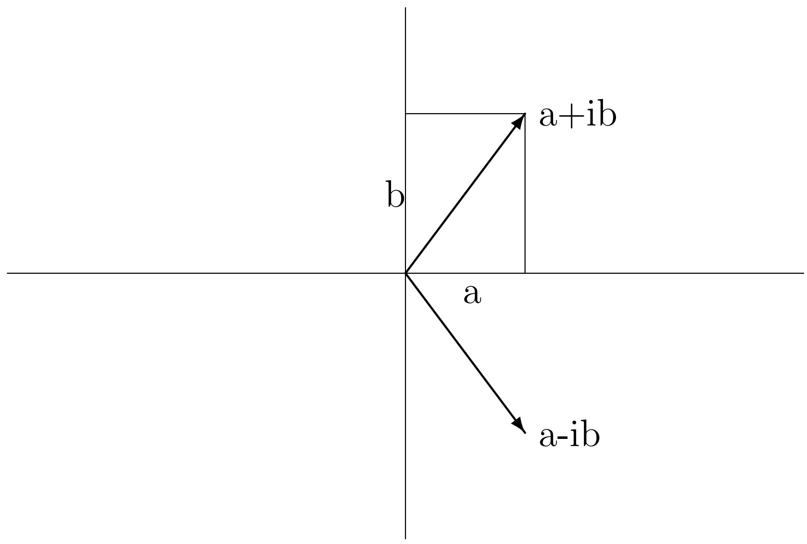
1.3.3. Demostrar que en un cuerpo, se tiene $b \cdot 0 = 0$, para todo b.

1.3.4. Demostrar que en un cuerpo, si $a \neq 0$, $ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

1.3.5. Probar que en un conjunto de números que sea un cuerpo, la ecuación $a_1 x + a = 0$ tiene solución única si $a_1 \neq 0$. No tiene solución si $a_1 = 0$ y $a \neq 0$. Tiene infinitas soluciones si $a_1 = 0 = a$.

Recordemos que se llama **conjugado del número complejo** $z = a+ib$ al número $a-ib$ que se representa por $\overline{z} = a-ib$. Utilizando la notación de conjugado de un número complejo, hemos obtenido anteriormente respecto a su inverso que: $z^{-1} = \frac{1}{(a^2+b^2)}\overline{z}$.

Se puede representar el número complejo $a+ib$ como el punto del plano que tiene coordenadas cartesiamas (a, b). Entonces, el punto correspondiente al conjugado de un número complejo es el punto simétrico respecto al eje OX.



Por el teorema de Pitágoras, el número $a^2 + b^2$ es el cuadrado de la longitud del vector con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto. Esta longitud se llama módulo del número complejo y se representa por $|z|$. Entonces, podemos escribir: $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$. De donde se deduce también $|z|^2 = z\overline{z}$.

Para hacer operaciones con los números complejos se proponen los Ejercicios:

1.4.1. Hallar los siguientes números complejos en forma binómica:

$$(1+2i)(1-2i), \quad \frac{1+2i}{1-2i}, \quad (\frac{1+2i}{1-2i})^2, \frac{(1+2i)^3}{(2-i)^3}, \quad \frac{(1+2i)^3}{(2-2i)^3}.$$

1.4.2. Hallar un número complejo en forma binómica: $a + bi$ tal que $(a+bi)^2 = 1+i$.

1.4.3. Resolver la ecuación $x^4 - 2x^2 + 10 = 0$ en el cuerpo de los números complejos.

1.4.4. Resolver la ecuación $z^2 - (1+i)z + i = 0$ en el cuerpo de los números complejos.

1.4.5. Demostrar
a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
1.4.6. Demostrar:
a) $|\overline{z}| = |z|$
b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$
c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Propiedades de las soluciones de las ecuaciones.

A)

Utilizando el ejercicio 1.4.5. anterior se obtiene que **las soluciones complejas de una ecuación con coeficientes reales aparecen por parejas conjugadas:**

Sea $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ una ecuación de grado n donde todos los a_i son reales y sea z una solución compleja de la ecuación. Entonces,

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = 0 \Longrightarrow$$
$$\overline{a}_n\overline{z^n}+\overline{a}_{n-1}\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a}_1\overline{z}+\overline{a_0} = 0 \Longrightarrow a_n\overline{z}^n+a_{n-1}\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{z}+a_0 = 0$$

donde se ve que también $\overline{z}$ es solución de la ecuación.

B)

El número a es solución de la ecuación: $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 = 0$, si y sólo si el binomio $x-a$ divide al polinomio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. En efecto, llamando $P_n(x)$ a este polinomio y dividéndolo por $x-a$ obtendríamos:

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x-a) + R(x)$$

pero $R(x) = R$ es un número por ser el grado del resto menor que el grado del divisor. Sustituyendo ahora el valor a en la expresión de la división, tenemos:

$$P_n(a) = Q_{n-1}(a)(a-a) + R = R$$

lo que nos dice que el resto de esta división es cero si y sólo si a es solución de la ecuación dada, teniéndose así que el polimomio $P_n(x)$ es divisible por $x-a$ si y sólo si a es solución de la ecuación $P_n(x) = 0$. Con lo que conocida una solución de una ecuación, esta queda reducida a otra de grado menor, presumiblemente más fácil ($Q_{n-1}(x) = 0$).

No podemos demostrar ahora con los conocimientos que tenemos el teorema fundamental del álgebra, pero sí podemos ver consecuencias suyas:

C)

Todo polinomio con coeficientes complejos puede factorizarse en binomios de primer grado con coeficientes complejos.

En efecto, dado un polinomio $P_n(x)$, con coeficientes complejos, al tener la ecuación $P_n(x) = 0$ siempre solución en los números complejos por el teorema fundamental del álgebra, existe z_1, tal que $P_n(x) = (x-z_1)Q_{n-1}(x)$, donde el grado del cociente $Q_{n-1}(x)$ es $n-1$. Este nuevo polinomio cociente puede factorizarse igualmente por el teorema fundamental del álgebra, obteniéndose $P_n(x) = (x - z_1)(x - z_2)Q_{n-2}(x)$. El grado del polinomio cociente puede seguir siendo rebajado hasta 1, en cuyo momento, habremos factorizado el polinomio dado en n binomios de primer grado, algunos de los cuales se pueden repetir.

Observando que los binomios de primer grado que factorizan un polinomio se pueden repetir y llamando multiplicidad de cada raiz z_i al exponente de $x - z_i$ en la factorización de $P_n(x)$, vemos que la suma de las multiplicidades de las soluciones reales y complejas de una ecuación de grado n con coeficientes complejos es igual al grado de la ecuación.

También se define la multiplicidad de una raiz z_i de un polinomio $P_n(x)$ como el número n_i tal que $P_n(x) = (x - z_i)^{n_i} Q_i(x)$ donde $Q_i(z_i) \neq 0$.

D)

Si la ecuación es de grado impar con coeficientes reales, alguna solución ha de ser real.

Veamos primero que las raices complejas no reales de un polinomio con coeficientes reales, aparecen con la misma multiplicidad que sus conjugadas:

Si $P_n(x) = 0$ es una ecuación con coeficientes reales y z_1 y $\overline{z}_1$ son dos soluciones conjugadas, siendo $z_1 = a + ib$; al ser $P_n(x) = (x - z_1)Q_{n-1}(x)$ se tiene:

$$0 = P_n(\overline{z_1}) = (\overline{z_1} - z_1)Q_{n-1}(\overline{z_1}) = -2biQ_{n-1}(\overline{z_1})$$

donde $b \neq 0$, por lo que $Q_{n-1}(\overline{z_1}) = 0$, siendo $Q_{n-1}(x)$ divisible por $x - \overline{z_1}$; entonces,

$$P_n(x) = (x - z_1)(x - \overline{z_1})Q_{n-2}(x) =$$
$$= (x - (a + bi))(x - (a - bi))Q_{n-2}(x) = [(x - a)^2 + b^2]Q_{n-2}(x)$$

El polinomio $Q_{n-2}(x)$ debe tener todos sus coeficientes reales, porque $P_n(x)$ y $(x - a)^2 + b^2$ los tienen reales, por ello, si $Q_{n-2}(x)$ tiene una raiz compleja no real también tiene a su conjugada. Lo mismo ocurrre con los sucesivos cocientes de $Q_{n-2k}(x)$por $(x - z_1)(x - \overline{z}_1)$, de ser divisibles por $x - z_1$, por ello la raiz $\overline{z}_1$ aparece tantas veces como la raiz z_1.

Entonces, si todas las raices del polinomio, de grado impar, fueran complejas no reales, la suma de sus multiplicidades sería par, no coincidiendo con su grado, por tanto, tiene que haber al menos una solución real.

E)

Si un polinomio de grado n se anula para más de n valores distintos el polinomio es el polinomio nulo, (todos los a_i son nulos). (De donde si el polinomio no es nulo y es de grado n, no se puede anular para más de n valores de la variable).

En efecto, cogiendo n valores distintos $\{x_i\}_{i\in\{1\dots n\}}$ que anulen al polinomio, por ser $P_n(x_1)=0$, $P_n(x)$ es divisible por $x-x_1$, es decir, $P_n(x)=Q_{n-1}(x)(x-x_1)$. Si $x_2\neq x_1$ anula al polinomio, $P_n(x_2)=0$ implica que $Q_{n-1}(x_2)(x_2-x_1)=0$, lo cual a su vez implica que $Q_{n-1}(x_2)=0$, por lo que $Q_{n-1}(x)=Q_{n-2}(x)(x-x_2)$, y $P_n(x)=Q_{n-2}(x)(x-x_2)(x-x_1)$. Repitiendo el mismo procedimiento con n raices distintas, llegamos a que podemos expresar:

$$P_n(x)=Q_0(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_2)(x-x_1)$$

donde Q_0 es un número, que debe ser igual a a_n. Cogiendo un valor más: (x_{n+1}), que anule al polinomio, suponiendo que existe, tenemos:

$$0=P_n(x_{n+1})=a_n(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_{n-1})\cdots(x_{n+1}-x_1)$$

donde por estar en un cuerpo y ser todos los paréntesis distintos de cero, ha de ser $a_n=0$. Por la misma razón, $a_{n-1}=0$ y así sucesivamente hasta el a_0. (Un polinomio igual a una constante se anula para algún valor de x sólo si esta constante es cero).

F)

Con un razonamiento análogo se puede demostrar que encontradas k raices de un polinomio, cuya suma de multiplicidades es igual al grado del polinomio, no puede haber otra raiz más.

En efecto, una vez escrito:

$$P_n(x)=(x-z_1)^{n_1}(x-z_2)^{n_2}\cdots(x-z_k)^{n_k}a_n \quad donde \quad \Sigma n_i=n, \quad y \quad a_n\neq 0$$

si hubiera otra solución más: z_{n+1}, se tendría:

$$0=P_n(z_{n+1})=(z_{n+1}-z_1)^{n_1}(z_{n+1}-z_2)^{n_2}\cdots(z_{n+1}-z_k)^{n_k}a_n$$

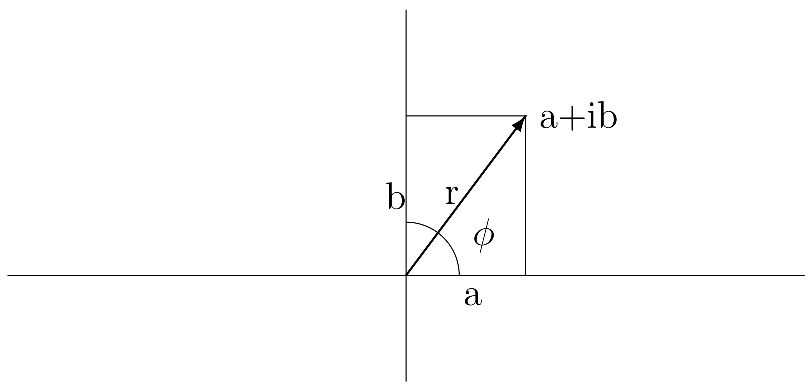
Por ser los números complejos un cuerpo, el producto de una serie de factores es cero si y sólo si alguno de los factores es cero, por lo que z_{n+1} debe coincidir con alguno de los z_i anteriores.

Forma trigonométrica y forma polar de un número complejo.

La forma binómica de los números complejos es adecuada para la suma, pero para la multiplicación hay otra forma más adecuada que es la forma polar.

Además, para expresar de formas análogas entre sí las soluciones de la ecuación $x^n - 1 = 0 \equiv x^n = 1$ vamos a utilizar la forma trigonométrica y la forma polar de un número complejo.

Ya hemos dicho que los números complejos se pueden poner en correspondencia con los puntos del plano. Para ello, trazamos en el plano dos rectas perpendiculares, una horizontal y la otra vertical, llamamos O (origen) al punto intersección de las dos rectas e introducimos una unidad de medida. Entonces al número complejo $a + ib$ puede asociarse el punto P que está a distancia "a" unidades de medida del eje vertical y "b" unidades de medida del eje horizontal. Al mismo tiempo podemos dibujar un vector con origen O y extremo P. Por el teorema de Pitágoras la longitud de este vector coincide con el módulo del número complejo. El vector está perfectamente determinado también por su longitud y por el ángulo que hace con la dirección positiva de uno de los ejes; vamos a escoger el eje horizontal y al ángulo que forma el vector con este eje le llamamos argumento del módulo complejo. Hemos llegado a otra determinación de un número complejo por su módulo y su argumento que da lugar a la forma trigonométrica y a la forma polar.



La forma polar del número complejo $a + ib$ es el símbolo $\underline{re^{i\phi}}$ donde r es el módulo y ϕ es el argumento del número complejo. (El módulo r es siempre positivo).

Es de observar que cuando $r = 0$, cualquiera que sea ϕ, el número es el cero. Y que $re^{i\phi} = re^{i(\phi+2\pi)}$, es decir, todos los números complejos con el mismo r y argumentos diferenciándose en un múltiplo de 2π coinciden.

Dado que $a = rcos\phi$ y $b = rsen\phi$, el número complejo es también $a+ib = r(cos\phi + isen\phi)$, siendo ésta la forma trigonométrica del número complejo. Se ve que $tan\phi = b/a$. La forma trigonométrica y la forma polar dan la relación $e^{i\phi} = (cos\phi + isen\phi)$.

Otros ejercicios para la familiarización con estas formas son:

1.5.1. De los números complejos enunciados a continuación calcular su módulo y su argumento y escribirlos en forma trigonométrica y en forma polar.

$$1+i, \quad 1-i, \quad -1-i, \quad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

1.5.2. Comprobar que cualquier número complejo tiene el mismo módulo que su conjugado y que su opuesto. ¿Cúal es la relación entre los argumentos de un número complejo, su conjugado y su opuesto?

1.5.3. Suponiendo conocidos el módulo y el argumento de un número complejo, hallar el módulo y el argumento de su inverso.

Las formas trigonométrica y polar nos pasan de la naturaleza puramente algebraica de los números complejos a su representación geométrica, lo cual va a revertir en el descubrimiento de más propiedades de dichos números.

Por ejemplo, la expresión de la multiplicación de números complejos se simplifica:

Sean $z_1 = r_1e^{i\phi_1} = r_1(cos\phi_1 + isen\phi_1)$ y $z_2 = r_2e^{i\phi_2} = r_2(cos\phi_2 + isen\phi_2)$ y multipliquémoslos según la regla que tenemos para multiplicarlos en forma binómica:

$$r_1e^{i\phi_1}r_2e^{i\phi_2} = z_1z_2 = r_1(cos\phi_1 + isen\phi_1)\cdot r_2(cos\phi_2 + isen\phi_2) =$$

$$(r_1cos\phi_1r_2cos\phi_2 - r_1sen\phi_1r_2sen\phi_2) + i(r_1cos\phi_1r_2sen\phi_2 + r_1sen\phi_1r_2cos\phi_2) =$$

$$r_1r_2(cos\phi_1cos\phi_2 - sen\phi_1sen\phi_2) + ir_1r_2(cos\phi_1sen\phi_2 + sen\phi_1cos\phi_2) =$$

$$= r_1r_2(cos(\phi_1+\phi_2) + isen(\phi_1+\phi_2)) = r_1r_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

Donde vemos que la multiplicación de números complejos dados en forma polar o trigonométrica se hace multiplicando sus módulos y sumando sus argumentos. Debido a ello, la asociatividad del producto se demuestra mucho más fácilmente utilizando la forma polar.

Otros ejercicios son:

1.6.1. Demostrar utilizando la forma binómica y la forma polar de los números complejos que:

a) El producto de un número por su conjugado es un número real.

b) El cociente de un número por su conjugado es de módulo 1.

Observar que la demostración usando la forma polar es más corta.

c) Comprobar los resultados anteriores en los cálculos siguientes:

$$(1+2i)(1-2i), \quad \frac{3+4i}{3-4i},$$

d) Utilizar los resultados anteriores para calcular:

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}), \quad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

1.6.2. Probar la asociatividad de la multiplicación de números complejos usando su expresión en forma polar y comparar la simplicidad del cálculo respecto del que hay que hacer para demostrarla en forma binómica.

La potenciación sale también beneficiada de esta forma simple de multiplicar en forma polar. Según lo visto:

$$z^n = (re^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi} = r^n(cos(n\phi) + isen(n\phi))$$

de donde se obtiene la fórmula de Moivre:

$$cos(n\phi) + isen(n\phi) = (cos\phi + isen\phi)^n$$

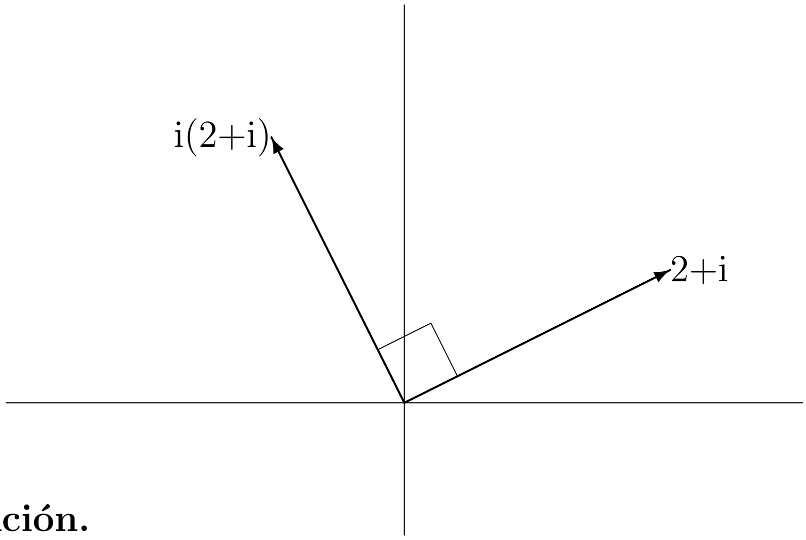
en la que desarrollando el ssegundo miembro por el binomio de Newton y separando partes reales e imaginarias tenemos expresiones para $cos(n\phi)$ y $sen(n\phi)$ en función de $cos\phi$ y $sen\phi$.

Otra repercusión geométrica de la forma polar de un número complejo se pone de manifiesto si observamos lo que ocurre al multiplicar número de módulo 1 por otro número complejo dado:

$$e^{i\phi} \cdot re^{i\alpha} = re^{i(\phi+\alpha)}$$

Vemos que el resultado es un número complejo del mismo módulo resultante de girar el número complejo dado un ángulo ϕ.

Por tanto,
la operación geométrica giro se expresa algebraicamente como una multiplicación por un número complejo de módulo 1.



Radicación.

La extracción de raices también se hace mucho más fácilmente cuando los números vienen dados en forma polar.

Extraer las raices n-ésimas de un número complejo z es hallar los números x tales que $x^n = z$, es decir, resolver la ecuación $x^n - z = 0$. Si z es real, esta ecuación, por ser de coeficientes reales, tiene las raices complejas por parejas conjugadas, es decir, las raices complejas de un número real aparecen por parejas conjugadas.

Las soluciones de la ecuación $x^n - z = 0$ $(z \neq 0)$ tienen multiplicidad 1: vamos a ver que no pueden tener multilicidad mayor o igual que 2:

Si z_1 fuera una solución de multiplicidad n, se podría escribir $x^n - z = (x - z_1)^2 Q_{n-2}(x)$, entonces, derivando, tendríamos $nx^{n-1} = 2(x - z_1)Q_{n-2}(x) + (x - z_1)^2 Q'_{n-2}(x)$, que al sustituir x por z_1, da $nz_1^{n-1} = 0$, imposible si $n > 1$.

Al ser cada raiz de multiplicidad 1, debe haber n raices distintas.

Veamos cómo se obtienen:

Dado $z = |z|e^{i\alpha}$, un número complejo x es raiz n-ésima de z si $x^n = z$, es decir, escribiendo $x = re^{i\phi}$ en forma polar, si $r^n e^{in\phi} = |z|e^{i\alpha}$, pero también si $r^n e^{in\phi} = |z|e^{i(\alpha+2\pi)}$ ó $r^n e^{in\phi} = |z|e^{i(\alpha+k2\pi)}$, cualquiera que sea k, para lo cuál es suficiente que $r^n = |z|$ y $n\phi = \alpha + k2\pi$, cualquiera que sea k.

La condición $r^n = |z|$ siempre tiene solución porque $|z|$ es positivo pero puede tener dos soluciones reales para r si n es par, de las cuales sólo cogemos la positiva porque el módulo es siempre positivo. Pero lo más importante es que debido a la no unicidad de la expresión polar de un número complejo, cuando k varía, tenemos distintas posibilidades para ϕ de la condición $n\phi = \alpha + k2\pi$. Lo que nos da para ϕ las soluciones:

$$\begin{cases} \phi_0 = & \frac{\alpha}{n} \\ \phi_1 = & \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} \\ \phi_2 = & \frac{\alpha}{n} + \quad 2\frac{2\pi}{n} \\ \phi_3 = & \frac{\alpha}{n} + 3\frac{2\pi}{n} \\ \dots & \dots \\ \phi_{n-1} = & \frac{\alpha}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

$$\phi_n = \frac{\alpha}{n} + n\frac{2\pi}{n} \equiv \frac{\alpha}{n}$$

Para el valor de $r = +\sqrt[n]{|z|}$ hay n posibles argumentos, (ya que ϕ_n es equivalente a ϕ_0), por lo que hay n raices complejas de cada número complejo dado.

Las raices n-ésimas del número complejo 1 tienen módulo 1 y argumentos $k2\pi/n$, donde k varía de cero a $n-1$. El conjunto de estos n números con la operación multiplicación es un ejemplo de grupo multiplicativo finito. Sus puntos correspondientes determinan un polígono regular de n lados con un vértice en el punto (1,0). Cada raiz determina también un giro del plano de ángulo $k2\pi/n$ Estos giros del plano dejan invariante cualquier polígono regular de n lados con centro en el origen. Dos de estos giros se pueden realizar sucesivamente, lo cual da un giro que se llama composición de los dos giros. La operación composición de giros corresponde a la multiplicación de los números complejos que los representan. Por ello, el conjunto de los giros que dejan invariante un polígono regular con centro en el origen es un grupo multiplicativo finito.

Se proponen los siguientes <u>Ejercicios:</u> donde se pide hacer los cálculos en forma polar.

1.7.1. Calcular en forma polar y en forma binómica los siguientes números complejos:

$$\sqrt{-4}, \quad \sqrt{i}, \quad \sqrt{-i}, \quad .$$

Comprobar que los resultados son los mismos.

1.7.2. Calcular en forma binómica y en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

$$\sqrt{1+i}, \quad \sqrt{-2+2i}$$

Comparando las expresiones determinar el valor de $cos(\pi/8)$ y $cos(3\pi/8)$. Comprobar que $cos^2(\pi/8)+cos^2(3\pi/8)=1$. ¿Por qué?

1.7.3. Expresar las siguientes raices en forma binómica utilizando la forma trigonométrica corres-pondiente y el ejercicio anterior.

$$\sqrt[4]{-16}, \ \sqrt[3]{-8}, \ \sqrt[3]{-27i}, \quad \sqrt[4]{16i}.$$

1.7.4. Hallar las raices cuartas de $-i$ y representarlas gráficamente.

1.7.5. Hallar las raices quintas de la unidad. Señalar cuáles son las raices que son conjugadas entre sí.

1.7.6. Hallar las siguientes raices:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}, \ \sqrt[6]{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

¿Cómo están relacionadas entre sí?

1.7.7. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

$$x^6+1=0,$$
$$x^6+2x^3+1=0,$$
$$x^6+x^3+1=0,$$
$$x^6+2x^4+2x^2+1=0,$$
$$3x^7+x^6+6x^4+2x^3+6x+2=0.$$
$$2x^7-x^6+4x^4+2x^3+2x-1=0$$
$$2x^7+x^6+4x^4+2x^3+2x+1=0$$
$$4x^8-x^6-8x^5+2x^3+4x^2-1=0$$
$$2x^5+x^4-2x^3-x^2+2x+1=0$$

Comprobar que la suma de las multiplicidades de las soluciones complejas (entre ellas las reales) de cada ecuación es igual a su grado.

1.7.8. Habiendo comprobado que $(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)(x-1)=x^n-1$, demostrar que

a) La ecuación $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ no tiene ninguna solución real.

b) La ecuación $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ no tiene ninguna solución real si n es par y tiene exactamente una solución real si n es impar. ¿Cuál es la solución real si n es impar?

c) Las raices $(n+1)-\acute{e}simas$ de la unidad que no coinciden con 1, son soluciones de la ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$.

1.7.9. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

$$x^6 + x^5 - x - 1 = 0,$$
$$x^7 + x^6 - x - 1 = 0,$$
$$2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0,$$
$$6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Comprobar que la suma de las multiplicidades de las soluciones complejas (entre ellas las reales) de cada ecuación es igual a su grado.

1.7.10. Deducir de la fómula de Moivre

a) Las fórmulas del coseno del ángulo triple y del seno del ángulo triple.

b) Las fórmulas análogas para el ángulo quíntuple.

1.7.11. Hallar $cos(\pi/12)$ calculando la raiz de $e^{i\pi/6}$ utilizando las formas binómica, trigonométrica y polar de los números complejos y comparando los resultados.

1.7.12. Comprobar que las raices de orden n de la unidad y por ello los giros que dejan invariante un polígono regular de n lados con centro en el origen y un vértice en 1, son un grupo multiplicativo conmutativo.

Otros ejemplos y problemas se pueden encontrar en el capítulo 1 del libro [A], en el apéndice A2 de [G] en el capítulo 20 de [S].

Soluciones de 1.2.1: a) 1/2,1/3, b) 1/2,1/3,5/2, c) 1/2,1/3,1/4, d) 1/2, 2/3,3/2. e) 1/2,1/3,−1(doble).

Soluciones de las cinco últimas ecuaciones de 1.3.1: $-1/2, 1/3, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$; $-1/3, 1/4, i, -i$; $1/2, 4/3, i, -i$; $3/2, -5/2, i, -i$; $-3/2, -5/2, 2i, -2i$.

PROBLEMAS RESUELTOS DE LOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE ÁLGEBRA LINEAL I.

1. Resolver en el cuerpo de los números complejos la ecuación:

$$6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0$$

Solución:

Como 2 divide a 6 se puede ver por la regla de Ruffini si $1/2$ es raiz del polinomio, y comprobado que sí es, queda como cociente del polinomio dado por $(x - 1/2)$: $6x^5 + 8x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 8x + 2$.

También 3 divide a 6 (coeficiente del término de mayor grado del cociente del polinomio dado por $(x - 1/2)$). Se puede comprobar por la regla de Ruffini que $-1/3$ es raiz del cociente y que el nuevo cociente al dividirlo otra vez por $(x + 1/3)$ es:

$$6x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 6 = 6(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

.

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son $1/2$, $-1/3$ y las raices de $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

Multiplicando éste polinomio por $x - 1$ se obtiene $x^5 - 1$ cuyas raices son las soluciones de la ecuación $x^5 = 1$, que son las cinco raices de la unidad en el cuerpo de los números complejos. La raiz real $x = 1$ de este polinomio es distinta de las otras cuatro, pero corresponde al factor $x - 1$ que hemos introducido al multiplicar por $(x - 1)$, por tanto no es raiz de $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Las otras cuatro raices son:

$$e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

Obsérvese que son 6, igual al grado del polinomio.

2. Encontrar las soluciones reales y complejas de la ecuación

$$3x^7 + x^6 + 6x^4 + 2x^3 + 6x + 2 = 0$$

Solución:

Se puede probar por la regla de Ruffini que $-1/3$ es raiz del polinomio primer miembro de la ecuación dada y que su cociente por $x + 1/3$ es

$$3x^6 + 6x^3 + 6 = 3(x^6 + 2x^3 + 2) = 3((x^3)^2 + 2x^3 + 2) = 0.$$

Entonces, las soluciones de la ecuación dada son $\frac{-1}{3}$ además de las raices del polinomio

$$(x^3)^2 + 2x^3 + 2.$$

La ecuación $(x^3)^2 + 2x^3 + 2 = 0$ es también $y^2 + 2y + 2 = 0$, donde $y = x^3$.

Las soluciones de esta última ecuación se pueden hallar por la fórmula de la ecuación de segundo grado y se obtiene:

$$y_1 = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi},\ y_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

Por tanto, las soluciones que se obtienen para x son:
De $x^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$,

$$x_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3}{12}\pi} \quad x_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{11}{12}\pi} \quad x_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{19}{12}\pi}$$

y de
$x^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$,

$$x_4 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5}{12}\pi} \quad x_5 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{13}{12}\pi} \quad x_6 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{21}{12}\pi}$$

además de $\frac{-1}{3}$.

3. Demostrar:

a) Si un polinomio con coeficientes reales tiene una raiz compleja z, también el número conjugado $\overline{z}$ es raiz del polinomio. Además, la multiplicidad de z como raiz del polinomomio es igual a la multiplicidad de $\overline{z}$.

b) Si z es una raiz del polinomio $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \Sigma_{i=0}^{n} x^i$ el número inverso de z es también raiz del polinomio con la misma multiplicidad que z.

Solución:

a) El número z es raiz de un polinomio si se obtiene cero al sustituirlo en la expresión del polinomio. Si sustituimos $\overline{z}$ en la expresión del polinomio dado obtenemos el número complejo conjugado del obtenido al sustituir z, por ser reales los coeficientes del polinomio, pero como era cero, por ser z raiz del polinomio, sigue siendo cero, por lo que $\overline{z}$ es también raiz del polinomio.

La multiplicidad de la raiz z coincide con el número de veces que $x-z$ aparece en la factorización del polinomio. Si z es raiz del polinomio, este es divisible por $x-z$ y por lo anterior, también lo es por $x-\overline{z}$. Entonces, el polinomio dado es divisible por el producto $(x-z)(x-\overline{z})$, que es otro polinomio de grado 2 con coeficientes reales, por el que es divisible el polinomio dado.

El cociente del polinomio dado por el polinomio $(x-z)(x-\overline{z})$ es otro polinomio con coeficientes reales en el que si otro z aparece como raiz, también aparece como raiz otro $\overline{z}$. Con lo cual se tiene que $\overline{z}$ aparece como raiz tantas veces como aparece z siendo iguales sus multiplicidades.

b) Si z es una raiz del polinomio $1+x+x^2+\cdots+x^n=\Sigma_{i=0}^{n}x^i$, es también raiz del polinomio

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)(x-1)=(\Sigma_{i=0}^{n}x^i)(x-1)=x^{n+1}-1$$

y por tanto solución de la ecuación $x^{n+1}=1$, cuyas raices son todas de módulo 1 en el cuerpo de los números complejos. Esto implica que todas las raices del polinomio considerado son de módulo 1 y por ello sus inversas coinciden con sus conjugadas.

Por el apartado a) y por lo anterior, las inversas de las raices del polinomio, también son sus raices.

4. Utilizando la aritmética de los números complejos en forma polar y en forma binómica, calcular $cos\frac{\pi}{8}$.

Solución:

Como $cos\frac{\pi}{8}+isen\frac{\pi}{8}=e^{i\frac{\pi}{8}}$, y $(e^{i\frac{\pi}{8}})^2=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos:

$$(cos\frac{\pi}{8}+isen\frac{\pi}{8})^2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Llamando $a = cos\frac{\pi}{8}$, $\;b = sen\frac{\pi}{8}$ por comodidad, se tiene

$$(a+ib)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{ll} a^2 - b^2 & = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab & = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$$

lo que implica

$$b = \frac{\sqrt{2}}{4a} \;\text{ y por tanto }\; a^2 - \frac{2}{16a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

lo que da las siguientes implicaciones:

$$a^2 - \frac{1}{8a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow 8a^4 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}8a^2 = 4a^2\sqrt{2} \Longrightarrow 8a^4 - 4\sqrt{2}a^2 - 1 = 0.$$

Ecuación bicuadrada con solución $a^2 = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$, de donde $cos\frac{\pi}{8}$ es la raiz positiva del número $\frac{\sqrt{2}+2}{4}$ ya que el ángulo $\pi/8$ está en el primer cuadrante.

$$cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

Referencias.

[A1]. Algebra Lineal y aplicaciones. Jorge Arvesú Carballo, Renato Alvarez Nodarse, Francisco Marcellán Español. Ed. Síntesis 1999.

[A2] La Matemática: su contenido, métodos y significado. A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentief y otros. Ed. Alianza Universidad. 1981.

[D]. El Universo de las Matemáticas. Willian Dunham. Ed. Pirámide. 1994.

[G1] Matemáticas 1 Bachillerato. Carlos Gonzalez García. Jesús Llorente Medrano. Maria José Ruiz Jiménez. Ed. Editex. 2008.

[G]. Algebra Lineal con aplicaciones. Stanley I. Grossman. Ed. McGraw-Hill. 1992.

[S]. Algebra Superior. M. R. Spiegel. Ed. Mc Graw Hill 2000.

MATRICES. SUS OPERACIONES.

Introducción.

Definición: Una matriz es una disposición rectangular y entre paréntesis de números; Es por tanto, una tabla de números entre paréntesis y tiene un determinado número de filas, que llamamos m y un determinado número de columnas que llamamos n. Entonces se dice que la matriz es $m \times n$.

Puede ser de números positivos, de números enteros, de números racionales, de números reales o de números complejos.

Las tablas aparecen bastante en la vida cotidiana. P. ej. la tabla de valores de compra y venta de distintas monedas con una fija (sea ésta el euro), es una tabla de tantas filas como monedas consignemos y de dos columnas. Otro ejemplo es la tabla de porcentaje de composición de unos alimentos determinados según los hidratos de carbono, grasas y proteínas; ésta es una tabla de tantas filas como alimentos hayamos listado y tres columnas. Las presiones y temperaturas de un conjunto de n gases forman una tabla de dos filas y n columnas. Las tablas se transforman en matrices cuando sus datos son utilizados para cálculos.

Una matriz de una fila y una columna es un número entre paréntesis.

La derivada de una función real de variable real es un número, y se generaliza a la derivada de una función real de varias variables por una matriz de una fila y varias columnas, cada una de las cuales es una derivada parcial. De especial interés en física son las derivadas de una función real de tres variables, que se llaman gradientes y son tres números entre paréntesis.

Un punto de R^3 se representa por tres coordenadas entre paréntesis, lo cual es una matriz 1×3. Algunas veces, para comodidad de cálculo, un vector de R^3 se representa por los números en columna; entonces es una matriz 3×1.

En álgebra lineal aparecen las matrices $m \times n$ al expresar de forma global los sistemas de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas. Para ello se define el producto de matrices.

También se utilizan para expresar las aplicaciones llamadas lineales y los productos escalares. Y para relacionar distintos sistemas de coordenadas en el mismo espacio vectorial.

Ciertas operaciones del conjunto de números que aparecen en la matriz se trasfieren a operaciones con las matrices pero no siempre con las mismas propiedades que las operaciones de los números de los que están formadas. Nuestro objetivo en este capítulo es definir y estudiar dichas operaciones.

Operaciones en el conjunto de las matrices.

Si representamos por $\mathcal{K}$ un conjunto de números, se representa por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$ el conjunto de las matrices de m filas y n columnas que tienen números de ese conjunto. Cada sitio de la matriz se llama entrada. Introducimos la notación general de una matriz: se escribe

$$A = (a_{ij})_{i\in\{1,2,\dots m\},j\in\{1,2,\dots n\}}$$

donde a_{ij} es el número que ocupa el lugar de la fila i y la columna j. Cuando están claras en el contexto, las variaciones de i y de j, no se especifican por sencillez de escritura.

Si $\mathcal{K}$ tiene un producto, cualquier matriz puede multiplicarse por un número del conjunto del que está formada. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$ y $s \in \mathcal{K}$, se define $s \cdot A = (sa_{ij})$.

Este producto verifica:

Si $\mathcal{K}$ tiene unidad (1): $1 \cdot A = A$

Es distributivo si el producto de $\mathcal{K}$ es distributivo respecto a una suma: $(s+t)\cdot A = s\cdot A + t\cdot A$

Hay asociatividad mixta si $\mathcal{K}$ es asociativo: $(st)\cdot A = s\cdot(t\cdot A)$

Si en el conjunto $\mathcal{K}$ hay una suma, también ciertas matrices se pueden sumar, pero para eso tienen que tener el mismo número de filas y de columnas. **La suma no es una operación en el conjunto de todas las matrices sino en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$ cuando se han fijado m y n.**

Entonces, se define:

Si $A = (a_{ij})_{i\in\{1\dots m\}j\in\{1\dots n\}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$ y $B = (b_{ij})_{i\in\{1\dots m\}j\in\{1\dots n\}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i\in\{1\dots m\}j\in\{1\dots n\}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$, Se propone comprobar como ejercicios que

2.1.1. La suma es asociativa si la suma en $\mathcal{K}$ lo es.

2.1.2. La matriz cero (que tiene cero en todos los sitios), es elemento neutro para la suma si cero es el elemento neutro de $\mathcal{K}$ respecto a su suma.

2.1.3. Si cada elemento de $\mathcal{K}$ tiene elemento opuesto respecto a la suma, cada matriz tiene elemento opuesto.

Recordando la definición de grupo, los ejercicios 2.1.1., 2.1.2., y 2.1.3. se expresan conjuntamente afirmando que si $\mathcal{K}$ es un grupo aditivo, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$

lo es.

Se puede comprobar también como ejercicio que si $\mathcal{K}$ es un grupo aditivo conmutativo, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$ también lo es.

Además la suma es distributiva respecto al producto por los elementos de $\mathcal{K}$ si lo es en $\mathcal{K}$. Compruébese como ejercicio que $s\cdot(A+B) = s\cdot A+s\cdot B$.

Estas operaciones con todas las propiedades enumeradas se dan p. ej. en $\mathcal{M}_{1\times 3}(\mathcal{R})$ que coincide con el espacio de los vectores y por analogía, la estructura de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$ con estas dos operaciones con las propiedades enumeradas se llama *espacio vectorial.*

Para pasar a otra operación entre matrices llamada producto, observemos que una matriz fila $1\times n$ y una matriz columna $n\times 1$ se pueden multiplicar número a número:

$$(a_{1j})_{j\in\{1\ldots n\}}\cdot(b_{i1})_{i\in\{1\ldots n\}} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot b_{k1}$$

dando otro número.

Esto es lo que se hace para calcular el producto escalar de dos vectores de R^3: se coloca uno de los vectores en fila y el otro en columna y se multiplican número a número.

Es también lo que se hace para calcular lo que tenemos que pagar en una compra multiplicando la matriz fila de los precios de los artículos que hemos comprado por la matriz columna de las cantidades que hemos comprado de cada uno de ellos.

Observemos también que una matriz $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$ puede escribirse como superposición de filas:

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

o como yuxtaposición de columnas:

$$B = (C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

Si las filas de A tienen el mismo número de elementos que las columnas de B, A y B se pueden multiplicar multiplicando las filas de A por las columnas de B, siendo

$$(AB)_{ij} = F_i \cdot C_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ que } \textit{escribiremos} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

Este producto es una operación que va de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})\times$ $\mathcal{M}_{n\times u}(\mathcal{K})$ a $\mathcal{M}_{m\times u}(\mathcal{K})$. Para que sea operación en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$, ha de ser $m = n$.

Podemos decir, por tanto, que las matrices cuadradas tienen otra operación, el producto, con las siguientes propiedades:

a) El producto es asociativo si el producto en $\mathcal{K}$ lo es: $A(BC) = (AB)C$.

En efecto, vamos a ver que el número de la entrada (i,j) de A(BC) es el mismo que el número de la entrada (i,j) de (AB)C:

Suponiendo que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times u}(\mathcal{K})$, $C \in \mathcal{M}_{u\times s}(\mathcal{K})$.

$$(A(BC))_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(\sum_{l=1}^{u} B_{kl}C_{lj}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{u} A_{ik}(B_{kl}C_{lj})$$

$$((AB)C)_{i,j} = \sum_{l=1}^{u}(AB)_{il}C_{lj} = \sum_{l=1}^{u}(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kl})C_{lj} = \sum_{l=1}^{u}\sum_{k=1}^{n}(A_{ik}B_{kl})C_{lj}$$

Comparando las dos expresiones finales se puede ver que contienen los mismos sumandos debido a la propiedad asociativa del producto en $\mathcal{K}$. La diferencia está solamente en la forma de agruparlos:

En el primer sumatorio agrupamos en primer lugar los del mismo k, sumamos los $A_{ik}(B_{kl}C_{lj})$, para todos los valores posibles de 'l' y luego volvemos a sumar estas sumas para todos los valores posibles de 'k'

En el segundo sumatorio agrupamos en primer lugar los del mismo l, sumamos los $(A_{ik}B_{kl})C_{lj}$, para todos los valores posibles de 'k' y luego volvemos a sumar estas sumas para todos los valores posibles de 'l';

Pero la forma de agruparlos para la suma no importa debido a su propiedad conmutativa.

Representaremos las matrices cuadradas $n \times n$ con elementos de $\mathcal{K}$ por $\mathcal{M}_n(\mathcal{K})$.

Se indica como <u>ejercicios</u> la demostración de

2.2.1. b) El producto es distributivo respecto a la suma de matrices si el producto de $\mathcal{K}$ lo es respecto a la suma.

Como todavía no hemos comprobado que el producto sea conmutativo y de hecho no lo es, la distributividad tiene dos facetas, a la derecha y a la izquierda:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

2.2.2. c) El producto es asociativo respecto al producto por los elementos de $\mathcal{K}$ si el producto en $\mathcal{K}$ lo es.

$$s(AB) = (sA)B, \quad (AB)s = A(Bs)$$

Pero existen matrices distintas de cero que no tienen inverso respecto a la multiplicación. Para ello véase como ejercicio:

2.2.3. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobar que no existe una matriz B tal que $AB = I = BA$.

El conjunto de las matrices cuadradas de orden n con elementos de un cuerpo es un grupo aditivo conmutativo respecto a su suma. Respecto al producto no constituyen un grupo multiplicativo ni aún prescindiendo de la matriz cero, porque existen matrices no nulas que no poseen inversa según el ejercicio 2.2.3; por esto no son un cuerpo; la estructura de grupo aditivo con un producto asociativo y distributivo se denomina anillo. Además, el elemento unidad del cuerpo permite construir el elemento unidad del conjunto de las matrices cuadradas de orden n respecto a la multiplicación que es la matriz que tiene 1 en todos los elementos de la diagonal y ceros en el resto. Por eso, se dice que $\mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ es un anillo unitario.

Nos damos cuenta de que el producto en general no es conmutativo al ver que una matriz fila y una matriz columna del mismo número de elementos son multiplicables en los dos sentidos distintos pero en un sentido el producto es un número y en otro sentido el producto es una matriz cuadrada de orden igual al número de elementos de las matrices dadas.

Se puede comprobar como ejercicios la no conmutatividad de matrices cuadradas y otras propiedades peculiares:

2.2.4. Siendo A y B las matrices dadas a continuación calcular los productos AB y BA cuando sea posible y comparar los resultados.

$$a) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad b) \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ B = \begin{pmatrix} 5 & 50 \\ 1 & 60 \\ 1 & 86 \end{pmatrix} \qquad d) \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Será cierta para las matrices cuadradas la relación $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

2.2.5. Comprobar que el producto de dos matrices puede ser nulo sin que lo sean ninguno de los factores, hallando los productos AB siendo A y B las matrices dadas a continuación:

$$a)\;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\; B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b)\;\; A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;\; B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\;\; A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \;\; B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad d)\;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Es cierto que $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$? Comprobarlo.

2.2.6. Hallar la forma general de las matrices 3×3 de números reales o complejos que conmutan con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.7. Hallar matrices 2×2 de números reales, tales que su cuadrado es $-I$.

2.2.8. Hallar matrices $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ de números reales, distintas de la identidad y tales que $A^2 = A$.

2.2.9. Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (C_1, C_2), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Comprobar que $AB = C_1F_1 + C_2F_2$

Generalizar este resultado para matrices de dimensiones multiplicables.

2.2.10. ¿Qué transformación tiene lugar en la matriz C dada a continuación cuando la multiplicamos a la derecha o a la izquierda por la matriz D diagonal dada también a continuación:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

¿Cúales son las matrices diagonales que conmutan con todas las demás?

2.2.11. Demostrar que si una matriz no es diagonal, no conmuta con todas las demás. Deducir de este ejercicio y del anterior la forma de las matrices que conmutan con todas las demás.

2.2.12. Multiplicando las dos matrices A y B dadas a continuación,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobar que:
a) La primera fila del producto AB es la suma de las filas de B multiplicadas por los números de la primera fila de A considerados como coeficientes.
b) La primera columna de AB es la suma de las columnas de A multiplicados por los números de la primera columna de B considerados como coeficientes.
¿Qué ocurre análogamente con las demás filas y las demás columnas del producto?
2.2.13. Se llaman matrices elementales las obtenidas de la matriz identidad, haciendo una de las siguientes transformaciones:

a) Permutación de filas.

b) Suma a una fila de otra fila multiplicada por un número.

c) Multiplicación de una fila por un número distinto de cero.
Escribir todas las matrices elementales de tamaño 3×3.
Escoger una matriz cualquiera de números y comprobar que al multiplicar esta matriz por otra elemental colocando a la izquierda la matriz elemental, se realiza en la matriz escogida, la transformación que había tenido lugar en la identidad para obtener la matriz elemental. Generalizar el resultado.

La **trasposición** es otra aplicación definida en el conjunto de las matrices con imagen en este mismo conjunto que hace corresponder a una matriz $A = (a_{ij})_{i\in\{1,2,\ldots m\},j\in\{1,2,\ldots n\}}$, la matriz representada por ${}^tA$: ${}^tA = (b_{ij})_{i\in\{1,2,\ldots n\},j\in\{1,2,\ldots m\}}$ donde $b_{ij} = a_{ji}$. Lo que hacemos es modificar la disposición de los números cambiando filas por columnas.

La trasposición no es siempre una operación en $\mathcal{M}_{m\times n}(R)$, ya que asocia a elementos de $\mathcal{M}_{m\times n}(R)$, elementos de $\mathcal{M}_{n\times m}(R)$. Para que una aplicación sea operación en un conjunto, tiene que quedarse en ese conjunto, para lo cual ha de ser $\mathcal{M}_{m\times n}(R) = \mathcal{M}_{n\times m}(R)$, es decir, $m = n$.

La traspuesta de la matriz suma de otras dos matrices es la suma de las traspuestas de las matrices dadas.

En cuanto a la relación del producto con la trasposición tenemos la siguiente igualdad:

$$\mathbf{{}^t(AB) = {}^tB{}^tA}$$

ya que

$$({}^t(AB))_{ji} = (AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} = \sum_k B_{kj}A_{ik} = \sum_k ({}^tB)_{jk}({}^tA)_{ki} = ({}^tB \cdot {}^tA)_{ji}$$

Tipos de matrices.

Entre las matrices cuadradas de números reales se definen *Las matrices simétricas* son las que coinciden con su traspuesta, para lo cual han de ser cuadradas (m=n): la matriz $A = (a_{ij})$ es simétrica si y sólo si $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i,j$; también se escribe si y sólo si $A = {}^tA$.

Las matrices antisimétricas son las que coinciden con la opuesta de su traspuesta, para lo cual también han de ser cuadradas: la matriz $A = (a_{ij})$ es antisimétrica si y sólo si $a_{ij} = -a_{ji},\ \forall i,j$; también se escribe $A = -{}^tA$.

Compruébese como ejercicios que

2.3.1. Una matriz antisimétrica tiene nulos todos los elementos de su diagonal principal.

2.3.2. Una matriz a la vez simétrica y antisimétrica es una matriz nula (que tiene 0 en todos los sitios).

2.3.3. Comprobar que:

a) Dada una matriz cuadrada A, la matriz $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ es una matriz simétrica.

b) Dada una matriz cuadrada A, la matriz $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ es una matriz antisimétrica.

c) Toda matriz cuadrada se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Entre las matrices cuadradas de números complejos se definen *las matrices hermíticas como las matrices que verifican* $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$, $\forall i, j$ $(A = \overline{{}^tA})$. *Y las* matrices antihermíticas como las matrices que verifican $a_{ij} = -\overline{a}_{ji}$ $\forall i, j$ $(A = -\overline{{}^tA})$

Compruébese como ejercicios que

2.4.1. Una matriz hermítica tiene todos los elementos de su diagonal principal reales.

2.4.2. En una matriz antihermítica son imaginarios puros todos los elementos de la diagonal principal.

2.4.3. Una matriz a la vez hermítica y antihermítica es una matriz nula.

2.4.4. Toda matriz cuadrada compleja se puede escribir como suma de una matriz hermítica y otra antihermítica.

2.4.5. Comprobar que el producto de matrices simétricas no siempre es una matriz simétrica realizando el producto AB en el caso a):

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, sí es simétrico en el caso:

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobar que en el caso a) $BA = {}^t(AB)$ y en el caso b) $BA = AB$.

2.4.6. Demostrar que dadas A y B, dos matrices simétricas, A y B conmutan si y sólo si su producto es una matriz simétrica. Encontrar matrices simétricas que conmuten y matrices simétricas que no conmuten distintas de las del ejercicio anterior.

2.4.7. Si A es una matriz simétrica y B es una matriz antisimétrica, A y B conmutan si y sólo si su producto es una matriz antisimétrica.

2.4.8. Demostrar que toda matriz simétrica 2×2 de números reales o complejos que conmute con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un múltiplo de la identidad.

2.4.9. Demostrar que toda matriz simétrica 3×3 de números reales o complejos que conmute con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un múltiplo de la identidad.

Otros subconjuntos importantes de las matrices cuadradas son:

Las matrices diagonales: Son aquellas en las que $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$. Son en ellas nulos todos los elementos situados fuera de la diagonal del cuadrado que va del ángulo superior izquierdo al ángulo inferior derecho (que se llama diagonal principal).

De las matrices diagonales la más importante es la identidad que tiene 1 en todos los elementos de la diagonal.

También son importantes entre las matrices cuadradas *las matrices triangulares superiores*: Son en ellas nulos todos los elementos que se encuentran debajo de la diagonal principal. Por tanto, aquellas en las que $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$.

Análogas a éstas son *las matrices triangulares inferiores*: Son en ellas nulos todos los elementos que se encuentran encima de la diagonal principal. Por tanto, aquellas en las que $a_{ij} = 0$ siempre que $i < j$.

Obsérvese que una matriz a la vez triangular superior y triangular inferior es una matriz diagonal.

2.5.1. Comprobar que la traspuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior y recíprocamente.

2.5.2. Demostrar que:

a) El producto de matrices diagonales es diagonal.

b) El producto de matrices triangulares superiores es triangular superior.

c) El producto de matrices triangulares inferiores es triangular inferior.

Debido al ejercicio 2.4.5, las matrices simétricas de orden n no son un subanillo de las matrices cuadradas de orden n, (porque el producto de dos matrices simétricas puede no ser simétrica). Sin embargo, debido al ejercicio 2.5.2 las matrices diagonales de orden n forman un subanilo unitario del anillo unitario de las matrices cuadradas de orden n y lo mismo ocurre con las matrices triangulares superiores de orden n y con las matrices triangulares inferiores de orden n.

Las matrices que tienen distinto número de filas que de columnas se llaman matrices rectangulares. En ellas $m \neq n$.

Pasando ahora a las matrices rectangulares $m \times n$, otro subconjunto importante de ellas son las *matrices escalonadas*: Se llaman así porque en ellas se puede trazar una escalera por debajo de la cual todos los elementos son nulos, siendo no nulos los elementos de sus esquinas y recorriendo esta escalera filas y columnas de manera que no baja más de una fila en cada escalón; de manera más precisa, a la izquierda y debajo del primer número distinto de cero de cada fila, los números son todos ceros. Matemáticamente se puede expresar así: (a_{ij}) es escalonada si para cada fila i existe una columna k_i tal que los números de esa fila anteriores a la columna k_i son nulos: $a_{ij} = 0 \; si \; j < k_i$ y los términos de las filas posteriores situados en dichas k_i columnas son también nulos: $a_{lj} = 0 \; si \; l > i, j \leq k_i$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz escalonada — matriz no escalonada

Las matrices escalonadas $m \times n$, donde m y n son fijos, no forman un grupo aditivo respecto a la suma de matrices.

Se puede comprobar que toda matriz cuadrada y escalonada es triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

matriz escalonada cuadrada y triangular superior

Para ello obsérvese cómo es una matriz escalonada con número mínimo de ceros (véase la matriz anterior). Aunque tuviera más ceros seguiría siendo triangular superior.

Se puede ver también que en una matriz cuadrada escalonada la última fila tiene un elemento distinto de cero, si y sólo si el primer escalón está en la primera columna y cada escalón tiene longitud de una columna. Ya que en otro caso, al ir recorriendo los escalones, agotamos antes las columnas que las filas, quedando la última fila completa debajo de la escalera. (Véase la matriz a continuación).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz escalonada cuadrada con escalón de dos columnas.

PROBLEMAS RESUELTOS DE LOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE ÁLGEBRA LINEAL I.

1. Siendo

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Es cierto, para cualquier matriz A, que $(D+A)^2 = D^2 + 2DA + A^2$?

Si no es cierto, encontrar una matriz A que no lo verifique.

Si es cierto, dar una demostración correcta del resultado.

Solución:

Calculemos $(D+A)^2 = (D+A)(D+A) = D^2 + DA + AD + A^2$. Para que

$$(D+A)^2 = D^2 + DA + AD + A^2 = D^2 + 2DA + A^2$$

debe ser $AD = DA$.

Para ver si se cumple $AD = DA$ cogemos una matriz general 2×2, A y hacemos las dos operaciones anteriores y comparamos los resultados:

$$DA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$AD = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix}$$

Debería ser:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix}$$

Para que lo sea: $b = 2b$ y $c = 2c$, lo que no es cierto si $b \neq 0$ ó $c \neq 0$.

Una matriz A para la que no es cierto el resultado es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar haciendo las operaciones.

Como no es cierto, no se puede dar una demostración correcta del resultado general escrito al principio.

2. Encontrar las inversas de

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Multiplicando a la izquierda $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ por una matriz general $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

vemos que el resultado ha sido multiplicar la primera fila por 3 y la segunda fila por 2.

La matriz inversa de la primera multiplicada a la izquierda por el producto anterior ha de dar la matriz general fijada al principio. Para ello tenemos que dividir en el producto anterior, la primera fila por 3 y la segunda fila por 2. Se comprueba que eso sucede cuando multiplicamos a la izquierda por

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ luego } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a la izquierda $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ por una matriz general $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 6a+c & 6b+d \end{pmatrix}$$

vemos que el resultado ha sido sumar a la segunda fila la primera multiplicada por 6. La matriz inversa de la primera multiplicada a la izquierda por el producto anterior ha de dar la matriz general fijada. Para ello ha de restar a la segunda fila la primera multiplicada por -6.

Podemos comprobar que eso sucede cuando multiplicamos a la izquierda por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ luego } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Referencias.

[A] Algebra Lineal y aplicaciones. J. Arvesú Carballo, R. Alvarez Nodarse, F. Marcellán Español. Ed. Síntesis Madrid. 1999.

[F] J.B: Fraleigh R. A. Beauregard. Algebra Lineal. Addison-Wesley Iberoamericana 1989.

[G] Matemáticas 2 Bachillerato. Carlos Gonzalez García. Jesús Llorente Medrano. Maria José Ruiz Jiménez. Ed. Editex. 2009.

[L] E. M. Landesman, M. R. Hestenes. Linear Algebra for Mathematics, Science, and Engineering. Prentice-Hall International, Inc. 1992.

MÉTODO DE GAUSS Y REDUCCIÓN DE GAUSS-JORDAN.

Introducción.

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen frecuentemente en problemas elementales de otras ciencias y de la vida corriente. Como ejemplo se enuncian aquí varios problemas de esos:

1. Averiguar si los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv \; -y+z=2, \quad \pi_2 \equiv \; 3x+6y+z=-5, \quad \pi_3 \equiv \; 2x+4y-2z=-3$$

tienen un punto común.

Sol: pto común: $1/8(21,-17,-1)$

2. Determinar si en R^3 las rectas siguientes se cortan:

$$r_1 \equiv \left.\begin{array}{rrrl} 2x & +3y & +z & =5 \\ x & -3y & & =4 \end{array}\right\} \qquad r_2 \equiv \left.\begin{array}{rrrl} x & +y & & =2 \\ & y & -z & =-1 \end{array}\right\}$$

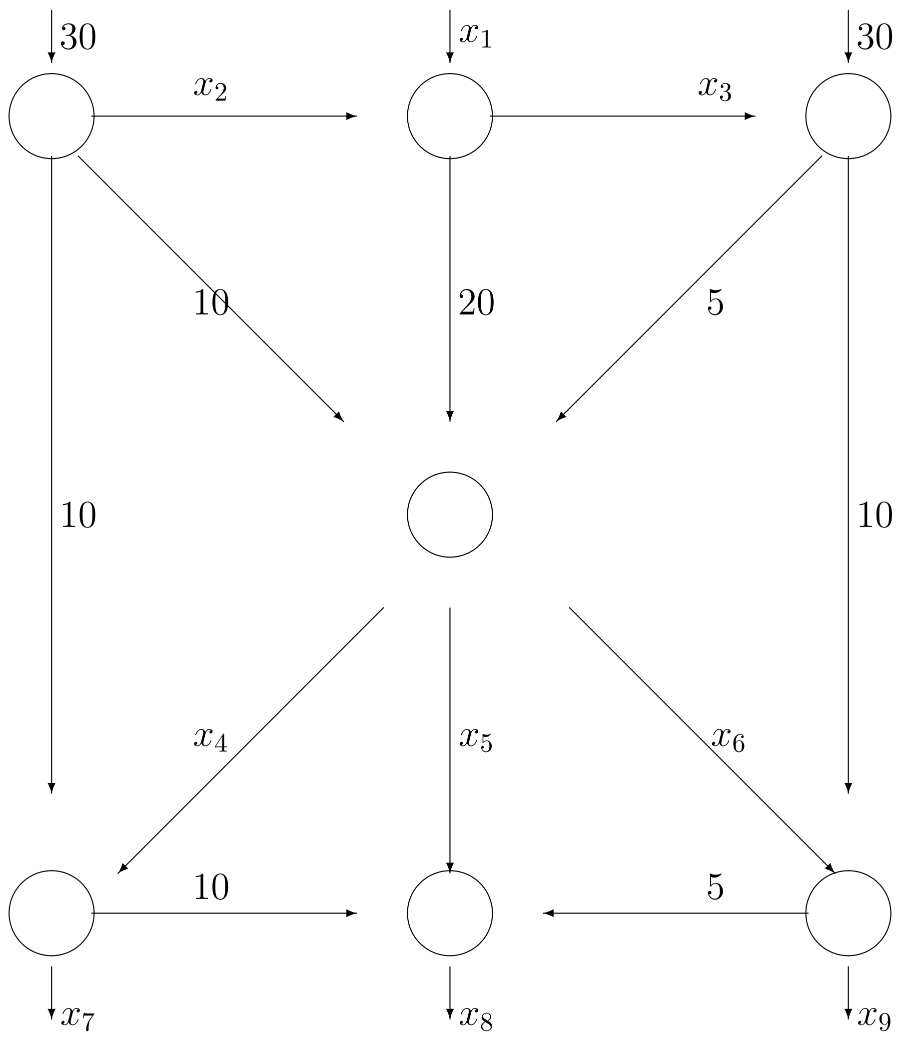
Sol: no se cortan.

3. Ajustar la reacción:

$$xIO_3Na + ySO_3HNa \rightarrow zSO_4Na_2 + uSO_4HNa + vH_20 + wI_2$$

Sol: $x=2w, y=5w, z=2w, u=3w, v=w.$

4. En la red de tráfico del dibujo de la página siguiente, se conocen las cantidades de coches que circulan en dos entradas y en algunos tramos. Se desea conocer las cantidades de coches que circulan en todos los tramos. Se podría colocar un contador en cada tramo desconocido, entonces harían falta nueve contadores, sin embargo, se puede demostrar que dos contadores son suficientes, porque los tráficos en los distintos tramos están relacionados. Demuéstrese.



Resolver un sistema de ecuaciones lineales es hallar, cuando es posible, todos los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. Supondremos que los coeficientes de las incógnitas en las ecuaciones son reales o complejos. La teoría que vamos a desarrollar vale siempre que los coeficientes estén en un cuerpo.

Si no es posible encontrar esos valores, el sistema se llama incompatible. Si es posible encontrarlos, distinguimos el caso en que estos valores están determinados unívocamente, llamando al sistema compatible determinado, del caso en que hay infinitos valores, llamándolo entonces compatible indeterminado.

En Bachillerato se han visto los métodos de eliminación, reducción y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Cada sistema concreto puede resolverse o verse si es incompatible usando uno de estos métodos. El **Método de Gauss** es una combinación sistemática de los métodos de eliminación y sustitución válida para todos los sistemas. Habiendo garantía de poder decidir si un sistema dado cualquiera es incompatible o compatible y resolverlo en este caso, por dicho método.

Algunas veces sólo interesa saber si el sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado, sin llegar a resolver efectivamente el sistema. Veremos que esto también se puede hacer, estudiando la evolución de los sistemas en la primera parte (eliminación) del método de Gauss.

Método de Gauss.

Si el sistema está formado por una sóla ecuación con una incógnita que es de la forma $ax = b$, sabemos que tiene solución única si a tiene inverso (lo cual es equivalente, cuando a está en un cuerpo, a que a sea distinto de cero); tiene infinitas soluciones cuando $a = b = 0$; es incompatible cuando $a = 0$ y $b \neq 0$.

Si el sistema es de una ecuación con más de una incógnita, es de la forma $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$; éste es indeterminado o incompatible, siendo éste último el caso cuando todos los coeficientes de las incógnitas son nulos sin serlo el término independiente.

La idea es, entonces, ir reduciendo la complejidad de un sistema con varias ecuaciones y varias incógnitas a la simplicidad de un sistema con una ecuación.

Lo cual se puede hacer pasando a primera ecuación una que tenga coeficiente a_{11} de x_1 distinto de cero, dividiendo por a_{11} dicha ecuación (que se puede hacer porque $a_{11} \neq 0$) y restando a las siguientes ecuaciones la primera multiplicada por el coeficiente de x_1 en cada ecuación. Así hemos eliminado la incógnita x_1 en las ecuaciones posteriores a la primera y éstas dan un sistema de una ecuación menos con una incógnita menos. Repitiendo el procedimiento, llegamos hasta un sistema de una ecuación, que sabemos resolver o ver si es incompatible.

Veamos un ejemplo: resolvamos por el método de Gauss el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 = & 16 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 = & -7 \\ -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 = & 2 \\ & 2x_2 & +3x_3 & +x_4 = & 17 \end{array}\right\}$$

Empezamos eliminando la incógnita x_1 de las ecuaciones segunda y tercera sumando a estas ecuaciones la primera multiplicada adecuadamente por los números $-2,\ 2$. Podemos hacerlo porque el coeficiente de x_1 en la primera ecuación es distinto de cero. Entonces pasamos a

$$\left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 = & 16 \\ & -5x_2 & -3x_3 & -5x_4 = & -39 \\ & 5x_2 & +4x_3 & +3x_4 = & 34 \\ & 2x_2 & +3x_3 & +x_4 = & 17 \end{array}\right\}$$

Así encontramos dentro del sistema dado un subsistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, formado por las tres últimas ecuaciones, más simple que el dado y que una vez resuelto nos daría la solución del sistema dado considerando también la primera ecuación.

En este subsistema de tres ecuaciones podemos pasar a otro subsistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, eliminando la incógnita x_2 de las dos últimas ecuaciones sumando a éstas la primera multiplicada adecuadamente, ya que el coeficiente de x_2 en la primera ecuación del subsistema es distinto de cero.

Pero como tendríamos que multiplicar la primera ecuación por $-1/5$ para conseguir que el coeficiente de x_2 sea 1 y luego multiplicar adecuadamente para eliminar los coeficientes de dicha x_2 en las restantes ecuaciones y de este modo surgirían fracciones, vamos a utilizar otro camino que también consiste en multiplicar una ecuación por un número y sumar otra ecuación multiplicada por un número: vamos a multiplicar la primera ecuación del subsistema por -1 y le vamos a sumar la última multiplicada por -2, pasando a:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_2 & -3x_3 & +3x_4 = & 5 \\ 5x_2 & +4x_3 & +3x_4 = & 34 \\ 2x_2 & +3x_3 & +x_4 = & 17 \end{array}\right\}$$

Hemos conseguido que el coeficiente de la incógnita x_2 sea 1 en la primera ecuación. Ahora multiplicando esta ecuación por -5 y sumándosela a la segunda ecuación y luego multiplicando la primera ecuación por -2 y sumándosela a la tercera ecuación tenemos:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_2 & -3x_3 & +3x_4 = & 5 \\ & 19x_3 & -12x_4 = & 9 \\ & 9x_3 & -5x_4 = & 7 \end{array}\right\}$$

donde podemos percibir un subsistema de las dos últimas ecuaciones con las dos últimas incógnitas. De este subsistema, restando a la penúltima ecuación la última multiplicada por 2, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{rrr} x_3 & -2x_4 = & -5 \\ 9x_3 & -5x_4 = & 7 \end{array}\right\}$$

y así eliminamos fácilmente la incógnita x_3 de la última ecuación pasando a

$$\left.\begin{array}{rrr} x_3 & -2x_4 = & -5 \\ & 13x_4 = & 52 \end{array}\right\}$$

donde aparece al final una ecuación con una incógnita. Resuelta esta ecuación podemos ir resolviendo los subsistemas de dos y tres ecuaciones que se han ido hallando resolviendo progresivamente una ecuación más y llegar a la solución del sistema dado. En efecto, la última ecuación da $x_4 = 4$, que sustituida en $x_3 - 2x_4 = -5$ da $x_3 = 3$, lo cual sustituido en $x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5$ da $x_2 = 2$ y todo esto sustituido en $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 16$ da $x_1 = 1$, teniendo el sistema resuelto por el método de Gauss.

Si el sistema hubiera sido:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} & 2x_2 & +3x_3 & +x_4 = & 17 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 = & -7 \\ -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 = & 16 \end{array}\right\}$$

donde el coeficiente de la primera ecuación en la primera incógnita es cero, pasamos a un sistema donde este coeficiente es distinto de cero, intercambiando ecuaciones.

Veamos otros ejemplos donde se va viendo los subsistemas formados eliminando sucesivamente las incógnitas hasta llegar a una ecuación.

2)

$$\left.\begin{array}{rrrr} & 6x_2 & +12x_3 & = 18 \\ 8x_1+ & 6x_2 & & = 5 \\ x_1- & x_2 & +x_3 & = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrr} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ 8x_1 & +6x_2 & & = 5 \\ & 6x_2 & +12x_3 & = 18 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 14x_2 & -8x_3 & = 5 \\ & 6x_2 & +12x_3 & = 18 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrr} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 14x_2 & -8x_3 & = 5 \\ & x_2 & +2x_3 & = 3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & = 3 \\ & 14x_2 & -8x_3 & = 5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrr} x_1 & -x_2 & +x_3 = & 0 \\ & x_2 & +2x_3 = & 3 \\ & & -36x_3 = & -37 \end{array}\right\}$$

Como la última ecuación es compatible, el sistema es compatible y como también es determinada, podemos despejar x_3 en la última ecuación y sustituyendo en la segunda ecuación despejar x_2, también determinada. Obtenemos x_1 de la primera ecuación al sustituir los valores de las otras incógnitas; el sistema resulta compatible determinado.
Se obtiene $x_3 = 37/36$, $x_2 = 17/18$, $x_1 = -1/12$.

3)

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 = & 1 \\ -2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 7 \\ & x_2 & & -x_4 = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 = & 1 \\ & 7x_2 & +x_3 & +2x_4 = & 9 \\ & x_2 & & -x_4 = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 1 \\ & x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & 7x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 9 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 1 \\ & x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & & x_3 & +9x_4 & = 9 \end{array}\right\}$$

Este sistema también es compatible por serlo la última ecuación. Pero como ésta es indeterminada, el sistema es indeterminado. Despejamos x_3 en función de x_4 en la última ecuación, x_2 en función de x_4 en la penúltima ecuación y luego sustituimos x_2 y x_3 en la primera ecuación y obtenemos: $x_3 = 9 - 9x_4,\ x_2 = x_4,\ x_1 = 10 - 13x_4$, x_4 puede ser cualquiera.
Pero, aunque la última ecuación sea compatible determinada, el sitema puede ser incompatible indeterminado, como ocurre en los ejemplos 4) y 5) siguientes:
4)

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 = & 1 \\ -2x_1 & +x_2 & +9x_3 & = & 7 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 = & 1 \\ & 7x_2 & +7x_3 & +2x_4 = & 9 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ & 7x_2 & +7x_3 & +2x_4 & = 9 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ & & & 9x_4 & = 9 \end{array}\right\}$$

Por ser la última ecuación compatible, el sistema es compatible. En este caso, x_4 está determinado en la última ecuación, pero al sustituir el valor de x_4 en las ecuaciones anteriores, la penúltima ecuación queda indeterminada por lo que el sistema es indeterminado. Despejando x_2 en función de x_3 y sustituyendo en la primera ecuación tenemos las soluciones: $x_4 = 1,\ x_2 = 1 - x_3,\ x_1 = -3 + 4x_3$, x_3 puede ser cualquiera.

5)

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 = & 1 \\ -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 7 \\ & x_2 & & -x_4 = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 = & 1 \\ & 7x_2 & & +2x_4 = & 9 \\ & x_2 & & -x_4 = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 1 \\ & x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & 7x_2 & & +2x_4 & = 9 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 1 \\ & x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & & & 9x_4 & = 9 \end{array}\right\}$$

De nuevo el sistema es compatible por serlo la última ecuación. Tanto ésta, como la penúltima ecuación salen determinadas, pero al sustitir x_4 y x_2 en la primera ecuación, obtenemos una ecuación con dos incógnitas que es indeterminada (tiene infinitas soluciones) por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son:

$x_4 = 1, x_2 = 1, x_1 = x_3 - 3$, x_3 puede ser cualquiera.

Por último, veamos un sistema incompatible.

6)

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 = & 1 \\ -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & -9x_4 = & 7 \\ & x_2 & & -x_4 = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 = & 1 \\ & 7x_2 & & -7x_4 = & 9 \\ & x_2 & & -x_4 = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 1 \\ & x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & 7x_2 & & -7x_4 & = 9 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 1 \\ & x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & 0x_2 & & +0x_4 & = 9 \end{array}\right\}$$

Aquí la última ecuación es incompatible, esto es suficiente para que el sistema sea incompatible.

Debido a que cuando encontramos una primera ecuación de un subsistema con coeficiente cero en la primera incógnita la intercambiamos con otra que tiene coeficiente distinto de cero en esa incógnita, la incompatibilidad es relegada a la última ecuación.

Se puede conseguir que el coeficiente de la primera incógnita sea 1 utilizando coeficientes primos entre sï de dicha incógnita en otras ecuaciones.

Recapitulando, el método de Gauss es una combinación ordenada de los métodos de eliminación y sustitución y garantiza nuestra capacidad de decisión sobre el carácter de un sistema porque consiste en la reali-zación de sucesivas etapas con las ecuaciones del sistema de manera que se van formando subsistemas de una ecuación menos y una incógnita menos (como mínimo) hasta llegar a un sistema de una sóla ecuación, cuyo carácter hemos visto que sabemos decidir. (El carácter sistemático del método de Gauss lo hace preferible a la hora de ejecutarlo por ordenador).

Entonces, si la última ecuación es incompatible, el sistema es incompatible.

Si la última ecuación es compatible, se ve fácilmente si ésta es determinada o indeterminada. Si es indeterminada, el sistema es indeterminado. Si es compatible determinada, despejando la incógnita en la última ecuación conseguida y sustituyendo regresivamente en las anteriores, obtenemos otro sistema equivalente con una incógnita menos y al menos una ecuación menos, en el cual el carácter de la última ecuación nos diría que el sistema es indeterminado si esta ecuación fuera indeterminada; pero si dicha ecuación es determinada, para ver el carácter del sistema tenemos que repetir el procedimiento de sustitución regresiva y seguir así hasta que quede alguna ecuación indeterminada en cuyo caso el sistema será indeterminado o que todas las ecuaciones hayan resultado determinadas en cuyo caso el sistema es determinado y hemos ido obteniendo sus soluciones. Si el sistema es indeterminado, podemos despejar en las ecuaciones indeterminadas la primera incógnita que aparezca en ellas con coeficiente distinto de cero, en función de las siguientes y sustituyendo regresivamente obtener un subconjunto de incógnitas despejado en función de otro subconjunto de incógnitas que pueden variar libremente.

La formación de subsistemas de al menos una incógnita menos y al menos una ecuación menos puede hacerse con las siguientes etapas:

1) Pasar a primer lugar una ecuación que tenga coeficiente distinto de cero de la primera incógnita.

2) Sumar a las restantes ecuaciones la primera multiplicada adecuadamente para que el coeficiente de la primera incógnita en ellas salga cero.

3) Considerar las ecuaciones excepto la primera como un subsistema que no tiene la primera incógnita y repetir las etapas 1) y 2) anteriores para la siguiente incógnita que no tiene coeficiente nulo en todas las ecuaciones. Si todas las ecuaciones tuvieran coeficientes nulos de las incógnitas pero quedara alguna con término independiente distinto de cero (el sistema sería incompatible) se reducen todas las ecuaciones incompatibles a una sola por etapas análogas a la 2) anterior para los términos independientes.

4) Para resolver el sistema (en el caso en que sea compatible) se despeja la incógnita que aparezca con coeficiente distinto de cero en primer lugar en la última ecuación, (si esta última ecuación tiene varias incógnitas, en función de las restantes) y se sustituye en las demás ecuaciones con lo que se reduce en uno el número de ecuaciones del sistema obtenido y se repite el proceso hasta agotar las ecuaciones. Al final, tendremos los valores de las incógnitas si el sistema es compatible determinado o un subconjunto de incógnitas despejado en función de las otras, que serán independientes y podrán tomar cualquier valor si el sistema es compatible indeterminado.

Las etapas 2), 3) y 4) pueden realizarse porque cada coeficiente tiene inverso.

Desmenuzando el tipo de operaciones que hacemos, las etapas 1), 2) y 3) del método de Gauss se hacen realizando en las ecuaciones de un sistema lo que llamamos

Operaciones Elementales en un sistema:

1) Intercambio de las ecuaciones.

2) Suma de una ecuación multiplicada por un número a otra ecuación distinta.

3) Multiplicación de una ecuación por una constante distinta de cero. (Para despejar las incógnitas).

Estas operaciones son suficientes para su resolución. Cualquier operación elemental en un sistema lo transforma en otro equivalente.

Ejercicios:

3.1.1. Utilizar el método de Gauss para determinar el carácter de cada uno de los sistemas enunciados a continuación y resolver los que sean compatibles:

$$a)\ \left.\begin{array}{rrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 = & 6 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 = & 14 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 = & -3 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & -x_2 & +x_3 & -2 = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -1 = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +3 = & 0 \end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 = & 0 \\ -x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 = & 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 = & 0 \end{array}\right\} \qquad d)\ \left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & -1 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 = & -1 \\ -x_1 & -2x_2 & -x_3 & -2x_4 = & 1 \end{array}\right\}$$

$$e)\ \left.\begin{array}{rrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 = & 2 \\ 5x_1 & +2x_2 & -x_3 = & 5 \end{array}\right\} \qquad f)\ \left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 = & 1 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 = & -6 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 = & 0 \\ -2x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -x_4 = & -9 \end{array}\right\}$$

3.1.2. Hallar los valores de los parámetros α, β y γ para que se verifique $A \cdot A^t = I$ siendo A la matriz:

$$A = 1/9 \begin{pmatrix} 7 & -4 & \alpha \\ -4 & \beta & -8 \\ -\gamma & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.3. Hallar e y f en la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & e & 4 \\ -1 & f & 8 \end{pmatrix}$$

para que exista una matriz A de tamaño 2×2 que multiplicada a la izquierda por

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad de \quad \begin{pmatrix} 1 & e & 4 \\ -1 & f & 8 \end{pmatrix}$$

Sol 3.1.1:
a) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$; b) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$;
c) $x_1 = 2x_4 = 2k, x_2 = -x_4 = -k, x_3 = -2x_4 = -2k, x_4 = k$;
d) $x_1 = -1 - x_3 = -1 - \alpha, x_2 = -x_4 = -\beta, x_3 = \alpha, x_4 = \beta$;
e) incompatible ; f) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$;

Sol. 3.1.2: $\alpha = -4,\ \beta = 1,\ \gamma = 4.$

Sol. 3.1.3: $e = 3,\ f = 4.$

Operaciones elementales en una matriz.

Lo que importa al resolver un sistema son los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes. Ellos foman la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema. Un sistema se puede escribir en forma matricial: AX=b donde A es la matriz de los coeficientes de las incógnitas, X es la columna de las incógnitas y b es la columna formada por los términos independientes.

Los ejemplos 2), 3), 4), 5) dados anteriormente serían:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 8 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Llamamos matriz ampliada del sistema a la matriz $A|b$. Las matrices A y $A|b$ van evolucionando, al irse realizando las operaciones elementales en el sistema, cuando se usa el método de Gauss.

Las transformaciones que tienen lugar en la matriz de un sistema cuando se realizan operaciones elementales en él, se llaman operaciones elementales en la matriz. Se obtienen así tres tipos de operaciones elementales en matrices que corresponden a los tres tipos de operaciones elementales en el sistema.

Llamamos **Operaciones Elementales en una matriz** a:

1) Intercambio de las filas de la matriz.

2) Suma de una fila de la matriz multiplicada por un número a otra fila de la matriz.

3) Multiplicación de una fila por una constante distinta de cero.

La evolución de las matrices en los ejemplos 2), 3), 4), 5) y 6) ha sido:

2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 12 & 18 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & -8 & 5 \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 14 & -8 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -36 & -37 \end{array}\right).$$

3)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

4)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 9 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

5)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

6)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

La observación de las matrices de un sistema en las distintas etapas de su resolución nos indica que vamos escalonando la matriz de coeficientes del sistema dado, fila a fila, por medio de las operaciones elementales y cuando tanto la matriz de coeficientes del sistema como la matriz ampliada son escalonadas, podemos decidir si el sistema es incompatible o compatible.

En ese momento, el sistema es incompatible si y sólo si la última ecuación es incompatible, lo cual se traduce en que la matriz escalonada del sistema tiene un escalón menos que la matriz escalonada ampliada del sistema (véase el último ejemplo).

Si la última ecuación es compatible, en cuyo caso las dos matrices escalonadas mencionadas tienen el mismo número de escalones, el sistema es compatible indeterminado cuando queda indeterminada alguna de las ecuaciones al ir sustituyendo, regresivamente en las ecuaciones anteriores, los valores de las incógnitas determinadas. Se observa que queda alguna ecuación indeterminada si y sólo si alguno de los escalones de la matriz del sistema tiene longitud superior a una columna (véanse los ejemplos 3, 4 y 5); habiendo entonces alguna ecuación indeterminada con más de una incógnita donde se pueden pasar al segundo miembro las incógnitas correspondientes a las columnas que no dan escalón y despejar las otras en función de ellas, lo que da la indeterminación.

El sistema es determinado si todas las ecuaciones quedan determinadas, lo cual sólo ocurre cuando todos los escalones son de una columna (véase el ejemplo 2).

Vemos que en el proceso de resolución de sistemas, podemos decidir el carácter del sistema inicial sin resolverlo totalmente y por ello enunciamos la versión del **Teorema de Rouché-Frobenius para matrices escalonadas:** un sistema es incompatible cuando la matriz escalonada a la que hemos reducido la matriz ampliada del sistema tiene un escalón más que la matriz escalonada a la que ha quedado reducida la matriz de los coeficientes del sistema; en otro caso es compatible, siendo compatible determinado si todos los escalones de la matriz escalonada del sistema tienen longitud una columna y compatible indeterminado si hay algún escalón de longitud superior a una columna.

Cuando la columna b es nula el sistema se llama homogéneo. Entonces, esta columna no añade ningún escalón, a pesar de las operaciones elementales, por lo que en estos sistemas las matrices escalonadas provenientes de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada tienen siempre el mismo número de escalones. Concluimos que los sistemas homogéneos son siempre compatibles.

Ejercicios:

3.2.1. Haciendo operaciones elementales en la matriz ampliada del sistema y aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, decidir el carácter de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 = & 1 \\ & x_2 & +x_3 = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & = & 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 = & 1 \\ & x_2 & +x_3 = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & = & 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rrl} 2x_1 & +x_2 = & 5 \\ x_1 & -x_2 = & 1 \\ x_1 & +2x_2 = & 4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & -3x_2 & +x_3 & +x_4 = & 2 \\ 3x_1 & -8x_2 & +2x_3 & +x_4 = & 2 \\ 2x_1 & -5x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array}\right\}$$

3.2.2. Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 que conmutan con la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3.2.3. Considerar los sistemas:

$$a) \quad \left.\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 = & c \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 = & 2 \\ -2x_1 & +3x_2 & +bx_3 = & -4 \end{array}\right\} \qquad b) \quad \left.\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 = & 1 \\ 2x_1 & +cx_2 & +x_3 = & d \\ 5x_1 & +5x_2 & -x_3 = & e \end{array}\right\}$$

i). Encontrar los valores de b para los que el sistema a) tiene solución, cualquiera que sea c.

ii). Existe un valor de b para el que el sistema a) no tiene siempre solución, sino sólo para un valor de c. ¿Cúales son estos valores de b y de c?

iii). Encontrar las condiciones que han de cumplir c, d y e para que el sistema b) tenga solución.

3.2.4.

a) Hallar y para que exista una matriz $X_{2\times 2}$ tal que

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Hallar la forma general de todas las matrices X que verifican la igualdad anterior con el valor hallado de y.

3.2.5. Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 0 & 1-a \\ 1 & 1-a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Encontrar los valores de a y b para los que el sistema es:

a) compatible determinado.

b) incompatible.

c) compatible indeterminado.

3.2.6. Considerar el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x+y+az &= 2 \\ x+y+bz &= 3 \end{aligned}\right\}$$

a) ¿Existen valores de a, b para los que el sistema es compatible determinado?

b) ¿Para qué valores de a, b, el sistema es incompatible?

3.2.7. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{llll} x & -y & +2z & = 2 \\ x & +y & -z & = 1 \\ 2x & & +az & = c \\ 3x & +y & +bz & = 4 \end{array}\right\}$$

a) Hallar las condiciones que tienen que cumplir los valores de a, b, c para que el sistema sea compatible indeterminado.

b) Hallar las condiciones que tienen que cumplir los valores de a, b, c para que el sistema sea compatible determinado.

3.2.8. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x & +2y & -2z & +2t & = 4 \\ & -3y & +z & +t & = 1 \\ x & +5y & -3z & +t & = m \\ -x & +y & +z & +mt & = 1 \end{array}\right\}$$

a) Mostrar que si el sistema tiene solución, ésta no es única.

b) Encontrar los valores de m para que exista solución.

3.2.9. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{cccl} x & +y & +(1+m)z & = 4-m \\ (1-m)x & -y & +2z & = -2 \\ 2x & +my & +3z & = 2-m \end{array}\right\}$$

dependiente de m.

Hallar razonadamente:

a) Para qué valores de m el sistema es compatible determinado.

b) Para qué valores de m el sistema es compatible.

c) Para qué valores de m el sistema es incompatible.

Sol. 3.2.3ii).: $b = -19,\ c = 2$.

Sol. 3.2.4 a).: $y = 2$.

Reducción de Gauss-Jordan.

Una vez decidido el carácter del sistema, hemos visto que si es compatible, la sustitución regresiva de las incógnitas que son determinadas o se pueden despejar en función de otras, da las soluciones del sistema. Mirando de nuevo las matrices de los sistemas que van quedando al sustituir, vemos que van evolucionando de manera que se van haciendo 1 los elementos de las esquinas de los escalones (llamados pivotes), y se hacen cero los elementos sobre estos pivotes. Lo podemos hacer todo matricialmente hasta el final y entonces se dice que se resuelve el sistema por la **Reducción de Gauss-Jordan**

Veámoslo en el ejemplo 4) (págs. 54 y 60): Una vez conseguido el sistema en la forma escalonada, despejar x_4 es pasar del último sistema

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & =1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & =0 \\ & & & 9x_4 & =9 \end{array}\right\} \quad de \quad matriz \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

al sistema

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & =1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & =0 \\ & & & x_4 & =1 \end{array}\right\} \quad de \quad matriz \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

obtenidos dividiendo la última fila por 9.

Sustituir x_4 en las ecuaciones anteriores es pasar al sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & & =0 \\ & x_2 & +x_3 & & =1 \\ & & & x_4 & =1 \end{array}\right\}$$

de matriz

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad obtenida \ de \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

restando la tercera fila a la primera y sumando la tercera fila a la segunda.

Como sustituir en las ecuaciones anteriores es pasar a un sistema donde no aparece la incógnita x_4, es decir, donde los coeficientes de x_4 son nulos en todas las ecuaciones excepto en la última, en la matriz escalonada ampliada, del último sistema, los números de la columna de x_4, excepto el último, son ceros.

Despejar x_2 y sustituirla en la primera ecuación es pasar a otro sistema donde sólo aparece x_2 en la segunda ecuación. Este sistema tiene una matriz escalonada ampliada que tiene ceros en la columna de x_2 encima del 1 correspondiente a x_2 en la segunda ecuación:

Ahora hemos pasado al sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrrl} x_1 & & -4x_3 & & = & -3 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{array}\right\}$$

de matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \textit{obtenida de} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

restando la segunda fila multiplicada por 3 de la primera fila.

Como la columna de x_3 no da escalón, se puede pasar al segundo miembro, y es indeterminada porque puede tomar cualquier valor; si $x_3 = k$, se tienen las soluciones:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & & & & = & 4k & -3 \\ & x_2 & & & = & -k & +1 \\ & x_3 & & & = & k & \\ & & & x_4 & = & & 1 \end{array}\right\} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El procedimiento descrito, realizado en las matrices, desde el principio al final, en las matrices A y $A|b$ es la **Reducción de Gauss-Jordan para resolver el sistema AX=b:** consiste en escribir la matriz ampliada del sistema, y reducirla a forma escalonada mediante operaciones elementales. En el caso en que sea compatible, hacer 1 todos los pivotes y anular los elementos por encima de los pivotes con más operaciones elementales. Luego rellenamos las incógnitas en las columnas correspondientes y tenemos en el caso compatible determinado, los valores de las incógnitas; en el caso compatible indeterminado pasamos al segundo miembro las incógnitas cuyas columnas no dan escalón y las sustituimos por parámetros variables.

Veamos ahora un ejemplo resuelto con la reducción de Gauss-Jordan desde el principio.

7)

$$\left.\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & +3x_6 = & 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & +2x_4 & +4x_5 & +7x_6 = & 2 \\ -2x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -x_4 & +20x_5 & +14x_6 = & 21 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +6x_4 & +7x_5 & +10x_6 = & 8 \end{array}\right\}$$

equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ -2 & -3 & -3 & -1 & 20 & 14 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix}$$

La reducción de Gauss-Jordan de la matriz ampliada del sistema junto a la matriz del sistema da:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 4 & 7 & 2 \\ -2 & -3 & -3 & -1 & 20 & 14 & 21 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 7 & 10 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 22 & 20 & 21 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20 & 19 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 8 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 8 & 10 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & -7 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 10 & 0 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -27 & 0 & 104 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 10 & 0 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Rellenando ahora las incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrcr} x_1 & & +3x_3 & & -27x_5 & & = & 104 \\ & x_2 & -x_3 & & +10x_5 & & = & -42 \\ & & & x_4 & +4x_5 & & = & -19 \\ & & & & & x_6 & = & 6 \end{array}\right\} \equiv$$

$$\equiv \left.\begin{array}{rrrrlrr} x_1 & & & & = 104 & -3x_3 & +27x_5 \\ & x_2 & & & = -42 & +x_3 & -10x_5 \\ & & x_4 & & = -19 & & -4x_5 \\ & & & x_6 & = 6 & & \end{array}\right\}$$

donde hemos pasado al segundo miembro las incógnitas que no dan escalón.

Las soluciones del sistema están constituidas por los $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, tales que:

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 104 & -3x_3 & +27x_5 \\ x_2 & = & -42 & +x_3 & -10x_5 \\ x_3 & = & & x_3 & \\ x_4 & = & -19 & & -4x_5 \\ x_5 & = & & & x_5 \\ x_6 & = & 6 & & \end{array} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 104 \\ -42 \\ 0 \\ -19 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 27 \\ -10 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 104 \\ -42 \\ 0 \\ -19 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 27 \\ -10 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde λ_1 y λ_2 varian arbitraria e independientemente.

Ejercicios:

3.3.1. Resolver utilizando la reducción de Gauss-Jordan los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$a)\quad \left.\begin{array}{rrrl} x & +2y & -z = & -3 \\ 3x & +7y & +2z = & 1 \\ 4x & -2y & +z = & -2 \end{array}\right\} \qquad b)\quad \left.\begin{array}{rrrrl} & 2y & -z & +t = & 6 \\ x & -4y & +z & -2t = & -9 \\ 2x & -7y & -2z & +t = & 10 \\ & 3y & & -4t = & -16 \end{array}\right\}$$

$$c)\quad \left.\begin{array}{rrrrl} x & -y & +z & -t = & 0 \\ 2x & -2y & -z & +t = & 3 \\ -x & +y & +2z & -2t = & -3 \\ -2x & +2y & +3z & -t = & 8 \end{array}\right\}$$

Sol. 3.3.1: a) $x = -1, y = 0, z = 2$ b) $x = 1, y = 0, z = -2, t = 4$ c) $(x, y, z, t) = (1, 0, 11/2, 13/2) + \lambda(1, 1, 0, 0)$

Si tenemos varios sistemas con la misma matriz de coeficientes, podemos resolverlos todos a la vez, ampliando la matriz del sistema con las columnas de los términos independientes de los sistemas dados y haciendo en esta matriz más ampliada, las operaciones elementales que escalonen la matriz de los coeficientes.

3.3.2. Resolver de manera simultánea por el método de Gauss-Jordan los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} & & z & -2t = & 0 \\ 3x & -6y & +2z & = & -3 \\ x & -2y & +z & -t = & -1 \\ 2x & -3y & & +3t = & -1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rrrrl} & & z & -2t = & -1 \\ 3x & -6y & +2z & = & 2 \\ x & -2y & +z & -t = & 0 \\ 2x & -3y & & +3t = & 3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrl} & & z & -2t = & -2 \\ 3x & -6y & +2z & = & -6 \\ x & -2y & +z & -t = & -3 \\ 2x & -3y & & +3t = & 0 \end{array}\right\}$$

Sol. 3.3.2: $x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 0, t_1 = 0$; $x_2 = 0, y_2 = 0, z_2 = 1, t_2 = 1$; $x_3 = 0, y_3 = 1, z_3 = 0, t_3 = 1$.

La reducción de Gauss-Jordan vale también para una ecuación matricial $AX = B$ donde X es una matriz de n filas y m columnas y B es una matriz de m columnas y el mismo número de filas de A. Llamando X_i a la columna i-ésima de X y B_i a la columna i-ésima en B, la ecuación matricial dada es equivalente al conjunto de sistemas $AX_i = B_i, i \in \{1, ..., m\}$. Los sistemas matriciales pueden ser incompatibles o compatibles y en este caso, determinados o indeterminados. Se puede ver si son compatibles escalonando la matriz ampliada $A|B$, y si son compatibles, resolverlos simultáneamente haciendo la reducción de Gauss-Jordan en dicha matriz ampliada $A|B$.

Cuando B=I, la solución de la ecuación AX=I se llama inversa a la derecha de A. Puede no existir y si A no es cuadrada puede no ser única .

Si A es una matriz cuadrada, la igualdad $AX = I$ "sí" implica $XA = I$. Cuando se estudie la teoría que viene a continuación, usada para demostrar el teorema de caracterización de las matrices invertibles, se puede demostrar esa implicación utilizando la proposición 3', (pág 78), la expresión final de A en la proposición 4 y la unicidad de la inversa. Se propone construir todo el razonamiento en el ejercicio 3.5.4.

Ejercicio:

3.3.3. Demostrar que

1) Si una matriz A tiene inversa a la izquierda, la inversa a la derecha, de existir, es única.

2) Si una matriz A tiene inversa a la derecha, la inversa a la izquierda, de existir, es única.

3) Si una matriz A tiene inversa a la derecha e inversa a la izquierda, ambas coinciden.

Matrices Invertibles.

Nos interesa caracterizar las matrices A tales que los sistemas que se plantean con ellas tienen solución y ésta es única, es decir que todos los sistemas que se plantean como $Ax = b$ son compatibles determinados. Estas matrices A son aquellas para las que existe otra matriz B tal que $AB = I = BA$. Veámoslo:

Si existe B tal que BA=I, dado un sistema de la forma $AX = b$, multiplicándolo a la izquierda por B, obtenemos que la solución, de existir, ha de ser $X = Bb$; para que efectivamente, ésta sea la solución hay que comprobar que $ABb = b$, lo cual se cumple si la matriz B verifica AB=I, es decir, si B es también inversa a la derecha de A, siendo esto cierto cualquiera que sea b.

En un ejercicio anterior se probó que si A tiene inversa a la izquierda y inversa a la derecha, ambas coinciden y son únicas. Esta unicidad es necesaria para que todos los sistemas AX=b tengan solución, porque con matrices A que tuvieran dos inversas a la izquierda distintas, B' y B'' podría existir algún b para el que las condiciones necesarias $x = B'b$ y $x = B''b$, fueran incompatibles entre sí. Por otra parte, para que la condición necesaria $x = Bb$ sea suficiente cualquiera que sea b, ha de ser $ABb = b$ para todo b, para lo cual es necesario que $AB = I$.

Se llaman **invertibles** las matrices A tales que existe una matriz B tal que $BA = I = AB$. Entonces, se llama a B, inversa de A.

Una matriz A invertible no puede tener ninguna columna ni ninguna fila de ceros, porque en estos casos, se tendría, cualquiera que fuera la matriz X, en XA una columna de ceros o en AX una fila de ceros, no obteniéndose nunca la identidad. Queremos ver que además ha de ser cuadrada.

Observemos que una inversa a la derecha X de una matriz A, es una solución de la ecuación $AX = I$ y que una matriz A con la primera columna no nula y con más columnas que filas, al escalonarla, da el primer escalón en la primera columna y por ello, algún escalón con más de una columna, por lo que el sistema $AX = I$, de tener solución, no tiene solución única. Si no tiene solución, la matriz no es invertible y si existen varias soluciones, como estas soluciones serían distintas inversas a la derecha de A, según el problema 3.3.3 no existe inversa a la izquierda. Concluimos que una matriz con más columnas que filas no es invertible.

También se puede concluir que una matriz con más filas que columnas no es invertible, porque si lo fuera, su traspuesta, que tiene más columnas que filas sería invertible, en contra de lo anterior. (Si $AB = I = BA$, ${}^tB^tA = {}^t(AB) = I$ y ${}^tA^tB = (BA)^t = I$).

Entonces, una matriz invertible, además de no tener ninguna fila ni ninguna columna nula, ha de ser cuadrada.

En los ejercicios 3.5.6-3.5.10 de la sección siguiente, se establece otro camino distinto del visto ahora para demostrar que las matrices invertibles han de ser cuadradas.

Caracterización de las matrices invertibles.

Observando lo que pasa en las matrices cuando aplicamos el método de Gauss a un sistema, podemos deducir propiedades de las matrices que nos dan también el método de Gauss para hallar la inversa de una matriz. Y al mismo tiempo, podemos demostrar un teorema que caracteriza a las matrices invertibles como producto de ciertas matrices llamadas elementales.

Las operaciones elementales en una matriz (pág. 60) se pueden expresar en forma matemática como el resultado de multiplicar por la izquierda por las matrices llamadas

Matrices Elementales: Son las matrices obtenidas de las matrices identidad por operaciones elementales. (Diremos que son de tres tipos según el tipo de operación elemental realizado).

Se puede comprobar fácilmente, caso por caso, que al multiplicar a la izquierda una matriz elemental por otra matriz se produce en esta última la operación elemental realizada en la matriz I para obtener la matriz elemental considerada.

También, hagamos las siguientes consideraciones:

a) Si hacemos sucesivamente dos intercambios de las mismas filas de la matriz identidad, la matriz queda invariante. Esto quiere decir que el producto de una matriz elemental del primer tipo por ella misma es la identidad. Por tanto, las matrices elementales correspondientes (del primer tipo) son invertibles y coinciden con su inversa.

b) Si sumamos a una fila de la identidad otra fila multiplicada por un número y luego le sumamos la misma fila multiplicada por el número opuesto obtenemos la identidad. Esto quiere decir también que las dos matrices elementales correspondientes (del segundo tipo) son inversas una de otra, siendo sus inversas del mismo tipo.

c) Si primero multiplicamos una fila de la matriz identidad por un número distinto de cero y luego la multiplicamos por el inverso de dicho número, queda igual. Esto quiere decir que el producto de las dos matrices elementales correspondientes es la identidad. Por tanto, también las matrices elementales del tercer tipo son invertibles y sus inversas son del mismo tipo.

Se deduce de estas consideraciones que las matrices elementales son invertibles y que sus inversas son también matrices elementales.

Nuestro teorema sobre matrices invertibles es:

TEOREMA 1: Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales.

Ya que las matrices elementales son invertibles, la demostración de que toda matriz producto de matrices elementales es invertible es una fácil consecuencia de la siguiente proposición:

Proposición 1: El producto de matrices invertibles es invertible.

Sean $A_1, A_2, ..., A_m$, matrices cuyas inversas respectivas son $B_1, B_2, ..., B_m$, se puede comprobar que la matriz producto $A = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_m$ tiene como inversa $B = B_m ... \cdot B_2 \cdot B_1$.

En efecto, por la propiedad asociativa, en el producto

$$AB = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_m B_m ... \cdot B_2 \cdot B_1$$

empezando por i=m podemos ir simplificando las A_i con las B_i correspondientes y llegar a la identidad.

Lo mismo podemos hacer, empezando por i=1, en el producto

$$BA = B_m ... \cdot B_2 \cdot B_1 A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_m.$$

Para demostrar el teorema tenemos que demostrar también que toda matriz invertible es producto de matrices elementales.

Para ello vamos a usar las proposiciones 2, 3 y 4 siguientes:

Proposición 2: Toda matriz puede reducirse a una matriz escalonada multiplicándola adecuadamente a la izquierda por matrices elementales.

Su demostración se deduce de la observación de la evolución de la matriz del sistema en el procedimiento seguido en el método de Gauss. Se ve en ese procedimiento que **toda matriz se puede reducir a una matriz escalonada haciendo operaciones elementales en sus filas**, o lo que es lo mismo, que dada una matriz, multiplicando a la izquierda, sucesivamente, por matrices elementales se puede llegar a una matriz escalonada.

Por tanto, dada la matriz A, existen matrices elementales: $E_1, E_2, ..., E_k$, tales que

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot ...E_1 A = E$$

donde E es una matriz escalonada.

Conviene comprobarlo en el siguiente Ejercicio:

3.4.1. Encontrar una sucesión de matrices elementales $E_1, \cdots, E_k$ tal que $E_k \cdots E_1 A = E$ donde E es una matriz escalonada y A es una de las matrices dadas a continuación:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ b)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ c)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix},\ d)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$e)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ f)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix},\ g)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$h)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ i)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ j)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Para la mejor comprensión de las demostraciones de las proposiciones siguientes se proponen los ejercicios:

3.4.2. Comprobar que una vez obtenida la matriz escalonada en los casos c), e), i) y j) anteriores podemos llegar desde la matriz escalonada a la matriz identidad haciendo más operaciones elementales, por el mismo procedimiento usado para despejar las incógnitas en la reducción de Gauss-Jordan.

3.4.3. Comprobar que una vez obtenida la matriz escalonada en los casos d), f), g) y h) anteriores no podemos llegar desde la matriz escalonada a la matriz identidad haciendo más operaciones elementales, por el mismo procedimiento usado para despejar las incógnitas en la reducción de Gauss-Jordan.

Antes de pasar a la demostración completa del teorema, vamos a ver un ejemplo en el que se llega desde una matriz a la identidad por transformaciones elementales, lo cual equivale a multiplicar la matriz por matrices elementales y esto pone de manifiesto que la matriz dada es producto de matrices elementales y por tanto invertible:

La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ pasa, multiplicándola a la izquierda por las matrices elementales:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sucesivamente, a las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Como esta última tiene todos los escalones de longitud una columna, siendo por tanto, los elementos de la diagonal principal distintos de cero, podemos conseguir que estos elementos sean unos, dividiendo adecuadamente las filas, lo que aquí se reduce a dividir la última fila por -4, es decir, a multiplicar ahora a la izquierda por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

habiendo llegado a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En esta matriz con 1 en todos los elementos de la diagonal y ceros en todos los sitios debajo de la diagonal, podemos seguir haciendo operaciones elementales que anulen también los números en los sitios por encima de la diagonal, llegando así a la identidad.

Efectivamente, multiplicando sucesivamente a la izquierda, por las matrices elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos la identidad (compruébese).

Hemos multiplicado, en total, por ocho matrices elementales, que designamos por E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, por orden de utilización.

Entonces: $E_8 \cdot E_7 \cdot E_6 \cdot E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$.

Como las matrices elementales tienen inversas, multiplicando a la izquierda por sus inversas de manera que se vayan simplificando dichas matrices, tenemos:

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} \cdot E_5^{-1} \cdot E_6^{-1} \cdot E_7^{-1} \cdot E_8^{-1}$. Lo cual puede comprobarse teniendo en cuenta que

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; E_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_8^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como también las inversas de matrices elementales son elementales, hemos visto que del hecho de tener la matriz escalonada obtenida de A todos los escalones de longitud una columna (y por ello, todos los elementos de la diagonal distintos de cero), hemos llegado a la expresión de A como producto de matrices elementales. Como estas matrices son invertibles, de la proposición 1 se deduce que A es invertible.

Seguimos ahora con las siguientes etapas para la demostración del teorema:

Proposición 3: Si una matriz A es invertible, la matriz escalonada E a la que se reduce, tiene todos los escalones de longitud una columna, estando el primer escalón en la primera fila y primera columna.

Demostración:

Si A es invertible, A tiene que ser cuadrada y la existencia de una matriz B tal que BA=I implica que la primera columna de A no es toda de ceros, porque entonces la primera columna del producto BA sería toda de ceros y no coincidiría con la primera columna de I; por lo que se puede conseguir (si es necesario por un cambio de orden de las filas) que el elemento de la primera fila y primera columna sea distinto de cero, empezando por tanto los escalones en este lugar. Veamos que al seguir escalonando la matriz, la matriz escalonada E a la que se reduce A tiene todos los escalones de longitud una columna razonando por reducción al absurdo: Si tuviera algún escalón con más de una columna, al ir recorriendo los pivotes y llegar al primero de tales escalones, nos desplazamos a la derecha por lo menos el espacio de dos columnas, saliéndonos de la diagonal y por ello al seguir recorriendo pivotes agotamos antes las columnas que las filas, quedando por tanto la última fila entera por debajo de la línea de pivotes y estando por ello formada por ceros. Entonces, multiplicando por las matrices elementales correspondientes tendríamos:

$$E = E_k E_{k-1}, ... E_1 A$$

donde E es una matriz escalonada con la última fila toda de ceros.

Ahora bien, si A es invertible, existe B tal que AB=I. Entonces,

$$EB = E_k E_{k-1} ... E_1 AB = E_k E_{k-1} ... E_1 I = E_k E_{k-1} ... E_1$$

y por tanto, como las matrices elementales tienen inversa,

$$EBE_1^{-1} ... E_k^{-1} = E_k E_{k-1} ... E_1 E_1^{-1} ... E_k^{-1} = I$$

Si la matriz E tuviera la última fila de ceros, la matriz $EBE_1^{-1}.....E_m^{-1}$ tendría también la última fila de ceros por tenerla E y esto es una contradicción ya que I tiene un 1 en su última fila. Quedando así demostrada la proposición 3.

Esta proposición es también cierta si se debilita la hipótesis:

Proposición 3': Si una matriz A cuadrada tiene inversa a la derecha, la matriz escalonada E a la que se reduce, tiene todos los escalones de longitud una columna, estando el primer escalón en la primera fila y primera columna.

La demostración se sigue de que de no ser así la matriz escalonada E tendría la última fila de ceros, pero esto no puede ocurrir si la matriz A tiene inversa a la derecha como se ha visto en la demostración de la proposición 3.

Proposición 4: Si al escalonar una matriz cuadrada A, todos los escalones son de una columna, estando el escalón de la primera fila en la primera columna, A es producto de matrices elementales.

Demostración: Sea E la matriz escalonada a la que se reduce A. Como estamos suponiendo que A es cuadrada y el tamaño de la matriz queda invariante por las operaciones elementales, E también ha de ser cuadrada. Tenemos un pivote en el sitio de la primera columna de la primera fila. Si los escalones de E son todos de una columna, al ir recorriendo los pivotes, vamos desplazándonos a la derecha el espacio de una columna al mismo tiempo que nos desplazamos hacia abajo el espacio de cada fila, recorriendo así, la diagonal principal de E, que por tanto está formada por números distintos de cero. Dividiendo cada fila por el número que está en la diagonal de esa fila, (lo cual es hacer operaciones elementales) podemos hacer todos los elementos de la diagonal iguales a 1. Y con estos 1, podemos seguir haciendo operaciones elementales para anular todos los elementos encima de ellos, (según la reducción de Gauss-Jordan), llegando entonces a la matriz identidad.

Entonces, podemos afirmar que, en la hipótesis de la proposición 4, además de las matrices elementales: $E_1, E_2, ..., E_k$, tales que

$$E_k \cdot E_{k-1} ... E_1 A = E$$

donde E es una matriz escalonada, hay matrices elementales $E_{k+1}, E_{k+2} ... E_m$ tales que

$$E_m E_{m-1} ... E_{k+1} E_k ... E_1 A = I$$

Como las matrices elementales tienen inversa, multiplicando a la izquierda la igualdad anterior por las inversas de las matrices elementales, obtenemos

$$A = E_1^{-1}...E_k^{-1}...E_m^{-1}$$

Y como las inversas de matrices elementales son matrices elementales, hemos llegado a una expresión de A como producto de matrices elementales.

Para terminar la demostración del Teorema 1, es decir, para demostrar que toda matriz invertible es producto de matrices elementales, tenemos en cuenta, primero, que por la proposición 2, una matriz A siempre se puede escalonar, luego, que cuando A es invertible, según la proposición 3, la matriz escalonada E, que se obtiene de A, tiene todos los escalones de una columna, estando el primer escalón de la primera fila en la primera columna. Entonces, la proposición 4 establece que la matriz A invertible es producto de matrices elementales.

Por otra parte, enlazando la proposición 4 y la proposición 1, tenemos que si al escalonar una matriz cuadrada A, todos los escalones son de una columna, estando el escalón de la primera fila en la primera columna, A es invertible.

Además, la proposición 3 implica que si al escalonar una matriz cuadrada A, algún escalón es de más de una columna, A no es invertible, por lo que también es cierto el

Teorema 2: Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si al escalonar A, se obtiene una matriz escalonada con todos los escalones de longitud una columna, estando el primer escalón en la primera columna.

Ejercicios:

3.5.1. Decidir cuáles de las matrices del ejercicio 3.4.1 son invertibles mirando la matriz escalonada a la que han sido reducidas.

3.5.2. Expresar las inversas de las matrices del ejercicio 3.4.1. que sean invertibles como producto de matrices elementales.

3.5.3. Expresar las matrices del ejercicio 3.4.1 que sean invertibles como producto de matrices elementales.

3.5.4. Demostrar que toda matriz cuadrada con inversa a la derecha tiene inversa a la izquierda.

3.5.5. Demostrar que toda matriz cuadrada con inversa a la izquierda tiene inversa a la derecha.

3.5.6. Demostrar que si una matriz A con más filas que columnas se puede reducir por operaciones elementales a la matriz:

$$\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde n es el número de columnas de A, puede tener muchas inversas a la izquierda.

3.5.7. Demostrar que dada una matriz con más filas que columnas, si tiene inversa a la izquierda, esta no es única.

3.5.8. Demostrar que si una matriz tiene más de una inversa a la izquierda, no puede tener inversa a la derecha.

3.5.9. Demostrar que una matriz con más filas que columnas no puede ser invertible.

3.5.10. Demostrar que una matriz con más columnas que filas no puede ser invertible.

Deducir de los ejercicios anteriores que sólo las matrices cuadradas pueden ser invertibles.

Método de Gauss para obtener la inversa de una matriz invertible:

Al repasar la demostración de la proposición 4 nos podemos dar cuenta de que la matriz producto: $E_m...E_{k+1}E_kE_{k-1}...E_1$ es inversa a la izquierda de A y dada la expresión de A obtenida al final de la demostración de dicha proposición,($A = E_1^{-1} \cdots E_m^{-1}$) podemos comprobar que ese producto es también inversa a la derecha de A. Es decir,

$$A^{-1} = E_m...E_{k+1}E_kE_{k-1}...E_1$$

Como $E_m...E_{k+1}E_kE_{k-1}...E_1 = E_m...E_{k+1}E_kE_{k-1}...E_1I$, la matriz A^{-1} se puede obtener haciendo en I las operaciones elementales correspondientes a las matrices elementales escritas, y estas operaciones son las mismas que hemos hecho en A para llegar a I. Por eso, para obtener la matriz inversa de A colocamos la matriz I al lado de la matriz A en la forma (A| I) y hacemos en la matriz I las mismas operaciones elementales que en la A. Cuando a la izquierda de la barra hayamos llegado a la matriz I, es que hemos multiplicado A por $E_m \cdots E_1$ y lo mismo I, por lo que a la derecha de la barra habremos llegado a la matriz inversa de A.

Veámoslo con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Escribimos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y ahora hacemos en la unión de las dos matrices, las transformaciones elementales que llevan la matriz A a la identidad.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz obtenida para A^{-1} es también la matriz que habríamos obtenido como solución de la ecuación matricial $AX = I$ por el método de Gauss-Jordan. Esta solución X es una inversa a la derecha, y además, al haber expresado esta X como producto de matrices elementales, estamos seguros de que es inversa a la derecha y a la izquierda; y la unicidad de la inversa nos asegura la unicidad del resultado, cualquiera que sea el camino seguido, o sea, cualesquiera que sean las operaciones elementales realizadas.

Ejercicios:

3.6.1. Utilizar el método de Gauss para hallar las inversas de las matrices del ejercicio 3.4.1 que sean invertibles y comprobar los resultados del ejercicio 3.5.2.

3.6.2. Los sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrr} & 2y & +4z = & -3 \\ x & +y & +3z = & 1 \\ 3x & +3y & +7z = & -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rrrr} -2x & +y & +z = & -3 \\ 3x & -2y & +z = & 1 \\ x & -y & +z = & -2 \end{array}\right\}$$

se pueden expresar matricialmente de la forma $AX = b$ donde A es una matriz invertible. Su inversa ha sido calculada en los ejercicios anteriores; usarla para hallar las soluciones de los sistemas.

3.6.3. Demostrar que la traspuesta de la inversa de una matriz es la inversa de la traspuesta de dicha matriz.

3.6.4. Explicar por qué una matriz triangular superior es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal son distintos de cero.

3.6.5. Explicar por qué la inversa de una matriz triangular superior invertible es también triangular superior.

3.6.6. Demostrar que una matriz triangular inferior es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal son distintos de cero.

3.6.7. Demostrar que la inversa de una matriz triangular inferior invertible es también triangular inferior.

La expresión de la inversa como producto de matrices elementales nos permite también entender la **Reducción de Gauss-Jordan para resolver el sistema AX=b cuando A es matriz invertible**:

Con la expresión $A^{-1} = E_r...E_{m+1}E_mE_{m-1}...E_1$, multiplicando a la izquierda por A^{-1}, obtenemos:

$$X = A^{-1}b = E_r...E_{m+1}E_mE_{m-1}...E_1b$$

Luego X es el resultado de hacer en b las operaciones elementales que llevan A a I. Escribiendo la matriz $A|b$ y haciendo en ésta dichas operaciones, cuando a la izquierda de la barra vertical obtengamos la matriz I, a la derecha habremos obtenido la matriz solución de las X. Ver el ejemplo 3 de la página 42 del libro de Fraleigh-Beauregard.

PROBLEMAS RESUELTOS DE LOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE ÁLGEBRA LINEAL I.

1. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) La matriz A se puede escribir como producto de matrices elementales. Establecer razonadamente por qué.

b) Encontrar la expresión de A^{-1} como producto de matrices elementales.

c) Encontrar la expresión de A como producto de matrices elementales.

a)

La matriz se puede escribir como producto de matrices elementales si haciendo en ella operaciones elementales se puede llegar a la identidad: Intercambiando la primera fila y la tercera fila obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

restando en la matriz resultante a la tercera fila el doble de la primera obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

restando en la matriz resultante a la cuarta fila la segunda fila se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y restando en la matriz resultante la tercera fila de la cuarta fila obtenemos:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ahora, multiplicando por -1 la cuarta fila de la matriz resultante se obtiene:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

Haciendo lo mismo en la tercera fila obtenemos:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

Sumando a la tercera fila de la matriz resultante la cuarta fila multiplicada por 2 se obtiene:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

Restando a la segunda fila de la matriz resultante la tercera fila multiplicada por 2, obtenemos:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

Y restando a la primera fila de la matriz resultante la tercera fila obtenemos la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Por tanto la matriz se puede poner como producto de matrices elementales.

b)

La inversa de la matriz dada es el producto de las matrices elementales que representan las operaciones elementales que hemos hecho y son las que figuran a la izquierda en los productos de los miembros de la derecha de cada igualdad anterior (en el orden inverso en que las hemos hecho):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

porque dicho producto multiplicado por la matriz dada da la identidad.

c)

La matriz dada es el producto de las inversas de las matrices elementales empleadas (que también son matrices elementales) en el orden inverso al anterior.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & a & a \\ 1 & b & b & a \\ 1 & b & b & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar las condiciones que tienen que cumplir a y b para que A no sea invertible.

b) Hallar escalonando en las condiciones del apartado anterior, el rango de A.

Solución:

a)

Una matriz cuadrada es invertible si mediante operaciones elementales se pùede reducir a una matriz triangular superior con las entradas diagonales distintas de cero

Para triangularla, intercambiamos la última fila y la primera, lo cual es una operación elemental y obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b & 1 \\ 1 & b & a & a \\ 1 & b & b & a \\ 1 & a & a & a \end{pmatrix}$$

Después restamos la primera fila a cada una de las otras filas, obteniendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-b & a-b & a-1 \end{pmatrix}$$

Permutando ahora su cuarta fila con la tercera y después con la segunda, obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b & 1 \\ 0 & a-b & a-b & a-1 \\ 0 & 0 & a-b & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Para que las entradas diagonales de esta matriz triangular superior sean distintas de cero, ha de ser $a \neq b$ y $a \neq 1$.

Tenemos pues que las condiciones para que A no sea invertible son $a = b$ ó $a = 1$

b)

Sustituyendo en la matriz anterior $a = b$, $a = 1$, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es siempre de rango 1.

Sustituyendo $a = 1$, se obtiene cuando $b \neq a$, la matriz con tres escalones, por tanto de rango 3.

Si $b = a \neq 1$ se obtiene una matriz que se escalona restando a la tercera fila la segunda y a la cuarta fila la segunda obteniéndose una escalonada de rango 2, siendo por tanto, su rango 2.

3.

a) Explicar que la traspuesta de una matriz elemental de orden 3 es otra matriz elemental, comprobándolo en todos los casos.

b) Demostrar, dada una matriz A, (sin utilizar el determinante de A), que:

A es invertible si y sólo si ${}^tA$ es invertible.

Solución:

a)

Las matrices elementales correspondientes a operaciones elementales consistentes en multiplicar una fila por un número son diagonales, coincidiendo con las traspuestas, por lo que sus traspuestas son elementales.

Las matrices elementales correspondientes a permutación de filas son simétricas por lo que también coinciden con sus traspuestas y son elementales.

Nos quedan las matrices elementales correspondientes a sumar a una fila otra fila multiplicada por un número. Se puede ver escribiéndolas, que sus traspuestas corresponden a sumar a la otra fila la anterior multiplicada por el mismo número, por tanto, también son elementales. p. ej.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Como una matriz A es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales y como la traspuesta de una matriz es el producto de las traspuestas de las matrices en orden inverso, se obtiene la traspuesta de una matriz invertible como producto de traspuestas de matrices elementales, que son elementales, siendo A^t es invertible si y sólo si A lo es.

4.

Considerar el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z & =1 \\ x+y+az & =2 \\ x+y+bz & =3 \end{array}\right\}$$

a) ¿Existen valores de $a,\ b$ para los que el sistema es compatible determinado?

b) ¿Para qué valores de $a,\ b$, el sistema es incompatible?

Solución:

a)

El sistema escrito en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema sea compatible determinado deben de ser igual a 3, los rangos de la matriz ampliada y de la matriz del sistema, pero la matriz del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

que escalonada por operaciones elementales evoluciona según :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix}$$

que escalonada da como máximo rango 2, porque ya tiene un primer escalón de longitud 2 y es cuadrada.

Por tanto el sistema nunca es compatible determinado.

b)

Se ve a simple vista que el sistema es incompatible si $a = 1 = b$, ya que como $1 \neq 2 \neq 3 \neq 1$, (términos independientes), aparecen tres ecuaciones incompatibles.

Además, es incompatible siempre que el rango de la matriz del sistema sea distinto del de la matriz ampliada del sistema. Estudiémoslo:

Si $a \neq 1,\ b \neq 1$, el escalonamiento simultáneo de la matriz del sistema y de la ampliada da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & b & 3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & 2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{b-1}{a-1} \end{pmatrix}$$

de donde es incompatible si $2-\frac{b-1}{a-1} \neq 0$ o equivalentemente si $2(a-1) \neq b-1$, es decir, si $b \neq 2a-1$.

Si $a = 1,\ b \neq 1$, el rango de la matriz del sistema es 2. La matriz ampliada evoluciona al escalonarla según:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & b & 3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & 2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde se ve que si $b \neq 1$ $a = 1$, es de rango 3, siendo el sistema incompatible.

Si $a \neq 1$ $b = 1$, tenemos también que el sistema es incompatible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix} \propto$$

$$\propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde se ve que si $a \neq 1$, $b = 1$, la matriz del sistema es de rango 2 y la ampliada es de rango 3, siendo el sistema incompatible.

No hay más casos a considerar.

5.

Estudiar usando el método de Gauss las condiciones que debe cumplir el parámetro a para que el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & ay & + & a^2z & = a \\ ax & + & a^2y & - & a^3z & = 0 \\ a^2x & + & ay & + & z & = 1 \end{array}\right\}$$

sea

a) compatible determinado.

b) compatible indeterminado.

c) incompatible.

Indíquese cuál ha sido la transformación elemental realizada en cada etapa del procedimiento elegido para aplicar el método de Gauss.

Solución:

a)

El sistema es compatible determinado si al escalonar simultáneamente la matriz del sistema y su ampliada, se obtienen iguales sus rangos respectivos.

Escalonemos la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a \\ a & a^2 & -a^3 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sabiendo que la última columna pertenece a dicha matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a \\ a & a^2 & -a^3 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a \\ 0 & 0 & -2a^3 & -a^2 \\ a^2 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \propto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a \\ 0 & 0 & -2a^3 & -a^2 \\ 0 & a-a^3 & 1-a^4 & 1-a^3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a \\ 0 & a-a^3 & 1-a^4 & 1-a^3 \\ 0 & 0 & -2a^3 & -a^2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es escalonada de rango 3 si $a - a^3 \neq 0$ y además $-2a^3 \neq 0$, es decir, si $a \neq 0$ y $a(1-a^2) \neq 0 (\equiv a \notin \{-1, 0, 1\})$, luego si $a \notin \{-1, 0, 1\}$ el sistema es compatible determinado.

Si $a = 0$, el rango de la matriz del sistema es 2 igual al rango de la ampliada, menor que 3, que es el número de incógnitas, concluyéndose que si $a = 0$, el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 1$, el rango de la matriz del sistema es 2 igual al rango de la ampliada, menor que 3, que es el número de incógnitas, concluyéndose que si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = -1$, hemos llegado a la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz del sistema es 2 y el rango de la ampliada es 3 concluyéndose que si $a = -1$, el sistema es incompatible.

Referencias.

(A) Algebra Lineal y aplicaciones. J. Arvesú Carballo, R. Alvarez Nodarse, F. Marcellán Español. Ed. Síntesis Madrid. 1999.

(FB) Algebra lineal. J. B. Fraleigh y R. A. Beauregard. Ed. Addison-Wesley /Iberoamericana, 1989.

[M] Matemáticas 2 Bachillerato. Mª Felicidad Monteagudo Martínez. Jesús Paz Fernández Ed. Luis Vives. 2003.

(Vi) Problemas de Algebra. A. de la Villa. Ed. Clagsa, 1994.

DETERMINANTES y SISTEMAS de ECUACIONES.

Introducción.

Los determinantes de las matrices son números asociados a dichas matrices.

Hemos visto matrices asociadas a los sistemas de ecuaciones. Veremos que cuando calculamos determinantes de esas matrices y de submatrices suyas, obtenemos información sobre la compatibilidad y determinación de dichos sistemas.

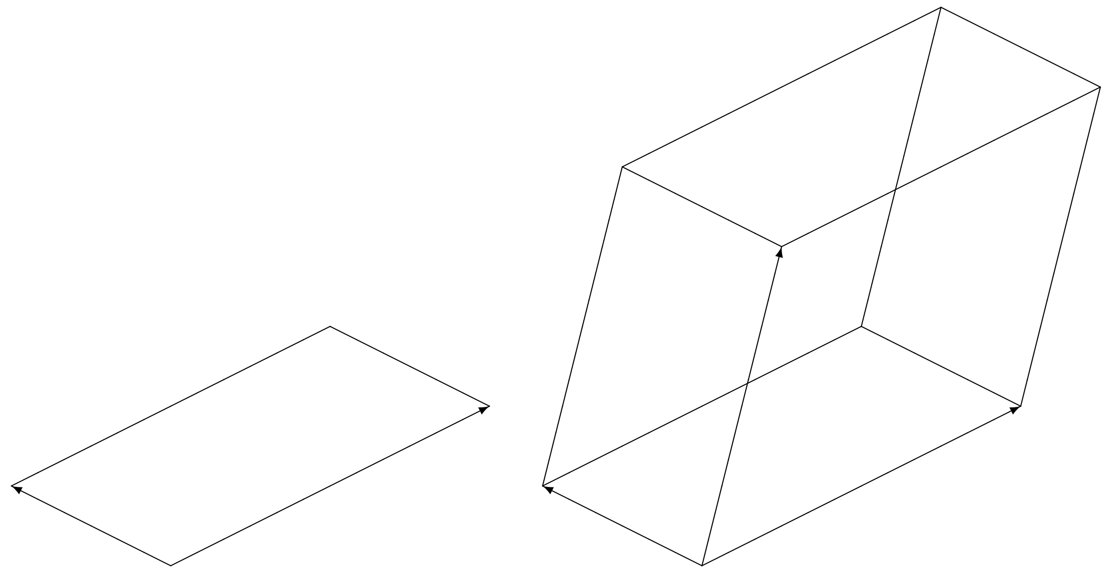
Los determinantes también tienen interpretación geométrica. Vamos a empezar motivando su definición por su significado geométrico.

Escribiendo en filas las coordenadas de un vector de la recta (en un vector unidad fijado), de dos vectores del plano (en un sistema de referencia bidimensional cartesiano) o de tres vectores del espacio (en un sitema de referencia tridimensional cartesiano), tenemos, respectivamente, una matriz 1×1, una matriz 2×2 o una matriz 3×3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Al mismo tiempo, dado un vector, podemos considerar su longitud, que es un número, que coincide con su coordenada; dados dos vectores, podemos construir un paralelogramo cuyos lados son los vectores dados y considerar su área; Dados tres vectores, podemos construir un paralelepípedo cuyas aristas son los tres vectores y considerar su volumen.

Longitud, área y volumen son "números" asociados a las matrices anteriores, que hemos puesto en correspondencia con un vector, dos vectores o tres vectores. Que vamos a llamar determinantes de las matrices escritas,



Estudiando las propiedades que han de cumplir, se ve cómo se puede obtener una regla para su cálculo.

Si quisiéramos que la longitud, el área o el volumen fueran números asociados a estas matrices y los designáramos por las matrices entre barras, los "números" asociados a esas matrices tendrían que cumplir:

a) Si multiplicamos uno de los vectores por una constante positiva o nula, el número asociado queda multiplicado por esa constante (ya que la longitud, área o volumen correspondientes quedan multiplicados por esa constante cuando uno de los vectores se multiplica por la constante). Cuando multiplicamos por la constante el primer vector se tendría:

$$|ra_{11}| = r|a_{11}|, \qquad \begin{vmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

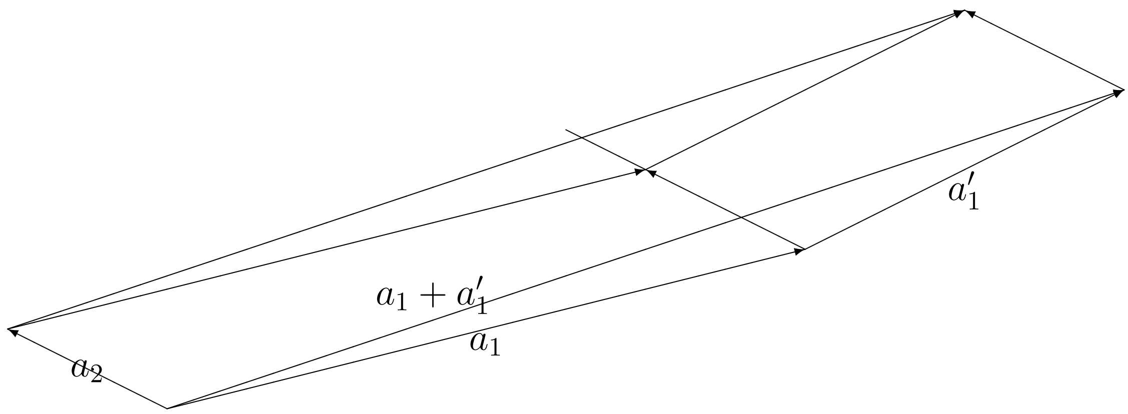
Lo análogo ocurre con las otras filas cuando multiplicamos por la constante las otras filas.

b) Si en un vector, una pareja o una terna de vectores, sustituimos un vector por la suma de otros dos, el número asociado (longitud, área o volumen) a la matriz correspondiente es la suma de los números asociados a las dos matrices de vectores correspondientes a los vectores sumandos.

Es trivial cuando la matriz es 1×1:

$$|a_{11} + a'_{11}| = |a_{11}| + |a'_{11}|$$

En la figura siguiente puede verse que la suma de las áreas de los dos paralelogramos construidos sobre a_1 y a'_1 con lado a_2 es igual al área del paralelogramo construido sobre $a_1 + a'_1$ con lado a_2 desplazando el lado común a_2 en el sentido de a_2 hasta que los otros dos lados de los rectángulos queden en la recta de $a_1 + a'_1$.



$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

En cuanto a los paralelepípedos que corresponden a matrices 3×3, debido a que los volúmenes de los paralelepípedos construidos sobre paralelogramos con arista un tercer vector común son aditivos respecto a los paralelogramos sobre los que han sido construidos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} + a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

También ocurriría con las otras filas.

Del apartado b) se deduce que el apartado a) es cierto también cuando una fila se multiplica por una constante negativa ya que si $r = -1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

c) Si uno de los vectores es proporcional a alguno de los otros, el área o el volumen es cero. (Esta propiedad sólo tiene sentido cuando la matriz es de orden mayor que 1).

Vamos a deducir que si las áreas y los volúmenes fueran números asociados a las matrices cuyas filas son los vectores dados, con las propiedades b) c) y a) estos "números" cambiarían de signo al cambiar el orden de las filas de las matrices por una permutación de dos filas:

En volúmenes se verificaría **Proposición 1:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{a_{11}+a_{21}}{2} + \frac{a_{11}-a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} + \frac{a_{12}-a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} + \frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{21}}{2} - \frac{a_{11}-a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} - \frac{a_{12}-a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} - \frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

por b)

$$= \begin{vmatrix} \frac{a_{11}+a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{21}}{2} - \frac{a_{11}-a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} - \frac{a_{12}-a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} - \frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \frac{a_{11}-a_{21}}{2} & \frac{a_{12}-a_{22}}{2} & \frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{21}}{2}-\frac{a_{11}-a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2}-\frac{a_{12}-a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2}-\frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

por b)

$$=\begin{vmatrix} \frac{a_{11}+a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{a_{11}+a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} \\ -\frac{a_{11}-a_{21}}{2} & -\frac{a_{12}-a_{22}}{2} & -\frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \frac{a_{11}-a_{21}}{2} & \frac{a_{12}-a_{22}}{2} & \frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{a_{11}-a_{21}}{2} & \frac{a_{12}-a_{22}}{2} & \frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ -\frac{a_{11}-a_{21}}{2} & -\frac{a_{21}-a_{22}}{2} & -\frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

porque los volúmenes asociados a vectores proporcionales son cero, por c)

$$=\begin{vmatrix} \frac{a_{11}+a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} \\ -\frac{a_{11}-a_{21}}{2} & -\frac{a_{12}-a_{22}}{2} & -\frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{a_{11}-a_{21}}{2} & \frac{a_{12}-a_{22}}{2} & \frac{a_{13}-a_{23}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Por otra parte, análogamente, se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{a_{11}+a_{21}}{2}+\frac{a_{21}-a_{11}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2}+\frac{a_{22}-a_{12}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2}+\frac{a_{23}-a_{13}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{21}}{2}-\frac{a_{21}-a_{11}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2}-\frac{a_{22}-a_{12}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2}-\frac{a_{23}-a_{13}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{a_{11}+a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} \\ -\frac{a_{21}-a_{11}}{2} & -\frac{a_{22}-a_{12}}{2} & -\frac{a_{23}-a_{13}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{a_{21}-a_{11}}{2} & \frac{a_{22}-a_{12}}{2} & \frac{a_{23}-a_{13}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{21}}{2} & \frac{a_{12}+a_{22}}{2} & \frac{a_{13}+a_{23}}{2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

expresión opuesta a la anterior, teniendo en cuenta la propiedad a) para $r = -1$.

El cambio de signo se comprobaría de la manera análoga si permutáramos la segunda y la tercera filas o la primera y la tercera filas.

Y la comprobación del correspondiente cambio de signo en las áreas y en los volúmenes es exactamente igual al cambio hecho entre primera y segunda filas. (Hágase como ejercicio).

Relación entre los determinantes y operaciones elementales.

Podemos relacionar ahora las tres propiedades a), b) y c) que tendrían que cumplir los "números" asociados a las matrices con las operaciones elementales en las matrices:

De la propiedades b), c) y a) hemos deducido primero la propiedad siguiente: que al hacer en la matriz una operación elemental de permutación de filas cambia de signo el "número" asociado; la vamos a llamar propiedad 1).

De la propiedad a) tenemos: al hacer en una matriz la operación elemental de multiplicar una fila por una constante, el "número" asociado queda multiplicado por esa constante. La vamos a llamar propiedad 2).

De la propiedad c) junto con la propiedad b) podemos deducir la propiedad siguiente: al hacer en una matriz la operación elemental de sumar a una fila de la matriz otra fila multiplicada por una constante, el "número" asociado queda invariante. (Compruébese como ejercicio). La vamos a llamar propiedad 3).

Las tres propiedades 1), 2) y 3) enunciadas de estos "números" asociados a las matrices nos dicen *cómo están relacionados entre sí* los "números" asociados a *matrices relacionadas por operaciones elementales.* Si las propiedades de estos "números" están relacionadas con las operaciones elementales, que son las que realizamos en las matrices para resolver los sistemas de ecuaciones, podemos pensar que esos números nos dan información sobre la resolubilidad de dichos sistemas.

Asociando a las matrices identidad el número 1, lo cual es coherente con el valor de la longitud, el área y el volumen asociados a las matrices formadas por los vectores coordenados, quedan determinados los "números" asociados a las matrices elementales por las propiedades 1), 2) y 3):

i) Las matrices elementales obtenidas al intercambiar dos filas de la matriz identidad, tendrían como "número" asociado el opuesto del asociado a la matriz identidad, es decir, -1.

ii) Las matrices elementales obtenidas al multiplicar una fila de la identidad por una constante c distinta de cero, según la propiedad a) (o propiedad 2) tienen como "número" asociado el producto de esta constante por el número asociado a la matriz identidad, es decir, c.
iii) Las matrices elementales obtenidas al sumar a una fila de la matriz identidad otra fila multiplicada por una constante tienen el mismo "número" asociado que la matriz identidad, es decir, 1.

Matemáticamente, las operaciones elementales se realizan en una matriz multiplicándola a la izquierda por matrices elementales. Las propiedades 1), 2) y 3) respecto a una matriz general A quedan resumidas en términos de matrices elementales en la

Proposición 2: Si E_i es una matriz elemental, $|E_iA| = |E_i||A|$.

La demostración de esta proposición consiste en su comprobación en cada uno de los tres tipos de matrices elementales teniendo en cuenta las propiedades 1), 2) y 3) y se deja para el lector.

Ejercicios:

4.1.1. Utilizando la proposición 2 y sin necesidad de calcularlos, demostrar que los siguientes determinantes son nulos.

$$a)\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

4.1.2. Usando las matrices elementales que llevan las matrices siguientes a la identidad y la proposición 2, calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

cuando los elementos de la diagonal de las dos últimas matrices son distintos de cero.

4.1.3.
a) Demostrar que el determinante de una matriz triangular superior que tiene algún elemento de la diagonal igual a cero es nulo, usando las propiedades de los determinantes.

b) Demostrar que si escalonando la matriz A se obtiene una matriz triangular superior que tiene algún elemento de la diagonal igual a cero, el determinante de A ha de ser nulo.

4.1.4. Usando las matrices elementales que llevan las matrices siguientes a una triangular superior y los resultados anteriores, calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$a)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} c)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} e)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} f)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} h)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: a) 2, b) 2 c)4 d) 2) e) 4, f) 0, g) -1, h) -8.

4.1.5. Establecer las igualdades siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

También podemos establecer utilizando la proposición 2 el siguiente

Teorema 1: $|{}^tA| = |A|$.

En efecto, podemos comprobar que el teorema es cierto para matrices elementales: recorriendo los tres tipos de matrices elementales que hay, y considerando las traspuestas de cada tipo, vemos que la traspuesta de cada matriz elemental es elemental del mismo tipo y que le corresponde el mismo "número" que a la matriz elemental considerada. (Compruébese en las matrices elementales 3×3).

En cuanto al caso general, distinguimos dos casos:
a) A es invertible.
Si A es invertible, es producto de matrices elementales.
Sea $A = E_m \cdots E_1$, entonces ${}^tA = {}^tE_1 \cdots {}^tE_m$ y como las matrices traspuestas de matrices elementales son, a su vez, matrices elementales, por la proposición 2:

$$|{}^tA| = |{}^tE_1 \cdot {}^tE_2 \cdots {}^tE_m| = |{}^tE_1||{}^tE_2 \cdots {}^tE_m| = |{}^tE_1||{}^tE_2| \cdots |{}^tE_m| =$$

por ser el teorema cierto para matrices elementales,

$$= |E_1||E_2| \cdots |E_m| = |E_m| \cdots |E_2||E_1| = |E_m \cdots E_2 E_1| = |A|$$

b) A no es invertible.
Entonces ${}^tA$ tampoco es invertible, porque si lo fuera, ${}^tA$ sería producto de matrices elementales, en cuyo caso A sería el producto (en orden inverso) de las traspuestas de esas matrices elementales, siendo por tanto invertible.
Si la matriz A no es invertible, por operaciones elementales se puede reducir a una matriz escalo-nada E con la última fila de ceros, teniéndose $E_k \cdots E_1 A = E$, de donde $A = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} E$, que podemos escribir de manera genérica como $A = E'_k \cdots E'_1 E$, donde E'_i son matrices elementales.
Si en una matriz E hay una fila de ceros, su número asociado es cero, ya que multiplicando la fila de ceros por un número distinto de cero, queda la misma matriz; por lo que se verificaría debido a la propiedad 2), que $c|E| = |E|$, cualquiera que sea c, lo cual implica $|E| = 0$, cuando $c \neq 1$.
Ahora, en virtud de la proposición 2, se tiene
$|A| = |E'_k||E'_{k-1} \cdots E'_1 E| = |E'_k||E'_{k-1}| \cdots |E'_1||E| = 0$
El mismo razonamiento para ${}^tA$, puesto que no es invertible, nos da $|{}^tA| = 0$, siendo, por tanto, también, $|{}^tA| = |A|$.

Hagamos ahora dos observaciones:
Primera: hemos obtenido, si A es invertible, $|E_m| \cdots |E_1| = |A|$ cuando $A = E_m \cdots E_1$, es decir, el "número asociado" a A está determinado por las matrices elementales que llevan A a la identidad y es distinto de cero.
Segunda: como al trasponer una matriz, las columnas pasan a filas, las propiedades a) b) c) enunciadas respecto a las filas de una matriz y sus consecuencias son, análogamente ciertas respecto a las columnas en los "números" que buscamos. En particular es cierta la
Proposición 3. Si una matriz tiene una columna de ceros su "número asociado" es cero.

Para la demostración de la proposición 3, tengamos en cuenta que se puede ver que si una matriz tiene una fila de ceros su "número asociado" es cero de manera similar a cómo hemos demostrado que el "número asociado" a una matriz escalonada con la última fila de ceros es cero. Entonces, teniendo en cuenta el teorema 1 que pasa filas a columnas, queda establecida la proposición 3.

En virtud de estas propiedades, se puede hacer el desarrollo del número asociado a una matriz 2×2.

En efecto, por la propiedad b) respecto a columnas en matrices 2×2, para una matriz 2×2, el determinante ha de ser:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} =$$

debido a que el número es cero cuando hay una fila de ceros,

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - bc \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad - cb$$

En cuanto a una matriz 3×3, tendríamos (descomponiendo la 1ª columna en suma de tres columnas):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

(descomponiendo las filas en sumas de tres filas):

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} =$$

(por la proposición 3),

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Observando ahora que

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ya que estas dos matrices se escalonan o se transforman en la identidad con matrices elementales análogas de igual "número asociado"; que

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

por la misma razón anterior, y que

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

por la misma razón, podemos concluir que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Este proceso se puede hacer en cualquier dimensión y justifica nuestra <u>Definición por inducción</u> de los "números asociados" a las matrices que vamos a llamar <u>determinantes</u> de dichas matrices.

Definición de los determinantes.

Dada una matriz cuadrada A, se representa por $|A_{ij}|$ el determinante asociado a la submatriz de A, obtenida suprimiendo la fila i y la columna j de A.

Con un proceso análogo al anterior, se llega a que, si cumple las propiedades a), b) y c) anteriores, desglosando la primera columna en suma de n columnas y luego cada fila en suma de n filas, en virtud de la observación segunda posterior al teorema 1,

el determinante de una matriz $n \times n$ ha de ser:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|$$

que se llama desarollo del determinante por la primera columna.

También, desglosando la primera fila en suma de n filas y luego cada columna en suma de n columnas, en virtud de la observación segunda posterior al teorema 1, ha de ser:

$$|A| = |{}^tA| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}|$$

que se llama desarollo del determinante por la primera fila.

Lo cual, puede obtenerse también del desarrollo del determinante por la primera fila y el teorema 1: $|A| = |{}^tA|$.

Para dar completa validez a la definición, comprobaremos que con ella se verifican las propiedades 1), a) y b) enunciadas anteriormente. Una vez comprobadas dichas propiedades para nuestra definición, como la propiedad 1), junto con la propiedad a), implica la propiedad c), se tienen para dicha definición, las propiedades a), b) y c), que implican 1), 2) y 3), obteniendo así que la proposición 2) es cierta para nuestra definición: $|E_iA| = |E_i||A|$ donde E_i es una matriz elemental y A es una matriz cualquiera; de donde, también es cierto para nuestra definición el teorema 1: $|{}^tA| = |A|$, ya que se puede repetir el proceso de su demostración.

También el teorema 1. implica las propiedades a), b) y c) respecto a columnas.

Comprobación de las propiedades.

Comprobemos ahora que con la definición dada se cumplen las propiedades requeridas al principio.

Recordemos las propiedades:
1) Si intercambiamos dos filas en una matriz su determinante cambia de signo.
a) Si multiplicamos una fila de una matriz por una constante, el determinante de la matriz queda multiplicado por esa constante.
b) Si descomponemos una fila de una matriz en suma de otras dos filas el determinante de la matriz dada es la suma de los determinantes de las dos matrices obtenidas sustituyendo en la matriz dada la fila considerada por cada una de las filas sumandos.
c) El determinante de una matriz con filas proporcionales es cero.
En lugar de la propiedad c) podemos considerar la propiedad 1), ya que ambas son equivalentes cuando a) y b) son ciertas. (Compruébese como ejercicio).

La demostración de las propiedades básicas puede hacerse por inducción ya que así se ha hecho la definición.

Para un determinante de una matriz de orden 1, sólo tienen sentido las propiedades a) y b), que son trivialmente ciertas.
Por eso comprobamos las tres propiedades 1), a), b) para determinantes de matrices de orden 2 y luego demostramos que supuestas ciertas estas propiedades para determinantes de orden $n-1$, lo son para determinantes de orden n.

Comprobamos en primer lugar la propiedad 1, porque permite transmitir lo que probemos para la primera fila a las demás filas.
Probemos 1) en matrices 2×2:
Se reduce a comprobar que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

De la definición se tiene:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \qquad y \qquad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb)$$

estando por tanto comprobado.

Para comprobar la propiedad a), es suficiente comprobarla con la primera fila, ya que por la propiedad 1), se trasmite a la segunda fila.

En efecto,

$$\begin{vmatrix} ra & rb \\ c & d \end{vmatrix} = rad - crb = r(ad - cb) = r\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Vemos la propiedad b) en matrices 2×2, respecto a la primera fila,

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = (a+a')d - c(b+b') = ad - cb + a'd - cb' = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

La propiedad comprobada se trasmite a la segunda fila, usando la propiedad 1).

Ahora, suponiendo que la propiedad 1) se verifica en determinantes de matrices $(n-1) \times (n-1)$, vamos a comprobarla en determinantes de matrices de orden n.

Primero, lo demostramos cuando el intercambio de filas se hace entre dos filas sucesivas (la i y la $i-1$):

Por definición,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^i a_{i-1,1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^{i+1} a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\cdots+(-1)^n a_{n-1,1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n}\\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}+(-1)^n a_{n,1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n}\end{vmatrix}=$$

Por la hipótesis de inducción, estos sumandos son:

$$=a_{11}\left(-\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}\right)-a_{21}\left(-\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^{i+1}a_{i-1,1}\left(-\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n}\\ a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\right)+(-1)^i a_{i1}\left(-\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^n a_{n-1,1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n}\\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_{n,1}\left(-\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n}\end{vmatrix}\right)=$$

$$-\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\right)+\cdots$$

$$-\left((-1)^i a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+(-1)^{i+1}a_{i-1,1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n}\\ a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\right)+$$

$$+\cdots-(-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si las filas intercambiadas no son sucesivas, tenemos que darnos cuenta de que el intercambio puede hacerse en dos etapas compuestas de intercambios de filas sucesivas: intercambiar la fila "i" y la fila "j", suponiendo que $j > i$, es bajar la fila "i" al sitio "j", para lo cual tenemos que saltar sucesivamente sobre $j-i$ filas y luego subir la fila "j" (que ya ha quedado en el sitio "$j-1$" al sitio "i", para lo cual tenemos que saltar sucesivamente otras $j-1-i$ filas. En total, hemos hecho $2(i-j)-1$ cambios de filas sucesivas, lo cual se traduce en un cambio total de signo: $(-1)^{2(i-j)-1} = -1$.

Pasamos a demostrar la propiedad a) en determinantes de orden n, suponiendo que es cierta para determinantes de orden $n-1$:

Por definición,

$$\begin{vmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$ra_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{i}a_{i-1,1}\begin{vmatrix} ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Por la hipótesis de inducción, estos sumandos son:

$$ra_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots + (-1)^i a_{i-1,1} r \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{i+1}a_{i1}r\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}r\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= r\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots + (-1)^i a_{i-1,1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right) +$$

$$+r\left((-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}\right) =$$

$$r\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Esta propiedad se trasmite a las demás filas usando la propiedad 1).

Para acabar, demostramos la propiedad b) en determinantes $n \times n$, suponiéndola cierta en determinantes $(n-1) \times (n-1)$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & \cdots & a_{1n}+a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11}+a'_{11}) \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{21} \begin{vmatrix} a_{12}+a'_{12} & \cdots & a_{1n}+a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^i a_{i-1,1} \begin{vmatrix} a_{12}+a'_{12} & \cdots & a_{1n}+a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12}+a'_{12} & \cdots & a_{1n}+a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12}+a'_{12} & \cdots & a_{1n}+a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Por la hipótesis de inducción, estos sumandos son:

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a'_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\cdots+(-1)^i a_{i-1,1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^i a_{i-1,1}\begin{vmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+\cdots+(-1)^{i+1} a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+1} a_{i1}\begin{vmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$\cdots+(-1)^{n+1} a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_{n1}\begin{vmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

cogiendo los sumandos uno sí, otro no:

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Esta propiedad demostrada en la primera fila se trasmite a las demás filas por la propiedad 1).

Como se ha dicho antes, ahora podríamos demostrar el Teorema 1 para la definición dada por inducción.

Debido al Teorema 1 las propiedades comprobadas para las filas se traducen en propiedades análogas para las columnas.

Veamos ahora cómo dichas propiedades dan una relación de los números buscados(determinantes), con la resolubilidad de sistemas de ecuaciones en la **Regla de Cramer**:

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11}x & +a_{12}y & = b_1 \\ a_{21}x & +a_{22}y & = b_2 \end{array}\right\}$$

Dado que la propiedad 1) implica que los determinantes de matrices con filas iguales son nulos, se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{vmatrix}$$

Por tanto, desarrollando por la primera fila, se tiene:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

y

$$a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

o equivalentemente, cambiando columnas en los primeros determinantes, y cambiando los signos,

$$a_{11}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = b_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

y

$$a_{21}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = b_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

habiéndose encontrado que

$$\textit{cuando} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \;\; \textit{los valores}: \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

satisfacen el sistema dado.

Lo análogo ocurre con los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

Podemos demostrar que la solución considerada del sistema de ecuaciones lineales es única cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero. Llamando Δ a este determinante, como

$$\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11}x & +a_{12}y & = b_1 \\ a_{21}x & +a_{22}y & = b_2 \end{array}\right\} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11}x' & +a_{12}y' & = b_1 \\ a_{21}x' & +a_{22}y' & = b_2 \end{array}\right\} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicios:

4.2.1. Calcular usando la definición los determinantes de las matrices numéricas de los ejerciios 4.1.∗ y comprobar que son los mismos que hallados anteriormente.

4.2.2. Calcular los determinantes de las matrices dadas a continuación:

$$a) \left| 1/7 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \right| \qquad b) \left| 1/9 \begin{pmatrix} -8 & -1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix} \right|$$

4.2.3.

a) Comprobar que la ecuación de un plano que pasa por tres puntos no alineados: (a_1, a_2, a_3), $(b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ del espacio es

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

y hallar la ecuación cartesiana del plano determinado por los puntos:
$(1,2,1),(-1,3,0),(2,1,3)$.

b) Escribir la ecuación de una recta del plano que pasa por los puntos $(a,b),(c,d)$ del plano y hallar la ecuación cartesiana de la recta del plano que pasa por los puntos $(-1,-2),(2,2)$.

Caracterización de las matrices invertibles por su determinante.

Teorema 2. Una matriz es invertible si y sólo si su determinante es distinto de cero.

Dedujimos en la segunda parte de la demostración del teorema 1 que el determinante de las matrices no invertibles es cero; (utilizando el teorema 2 del capítulo anterior).

Para ver que el determinante de las matrices invertibles es distinto de cero, empecemos por las matrices elementales, que son invertibles, recorriendo sus distintos tipos. Se puede ver que sus determinantes son distintos de cero. (Se hizo en la página 101).

Para verlo en el caso general, debido al teorema que estableció que una matriz es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales, y a la proposición 2 de este capítulo, hacemos el siguiente razonamiento: Sea $A = E_m \cdot E_{m-1} \cdots E_1 = E_m \cdot E_{m-1} \cdots E_1 I$, entonces es necesario, según la proposición 2, que $|A| =$
$= |E_m||E_{m-1} \cdots E_1||I| = |E_m||E_{m-1}| \cdots |E_1| \neq 0$ porque todos los determinantes de matrices elementales son distintos de cero.

Podíamos haber dado la definición de determinante de una matriz invertible utilizando las matrices elementales en las que se descompone como producto, pero se hubiera planteado el problema sobre si el número asociado era independiente del camino por el que la matriz llega a la identidad por transformaciones elementales. Este problema está resuelto en la definición dada, ya que sólo intervienen los números de las entradas de la matriz.

Determinante del producto.

Teorema 3: $|AB| = |A||B|$: **El determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de las matrices.** De donde se deduce que $|A^{-1}| = 1/|A|$.

Demostración del Teorema 3:
También ahora distinguimos dos casos:

a) $|A| \neq 0$. Entonces, A es invertible y teníamos en la proposición 4 del capítulo anterior:

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}\cdots E_m^{-1}$$

donde E_i y E_i^{-1} son matrices elementales, (Estas $E_1, \cdots, E_m$ son las inversas de las del teorema 2 del capítulo anterior) de donde

$$|A| = |E_1^{-1}||E_2^{-1}||\cdots|E_k^{-1}|\cdots|E_m^{-1}|$$

Por otra parte,

$$AB = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}\cdots E_m^{-1}B$$

y

$$|AB| = |E_1^{-1}||E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}\cdots E_m^{-1}B| = |E_1^{-1}||E_2^{-1}|\cdots|E_k^{-1}|\cdots|E_m^{-1}||B| = |A||B|.$$

b) $|A| = 0$. Entonces, A no es invertible; al reducir A a una matriz escalonada E, esta matriz escalonada tiene su última fila formada por ceros, entonces,

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_m^{-1}E$$

y

$$AB = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_m^{-1}EB$$

donde la matriz EB tiene la última fila de ceros, por tanto su determinante es nulo y

$$|AB| = |E_1^{-1}||E_2^{-1}\cdots E_m^{-1}\cdots EB| = |E_1^{-1}||E_2^{-1}|\cdots|E_m^{-1}|\cdots|EB| = 0 = |A||B|.$$

Hagamos aquí la observación de que la única forma de definir el determinante de la matriz identidad coherente con este teorema era darle el valor 1, ya que si hubiera sido cero, no hubiera distinguido matrices invertibles de matrices no invertibles y de no ser cero, $|I| = |II| = |I||I|$ implica $|I| = 1$.

Ejercicios.

4.3.1.
a) Demostrar que una matriz triangular superior es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal son distintos de cero.
b) Demostrar el resultado análogo para matrices triangulares inferiores.
4.3.2.

a) Demostrar que una matriz antisimétrica de orden impar no puede ser invertible.

b) Encontrar matrices antisimétricas de orden par que sean invertibles.

4.3.3. Calcular los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

Como un inciso, vamos a ver ahora como se hace en general el determinante $n \times n$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

que se llama **<u>determinante de Vandermonde</u>**.

Si dos de los x_i son iguales, la matriz tiene dos columnas iguales y por tanto su determinante es cero.

Suponemos ahora que todos los x_i son distintos entre sí.

Se reduce su tamaño en uno restando a cada fila la anterior multiplicada por x_1 si $x_1 \neq 0$. Si $x_1 = 0$ se reduce el tamaño en uno, desarrollando por la primera columna y sacando x_j de cada columna j. Entonces:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ 0 & x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^2(x_n - x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_1) \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

Aquí, podemos prescindir de la primera columna y sacar en las columnas restantes los factores: $x_2 - x_1,\ x_3 - x_1,\ \cdots,\ x_n - x_1$, quedando nuestro determinante igual a

$$\Delta_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

que es del mismo tipo, donde repitiendo las operaciones con las filas, tenemos que es igual a

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_3 & \cdots & x_n \\ x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i>j}^{n} (x_i - x_j).$$

Ejercicios:

4.4.1.

a) Siendo $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = P(x)$ un polinomio de grado 3, hallar sus coeficientes para que $P(0) = 2, P(1) = 1, P(2) = -1, P(3) = 0$

b) Demostrar que siempre se puede encontrar un polinomio de grado 3 que cumpla las condiciones $\{P(x_i) = y_i\}_{i \in \{1,2,3,4\}}$, cuando todos los $\{x_i\}$ son distintos, cualesquiera que sean los $\{y_i\}$.

c) Generalizar el resultado b): dado un polinomio de grado n, y $n+1$ parejas de puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\{1,2,\cdots,n+1\}}$, siempre se pueden encontrar los coeficientes del polinomio de manera que $P(x_i) = y_i$ si todos los $\{x_i\}$ son distintos.

Obsérvese que la parte c) nos indica cómo hallar una función cuya gráfica pase por $n+1$ puntos del plano siempre que no haya dos puntos en la misma vertical.

Desarrollo del determinante por una fila cualquiera y por una columna cualquiera:

La definición de determinante se ha hecho por inducción utilizando la primera columna. Como el determinante de la matriz es igual al de la traspuesta por el teorema 1, obtenemos otra expresión trasponiendo la matriz A y aplicando la definición de determinante:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}|$$

donde hemos cambiado el subíndice i por j ya que j es el subíndice utilizado usualmente para columnas. Este es el desarrollo del determinante por la primera fila.

Por otra parte, considerando que la fila i-ésima puede ser colocada en la primera fila pasándola por encima de las i-1 anteriores, lo cual da en el determinante de la matriz i-1 cambios de signo y por la fórmula anterior, tenemos:

$$|A| = (-1)^{i-1}(a_{i1}|A_{i1}| - a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{j+1}a_{ij}|A_{ij}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{in}|A_{in}|)$$
$$= (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + .. + (-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| + .. + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|$$

Este es el <u>desarrollo del determinante por cualquier fila.</u>

Si queremos desarrollar ahora el determinante por cualquier columna, utilizando el teorema 1, sólo tenemos que trasponer la matriz y desarrollar el determinante de la traspuesta por la fila correspondiente obteniendo:

$$|A| =$$
$$= (-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{j+2}a_{2j}|A_{2j}| + .. + (-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| + .. + (-1)^{j+n}a_{nj}|A_{nj}|$$

<u>Ejercicios:</u>

4.5.1. a) Obtener, en función de los determinantes de los menores diagonales de la matriz A,

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

(Indicación: descomponer las filas en sumandos sin λ y con λ).

b) Aplicar la fórmula a la obtención de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \qquad \left| 1/3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I \right|$$

4.5.2. Encontrar los valores de a para que las siguientes matrices sean invertibles.

$$a) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

4.5.3. Dadas A, B y C, matrices cuadradas de orden n y

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que $|D| = |A||B|$ utilizando la descomposición:

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

b) Demostrar, utilizando una descomposición similar, la misma igualdad, $|D| = |A||B|$, en el caso:

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

Fórmula para la inversa:

Del desarrollo del determinante por una fila cualquiera teníamos

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + .. + (-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| + .. + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|$$

que se puede expresar matricialmente así:

$$= (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{in}) \begin{pmatrix} (-1)^{i+1}|A_{i1}| \\ (-1)^{i+2}|A_{i2}| \\ \vdots \\ (-1)^{i+j}|A_{ij}| \\ \vdots \\ (-1)^{i+n}|A_{in}| \end{pmatrix} = |A|$$

Ahora vamos a hacer la siguiente observación:

Si $k \neq i$, la suma

$\Sigma = (-1)^{i+1}a_{k1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{k2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+j}a_{kj}|A_{ij}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{kn}|A_{in}|$ corresponde al desarrollo del determinante de la matriz obtenida cambianndo la fila i-ésima de A por la fila k-ésima y dejando esta última igual, es por tanto, el desarrollo del determinante de una matriz que tiene las filas i-ésima y k-ésima iguales, que es cero. Lo cual matricialmente se puede escribir así:

$$(a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kj}, \cdots, a_{kn}) \begin{pmatrix} (-1)^{i+1}|A_{i1|} \\ (-1)^{i+2}|A_{i2}| \\ \vdots \\ (-1)^{i+j}|A_{ij}| \\ \vdots \\ (-1)^{i+n}|A_{in}| \end{pmatrix} = 0$$

Por tanto tenemos en una sola expresión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{i+1}|A_{i1}| \\ \vdots \\ (-1)^{i+j}|A_{ii}| \\ \vdots \\ (-1)^{i+j}|A_{ik}| \\ \vdots \\ (-1)^{i+n}|A_{in}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |A| \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Después, haciendo variar en la columna anterior el subíndice i, tenemos:

$$A\begin{pmatrix} |A_{11}| & \vdots & (-1)^{i+1}|A_{i1}| & \vdots & (-1)^{k+1}|A_{k1}| & \vdots & |A_{n1}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{i+1}|A_{1i}| & \vdots & |A_{ii}| & \vdots & (-1)^{k+1}|A_{ki}| & \vdots & (-1)^{n+i}|A_{ni}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{k+1}|A_{1k}| & \vdots & (-1)^{i+k}|A_{ik}| & \vdots & |A_{kk}| & \vdots & (-1)^{n+k}|A_{nk}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ (-1)^{n+1}|A_{1n}| & \vdots & |A_{in}| & \vdots & (-1)^{k+1}|A_{kn}| & \vdots & |A_{nn}| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & |A| & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|I.$$

Además, del desarrollo del determinante por una columna, teníamos:

$$|A| =$$

$$= (-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}|+(-1)^{j+2}a_{2j}|A_{2j}|+..+(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|+..+(-1)^{j+n}a_{nj}|A_{nj}|$$

que matricialmente se escribe así:

$$((-1)^{j+1}|A_{1j}|, (-1)^{j+2}|A_{2j}| \cdots (-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| \cdots (-1)^{n+j}|A_{nj}|) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = |A|$$

También ocurre que si $k \neq j$,

$0 = (-1)^{j+1}a_{1k}|A_{1j}| + (-1)^{j+2}a_{2k}|A_{2j}| + \cdots + (-1)^{i+j}a_{ik}|A_{ij}| + \cdots + (-1)^{j+n}a_{nk}|A_{nj}|$ ya que es el determinante de la matriz obtenida de A sustituyendo la columna j-ésima por la coluna k-ésima, (tiene dos columnas iguales), que matricialmente se escribe así:

$$((-1)^{j+1}|A_{1j}|, (-1)^{j+2}|A_{2j}| \cdots (-1)^{i+j}|A_{ij}| \cdots (-1)^{n+j}|A_{nj}|) \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = 0$$

y globalmente para todas las columnas se expresa:

$$\begin{pmatrix} |A_{11}| & \vdots & (-1)^{j+1}|A_{j1}| & \vdots & (-1)^{k+1}|A_{k1}| & \vdots & |A_{n1}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{j+1}|A_{1j}| & \vdots & |A_{jj}| & \vdots & (-1)^{k+j}|A_{kj}| & \vdots & (-1)^{n+j}|A_{nj}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{k+1}|A_{1k}| & \vdots & (-1)^{j+k}|A_{jk}| & \vdots & |A_{kk}| & \vdots & (-1)^{n+k}|A_{nk}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ (-1)^{n+1}|A_{1n}| & \vdots & |A_{jn}| & \vdots & (-1)^{k+1}|A_{kn}| & \vdots & |A_{nn}| \end{pmatrix} A$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & |A| & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|I.$$

Entonces, de estas igualdades, tenemos que llamando matriz cofactor de A a $cof(A) = (cof(a_{ij})) = ((-1)^{i+j}|A_{ij}|)$ se verifica:

$$A \cdot {}^t cof(A) = |A|I, \qquad {}^t cof(A) \cdot A = |A|I$$

de donde para la <u>inversa de una matriz con determinante distinto de cero:</u>

$$A^{-1} = {}^t cof(A)/|A|$$

que será inversa a la derecha y a la izquierda, y por tanto única.

<u>Ejercicios:</u>

4.6.1. Utilizando las matrices de cofactores, hallar las inversas de las matrices del ejercicio 3.4.1. que sean invertibles. Comprobar los resultados obtenidos utilizando el método de Gauss para calcular la inversa.

4.6.2. Mostrar, usando la fórmula de la inversa, que cuando una matriz es invertible, la traspuesta de la inversa coincide con la inversa de la traspuesta.

4.6.3. Mostrar, usando la fórmula de la inversa, que la matriz inversa de una matriz triangular superior invertible es también triangular superior. Y que lo análogo ocurre para matrices triangulares inferiores.

Regla de Cramer.

Sea $AX = b$ un sistema de ecuaciones, escrito de manera resumida, donde A es la matriz de los coeficientes de las incógnitas, X es la columna de las incógnitas, y b es la columna de términos independientes; si A es una matriz invertible, multiplicando por la inversa de A a la izquierda, tenemos $X = A^{-1}b$, donde utilizando la fórmula anterior para la inversa, tenemos:

$$X = \frac{1}{|A|}(^t cof(A))b$$

que desarrollada incógnita a incógnita da la regla de Cramer. Para cada incógnita x_i, que es una fila de la matriz X, tenemos:

$$x_i = \frac{1}{|A|}((-1)^{i+1}A_{1i}b_1 + (-1)^{i+2}A_{2i}b_2 + \cdots + (-1)^{i+n}A_{ni}b_n)$$

donde la expresión del paréntesis es el desarrollo por la columna i-ésima del determinante de la matriz obtenida de A (la matriz de los coeficientes) cambiando su columna i-ésima por la columna de los términos independientes.

Ejercicios:

4.7.1. Utilizar la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \left.\begin{array}{rrrr} x & +2y & -z = & 7 \\ 2x & +y & +z = & 6 \\ x & -y & +3z = & -1 \end{array}\right\} \quad b) \left.\begin{array}{rrrr} 2x & +3y & -5z-2 = & 0 \\ 3x & -y & +2z+1 = & 0 \\ 5x & +4y & -6z-3 = & 0 \end{array}\right\}$$

$$c) \left.\begin{array}{rrrrr} 2x & +y & +4z & +8t = & -1 \\ x & +3y & -6z & +2t = & 3 \\ 3x & -2y & +2z & -2t = & 8 \\ 2x & -y & +2z & = & 4 \end{array}\right\}$$

Se pueden comprobar los resultados obtenidos sustituyendo en las ecuaciones del sistema o aplicando el método de Gauss.

Sol: a) (5/3,8/3,0) b) $(-1/5, 14/5, 6/5)$, $c)(2, -3, -3/2, 1/2)$.

Volviendo a los sistemas de ecuaciones, para los que hemos encontrado la regla de Cramer cuando A es invertible, podemos demostrar que $X = A^{-1}b$, es solución única, ya que si hubiera dos soluciones X y X' para las incógnitas, de las igualdades $AX = b = AX'$ se tiene $A(X - X') = 0$ de donde multiplicando por la izquierda por A^{-1} tenemos $X-X' = A^{-1}0 = 0$, es decir, $X = X'$.

La unicidad de la solución de los sistemas AX=b se puede reducir a la unicidad de solución del sistema AX=0, ya que éste es un caso particular de los anteriores. Si hay dos soluciones distintas de AX=b para algún b, la diferencia (distinta de cero), es solución no nula de AX=0.

(Un sistema de la forma AX=0 se llama sistema homogéneo y dado un sistema de la forma AX=b, al sistema AX=0 se le llama sistema homogéneo asociado al sistema dado.)

Se nos plantea la pregunta sobre qué podemos decir de los sistemas $AX = b$ cuando A es una matriz no invertible e incluso cuando A no es una matriz cuadrada.

Teorema de Rouché-Frobenius.

Cuando A no es invertible (p. ej. si no es cuadrada) en el capítulo primero hemos enunciado el Teorema de Rouché-Frobenius relativo a los escalones de las matrices escalonadas a las que quedan reducidas A y $A|b$.

Ahora vamos a

expresar numéricamente el teorema de Rouché-Frobenius con

la definición de rango de una matriz, por medio de determinantes de submatrices suyas.

Para expresar numéricamente este teorema definiremos el **rango de una matriz** no necesariamente cuadrada como el máximo de los órdenes de las submatrices cuadradas de A con determinante distinto de cero.

Recordemos que, denotando por $E(A|b)$ la matriz escalonada que se puede obtener de la matriz ampliada del sistema y por E(A) la matriz escalonada a la que queda reducida A, el teorema de **Rouché-Frobenius** enunciado relativo a los escalones de las matrices escalonadas a que se pueden reducir la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada era:

El sistema es incompatible si el número de escalones de $E(A|b)$ (o número de filas no nulas de $E(A|b)$) es distinto del número de escalones de E(A) (o número de filas no nulas de E(A)).

El sistema es compatible si los dos números anteriores son iguales, siendo compatible determinado si todos los escalones de E(A) son de longitud una columna y siendo compatible indeterminado si hay algún escalón en E(A) de más de una columna. En el primer caso el número de escalones de las dos matrices escalonadas o número de filas no nulas coincide con el número de columnas, es decir, con el número de incógnitas; En el segundo caso el número de filas no nulas de las dos matrices escalonadas anteriores es menor que el número de columnas o incógnitas.

Veamos cuál es el rango de una matriz escalonada. En una matriz escalonada, cada fila distinta de cero determina un escalón. Al número distinto de cero del ángulo en el escalón se le llama pivote. Cada fila distinta de cero determina un pivote y recíprocamente cada pivote pertenece a una fila distinta de cero. También cada pivote determina una columna con ese pivote; entonces, si en la submatriz formada por las columnas que tienen pivote, suprimimos las filas nulas, obtenemos una submatriz cuadrada, ya que tiene tantas filas y tantas columnas como pivotes. Además es una matriz triangular superior (de orden igual al número de filas no nulas de la matriz escalonada o número de escalones), cuyos elementos en la diagonal son los pivotes, todos distintos de cero; por tanto su determinante es no nulo. De ello se deduce que el rango de una matriz escalonada es mayor o igual que su número de filas no nulas, pero una submatriz de mayor orden tendría que incluir filas nulas, y su determinante sería nulo, por lo que el rango de una matriz escalonada coincide con el número de sus filas no nulas o número de escalones.

Así, podemos dar un primer paso y enunciar el teorema de **Rouché-Frobenius** diciendo que **el sistema es incompatible cuando los rangos de** las matrices escalonadas a las que se reducen **la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada son distintos. Y que es compatible determinado cuando además de ser los dos rangos iguales, lo son al número de incógnitas, siendo en otro caso indeterminado.**

Si ahora comprobamos que el rango de una matriz es invariante por operaciones elementales, podemos suprimir en el enunciado anterior la frase: "las matrices escalonadas a las que se reducen"; quedando el teorema de Rouché-Frobenius antes escrito en letra negrita en su enunciado clásico.

Invariancia del rango por transformaciones elementales.

En efecto, vamos a ver que se conserva el orden de las submatrices con determinante distinto de cero, y por tanto su máximo, al realizar cada uno de los tipos de operaciones elementales. Para ello vemos que si hay un menor de un determinado orden distinto de cero en la matriz que resulta de una dada por una transformación elemental hay otro menor del mismo orden, distinto de cero (que puede coincidir con el primero) en la matriz dada.

1.) Hagamos en una matriz un intercambio de filas.

Si en la matriz resultante hay un menor distinto de cero, es decir, una submatriz de determinante no nulo, puede ocurrir que no interseque las filas intercambiadas, en cuyo caso aparece tal cual en la primera matriz y su determinante es el mismo.

O que contenga a las dos filas intercambiadas, en cuyo caso haciendo el cambio de filas inverso en la submatriz obtenemos otra submatriz de la matriz dada con determinante cambiado de signo respecto a la primera submatriz considerada, pero también distinto de cero.

O que contenga sólo una fila de las intercambiadas y en este caso permutando esta fila con las otras para intercalarla en el lugar en que aparecía en la matriz dada obtenemos una submatriz de la primera matriz en la que aparece el trozo correspondiente de la fila de la que provenía siendo su determinante igual o cambiado de signo respecto al menor considerado, pero siempre distinto de cero. Luego el orden de los menores distintos de cero se conserva en el primer tipo de operaciones elementales.

2.) Multipliquemos una fila por un número distinto de cero.

Dado un menor distinto de cero en la matriz modificada, es decir, una submatriz con determinante distinto de cero, si esta submatriz no interseca la fila multiplicada, aparece tal cual en la matriz dada y si aparece la fila multiplicada su determinante es un múltiplo distinto de cero del determinante de la submatriz de las mismas filas y las mismas columnas en la matriz dada, que por tanto ha de ser también distinto de cero. Entonces, el orden de los menores distintos de cero se conserva por el segundo tipo de operaciones elementales.

3.) Sumemos a una fila otra fila multiplicada por un número.

Un menor distinto de cero de la matriz resultante puede ser el determinante de una submatriz que no contenga la fila modificada y entonces aparece tal cual en la primera matriz, siendo ya antes distinto de cero.

Si la submatriz contiene la fila modificada y la fila sumada, su determinante es igual al de la submatriz de las mismas columnas y análogas filas en la matriz dada, que por tanto era distinto de cero.

Si la submatriz contiene la fila modificada pero no la sumada, descomponemos su determinante en la suma de los dos determinantes de las dos submatrices formadas, primero, por las mismas columnas y las filas análogas de la primera matriz y segundo por la submatriz obtenida de ésta sustituyendo la fila modificada por la sumada multiplicada por el número.

Si la submatriz primer sumando tiene determinante no nulo, se ha conservado el orden de los menores no nulos; si este último determinante es nulo, el otro determinante sumando ha de ser no nulo, pero el otro es múltiplo de un menor del mismo orden en la matriz dada (aunque con filas permutadas), que ha de ser de valor no nulo, por lo que también queda igual el orden de los menores distintos de cero.

De aquí se deduce que el rango de la matriz modificada por operaciones elementales es menor o igual que el rango de la matriz dada. Como la matriz dada también se obtiene de la matriz modificada por las operaciones elementales inversas, tenemos que los dos rangos son iguales.

Con esto queda establecido el **teorema de Rouché-Frobenius** en la versión de rangos.

Apliquemos ahora el teorema de Rouché-Frobenius al sistema AX=b cuando A es una matriz cuadrada invertible de orden n. Como $|A| \neq 0$ tenemos el rango de A igual a n y como A es una submatriz de $A|b$, el rango de $A|b$ es mayor o igual que el de A, pero también es siempre menor o igual al número de sus filas, que es n, por tanto coinciden el rango de A y el de $A|b$. Entonces, el sistema es compatible. También tenemos que estos rangos son iguales a n, que es el número de incógnitas, por tanto la solución es única, cualquiera que sea b (los términos independientes).

Si la solución del sistema es única para todo b, también lo es cuando $b = 0$. Entonces A es invertible porque si A no fuera invertible, sería $|A| = 0$ por lo que al ser A cuadrada, tendríamos que el mayor orden de los menores distintos de cero es menor que n por lo que el rango de A sería menor que n, pero al ser igual al rango de $A|0$, porque una columna de ceros no aumenta el orden de los menores distintos de cero, según el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema sería compatible indeterminado, por tanto, la solución no sería únicamente la trivial según habíamos supuesto.

Con los mismos razonamientos también se puede demostrar el

Teorema 4: **Dada una matriz cuadrada A, A es invertible si y sólo si el sistema AX=0 tiene únicamente la solución trivial.**

Este teorema se sigue de la equivalencia entre la unicidad de la solución del sistema AX=0 y la del sistema AX=b, cualquiera que sea b.

Ejercicios:

4.8.1. Estudiar la compatibilidad y determinación de los sistemas siguientes aplicando el teorema de Rouché-Frobenius según el cálculo del rango de las matrices correspondientes a los sistemas siguientes:

$$\left.\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 = & 1 \\ & x_2 & +x_3 = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & = & 3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrl} 2x_1 & +x_2 = & 5 \\ x_1 & -x_2 = & 1 \\ x_1 & +2x_2 = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrl} x_1 & -3x_2 & +x_3 = & 2 \\ 3x_1 & -8x_2 & +2x_3 = & 2 \\ 2x_1 & -5x_2 & +x_3 = & 3 \end{array}\right\}$$

4.8.2. Hallar los valores de a para que los sistemas

$$\left.\begin{array}{rrrl} ax & +y & +z & = 1 \\ x & +ay & +z & = 1 \\ x & +y & +az & = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrl} -x & +ay & +az & = 0 \\ ax & -y & +az & = 0 \\ ax & +ay & -z & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{cccl} (a+1)x & +y & +2z & = -2 \\ 2x & +y & +(a+1)z & = 3 \\ x & +(a+1)y & +2z & = -2 \end{array}\right\}$$

sean compatibles indeterminados.

4.8.3. Estudiar los valores de a y b que hacen compatibles los sistemas:

$$\left.\begin{array}{rrrl} bx & -ay & -az & = a \\ -bx & & -az & = a \\ -bx & -by & & = a \\ -bx & -by & -bz & = b \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrl} bx & -ay & -az & -at = & a \\ -bx & & -az & -at = & a \\ -bx & -by & & -at = & a \\ -bx & -by & -bz & = & a \\ -bx & -by & -bz & -bt = & b \end{array}\right\}$$

Producto Vectorial.

El producto vectorial de dos vectores $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ se escribe simbólicamente así:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

lo cual representa el vector de coordenadas:

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = i \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

donde i, j y k son los vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados.

Este vector tiene las siguientes características:

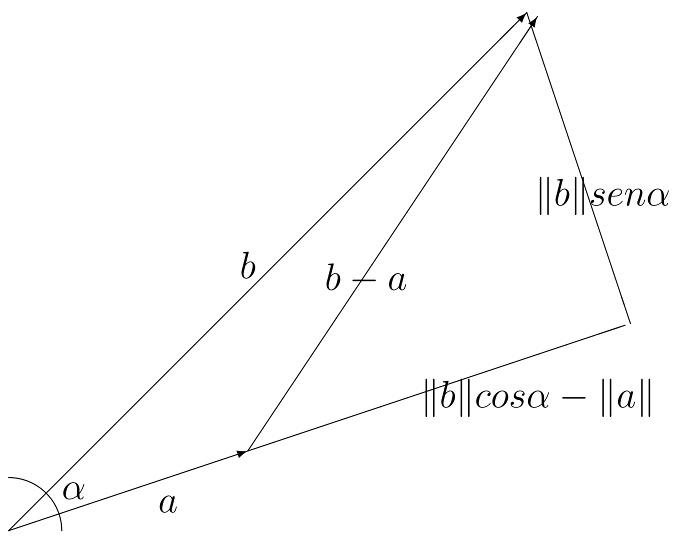
1) Es perpendicular a cada uno de los vectores (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) de los que es producto.

2) Su módulo es igual al área del paralelogramo que tiene por lados los vectores factores.

3) Su sentido es el de avance de un sacacorchos que gira desde la recta engendrada por el vector primer factor hacia la recta engendrada por el vector segundo factor.

Demostración de la propiedad 1): Veamos que $\|a\|\|b\|cos\alpha = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, donde α es el ángulo que forman los dos vectores a y b.

En efecto, según el dibujo,



$$\|b-a\|^2 = (\|b\|sen\alpha)^2 + (\|b\|cos\alpha - \|a\|)^2 =$$
$$= \|b\|^2 sen^2\alpha + \|b\|^2 cos^2\alpha + \|a\|^2 - 2\|a\|\|b\|cos\alpha =$$
$$= \|b\|^2 + \|a\|^2 - 2\|a\|\|b\|cos\alpha.$$

Desarrollando ahora los términos iniciales y finales de la desigualdad anterior,

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(a_3-b_3)^2 = b_1^2+b_2^2+b_3^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2-2\|a\|\|b\|cos\alpha$$

donde desarrollando de nuevo, los cuadrados del primer miembro y simplificando, llegamos a la igualdad deseada en 1. (Compruébese como ejercicio.)

De aquí se deduce que dos vectores son perpendiculares si y sólo si la suma de los productos de las coordenadas del mismo índice es cero. Esta suma de productos de coordenadas para los vectores a y $a \times b$ es el determinante de una matriz que tiene dos filas formadas por las coordenadas de a y otra fila formada por las coordenadas de b, siendo por tanto cero. Lo análogo ocurre para los vectores b y $a \times b$. Por lo que los vectores a y b son perpendiculares al vector $a \times b$.

Las aplicaciones del producto vectorial en matemáticas son numerosas: (además de ser usado en física.):

a) Dada una recta como intersección de dos planos:

$$\left.\begin{array}{rl} Ax+By+Cz = & D \\ A'x+B'y+C'z = & D' \end{array}\right\}$$

ya que sabemos que dos vectores perpendiculares a dichos planos son correspondientemente: (A,B,C) y (A',B',C'), y que por tanto, son perpendiculares a la recta, el producto vectorial de estos vectores es un vector en la dirección de la recta.

b) Dada una curva como intersección de superficies, el vector tangente a la curva en un punto es la intersección de los planos tangentes a las superficies en ese punto y puede hallarse utilizando el resultado anterior.

Ejercicios:

4.9.1. Hallar el vector de dirección de la recta de R^3 dada por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x+y+2z = & 0 \\ x+2y+z = & 0 \end{array}\right\}$$

4.9.2. Hallar la recta perpendicular común a las dos rectas determinadas por las dos parejas de puntos: $\{(3,1,0),(1,1,3)\}$ y $\{(0,1,0),(-1,0,0)\}$.

Demostración de la propiedad 2): Para probar que el módulo del producto vectorial $a \times b$ es igual al área del paralelogramo de lados a y b tenemos en cuenta que

$$(Ar(a,b))^2 = \|a\|^2\|b\|^2 sen^2\alpha = \|a\|^2\|b\|^2(1-cos^2\alpha) =$$
$$= \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2 cos^2\alpha =$$
$$= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (\|a\|\|b\|cos\alpha)^2 =$$
$$= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 =$$
$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

fórmula muy útil en R^3, donde es laborioso el cálculo directo de la altura de un paralelogramo o de un triángulo.

Consecuencia de ello es que si el producto vectorial de dos vectores es cero, uno de los dos es múltiplo del otro. (O sea que están en la misma recta). Al ser nula el área del paralelogramo subtendido por ellos.

Ejercicios:

4.10.1. Comprobar que el área del cuadrado que tiene tres vértices en los puntos $\{(1,1),(2,1),(1,2)\}$ del plano, hallada haciendo el producto de base por altura es la misma que el área hallada usando el producto vectorial.

4.10.2. Hallar el área de un paralelogramo que tiene tres vértices en los puntos:
a) $(1,1),(2,3),(3,4)\}$.
b) $\{(0,1,0),(1,2,1),(1,1,1)\}$.

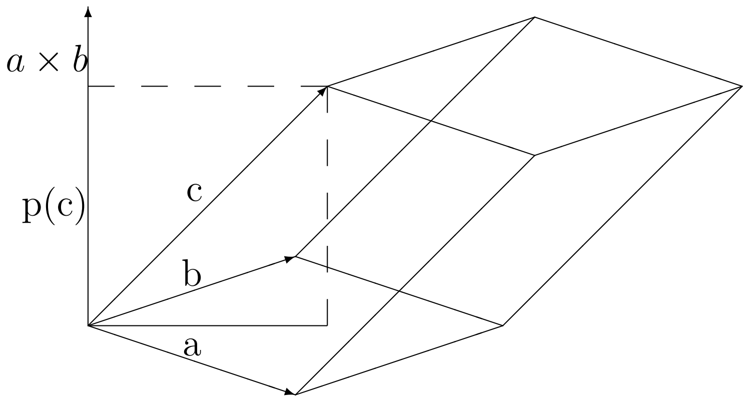
4.10.3. Hallar el área del cuadrilátero de vértices:
$\{(-2,0),(-1,-2),(2,1),(0,3)\}$.

La propiedad 3) se demuestra al final del capítulo de movimientos (Vol 2), utilizando más conocimientos del curso.

Otras propiedades interesantes son:

Propiedad 4). Se puede expresar el volumen de un paralelepípedo cuyos lados son tres vectores como un determinante cuyas filas son las coordenadas de los vectores y que se llama producto mixto de los tres vectores.

Su demostración se hace utilizando el producto vectorial. Veámoslo: Si a, b y c son tres vectores no coplanarios, considerando que a y b determinan la base del paralelepípedo, el volumen es el producto del área de la base por la altura.



El área de la base es el módulo del producto vectorial $\|a \times b\|$. La altura es el módulo de la proyección $p(c)$ del vector c sobre la perpendicular al plano engendrado por a y b $(a \times b)$:

$$p(c) = \|c\| cosang(c, a \times b) = \|c\| \frac{c \cdot (a \times b)}{\|c\| \|a \times b\|} = \frac{c \cdot (a \times b)}{\|a \times b\|}$$

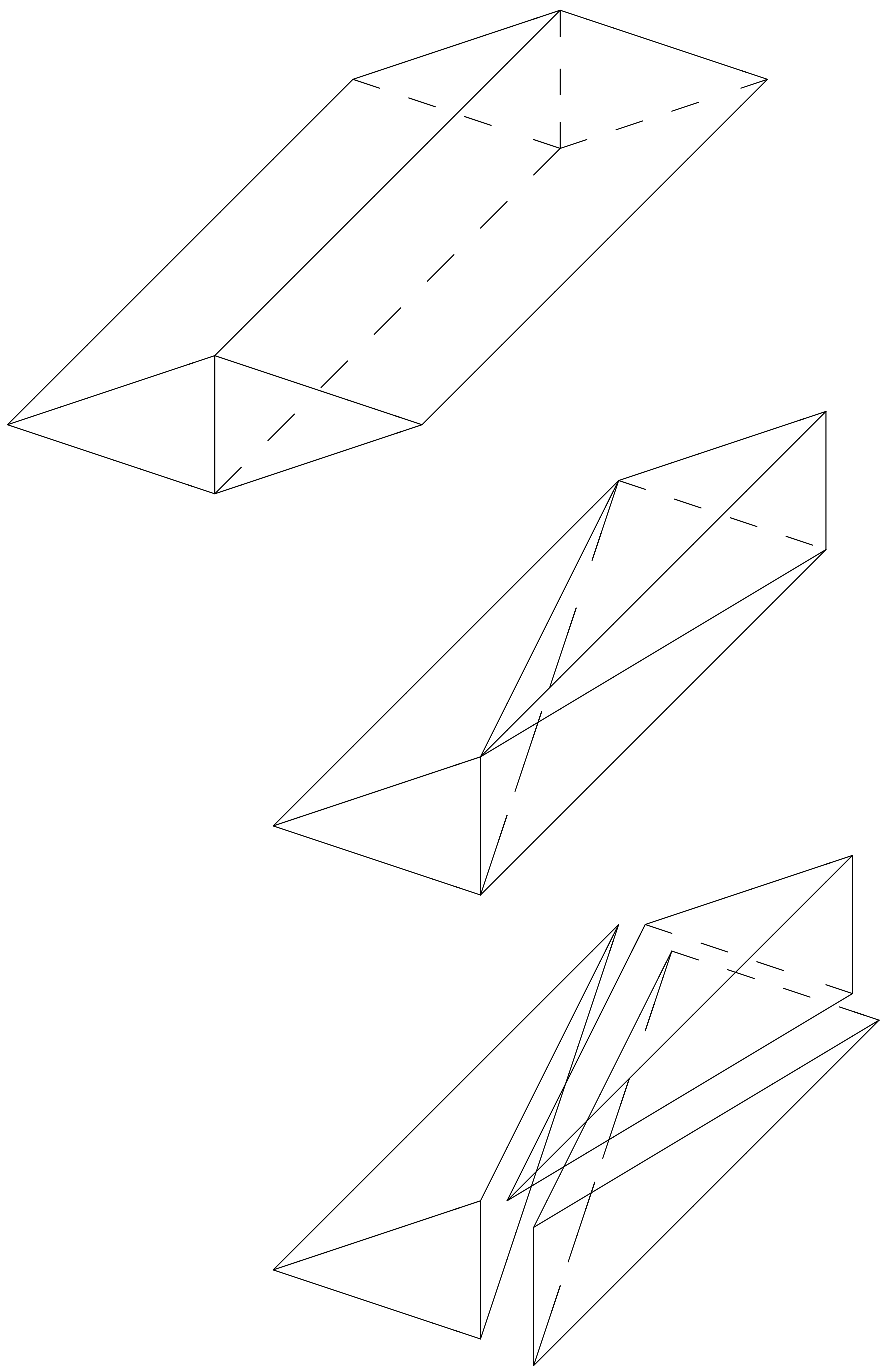
resultando

$$Vol(paralpedo)(a, b, c) = \|a \times b\| (c \cdot (a \times b) / \|a \times b\|) = c \cdot (a \times b) =$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Del volumen del paralelepípedo se deduce el volumen de un prisma triangular como la mitad del volumen del paralelepípedo y el volumen de una pirámide como el tercio del volumen del prisma. Veánse los dibujos siguientes:



Ejercicios:

4.11.1. Hallar el volumen de un paralelepípedo que
a) Tiene como aristas los vectores: $\{(1, 2, -1), (0, 1, 2), (1, 2, -3)\}$.
b) Un vértice es uno de los puntos: $\{(1, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1), (2, 0, 2)\}$ y los otros tres puntos anteriores restantes son adyacentes al vértice escogido.

4.11.2. Hallar el volumen de un prisma triangular con una base determinada por los puntos: $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)(1, 1, 0)\}$ y con un vértice de la base opuesta en $(1, 1, 1)$).

4.11.3. Los cuatro puntos $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)(0, 0, 1)\}$ determinan un tetraedro. Hallar:
a) Su volumen.
b) El área A de la cara que no está contenida en ningún plano coordenado.
c) Su altura h referida a esta cara.
d) Comprobar que el volumen obtenido utilizando determinantes es igual al volumen obtenido por la fórmula: $V = 1/3(A \times h)$.
4.11.4. Los cuatro puntos $\{(3, 1, 0), (2, 0, 0), (0, 1, 0)(1, 1, 3)\}$ determinan un tetraedro. Hallar la altura del vértice (3,1,0) respecto al área de la cara de vértices $\{(2, 0, 0), (0, 1, 0)(1, 1, 3)\}$ utilizando el producto vectorial y los determinantes.

Propiedad 5). El producto vectorial se usa para calcular el vector normal (perpendicular) a una superficie en un punto y por ello, para calcular las integrales en superficies, entre ellas, las áreas de las superficies curvadas.
Para ello es necesario saber cual es la relación entre las áreas de distintos paralelogramos de lados conocidos, contenidos en el mismo plano, cuando sabemos la relación entre los lados. Esta relación se usa al hacer cambios de coordenadas en las integrales.

Es suficiente ver dicha relación para vectores del plano coordenado $z = 0$, lo cual no restringe la generalidad: dadas dos parejas de vectores $\{a, b\}$ y $\{u, v\}$ del plano donde $u = c_1a + c_2b, v = d_1a + d_2b$ se cumple:

$$Ar(u, v) = \left\| \begin{matrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{matrix} \right\| Ar(a, b)$$

Demostración: observemos que si $a = (a_1, a_2, 0)$ y $b = (b_1, b_2, 0)$, la fórmula del área como el módulo del producto vectorial da

$$Ar(a,b) = \left\| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right\| \quad y \quad Ar(u,v) = \left\| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right\|$$

Ya que es $u = (u_1, u_2) = (c_1 a_1 + c_2 b_1, c_1 a_2 + c_2 b_2)$ y $v = (v_1, v_2) = (d_1 a_1 + d_2 b_1, d_1 a_2 + d_2 b_2)$,

$$Ar(u,v) = \left\| \begin{array}{cc} c_1 a_1 + c_2 b_1 & c_1 a_2 + c_2 b_2 \\ d_1 a_1 + d_2 b_1 & d_1 a_2 + d_2 b_2 \end{array} \right\| =$$

$$\left\| \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{array} \right\| Ar(a,b)$$

Esta relación se usa al hacer cambios de coordenadas en las integrales. Cuando se vea el cambio de base entre espacios vectoriales se podrá observar que el determinante que relaciona las dos áreas es el determinante de cambio de base entre la base $\{a, b\}$ y la base $\{c, d\}$.

Referencias.

(A) Algebra Lineal y aplicaciones. J. Arvesú Carballo, R. Alvarez Nodarse, F. Marcellán Español. Ed. Síntesis Madrid. 1999.

(FB) Algebra lineal. J. B. Fraleigh y R. A. Beauregard. Ed. Addison-Wesley /Iberoamericana, 1989.

[G] Matemáticas 2 Bachillerato. Carlos Gonzalez García. Jesús Llorente Medrano. Maria José Ruiz Jimńez. Ed. Editex. 2009.

[L] Linear Algebra for Mathematics, Science, and Engineering. E. M. Landesman, M. R. Hestenes. Prentice-Hall International, Inc. 1992.

[S] Introduction to Linear Algebra. G. Strang. Wellesley-Cambridge Press 1993.

ESPACIOS VECTORIALES.

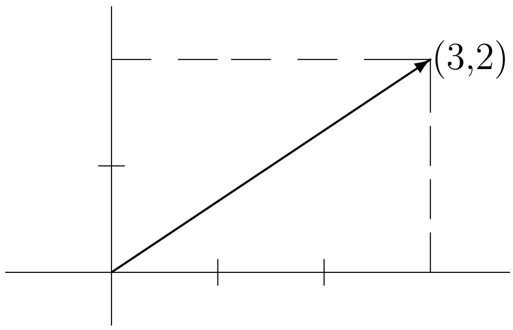
Introducción.

Consideremos el plano. Fijado un origen O y dado un punto P, uniendo el origen con ese punto por el camino más corto obtenemos un segmento orientado que se llama vector.

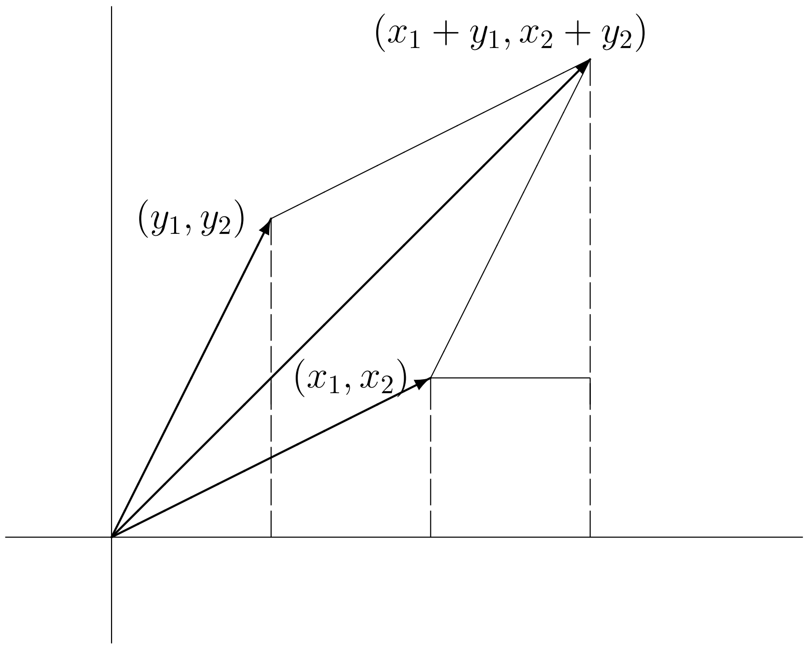
Los vectores que empiezan en el mismo origen se pueden sumar dando otro vector con el mismo origen y se pueden multiplicar por un número real dando otro vector con el mismo origen: dos vectores dados se suman por la regla del paralelogramo: trazando por el extremo del primer vector otro vector paralelo al vector que queremos sumar y considerando el extremo de este último como el extremo de la suma. Respecto a la suma son un grupo conmutativo y la otra operación, que se llama operación externa, es distributiva respecto a la suma de vectores y a la suma de números, es asociativa respecto al producto de números y el producto de 1 por cualquier vector v deja invariante a este v. Toda esta estructura recibe el nombre de espacio vectorial real.

Por otra parte, en el plano podemos trazar dos rectas perpendiculares pasando por el origen, (normalmente, una horizontal y otra vertical), llamarlas ejes y llamar origen al punto en que se encuentran. También podemos fijar un segmento como unidad de medida. A este conjunto de elementos lo llamamos sistema de referencia.

Trazando dos rectas paralelas a los ejes por el extremo de un vector que empiece en el origen obtenemos sobre los ejes, segmentos que medidos con la unidad fijada dan dos números llamados coordenadas del vector o del punto extremo del vector. Así hemos establecido otra correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y las parejas de números reales, es decir, entre los puntos del plano y $R \times R = R^2$.



Es de observar que las coordenadas del vector suma de dos vectores dados, son la suma de las coordenadas de los vectores sumandos.



También al multiplicar un vector del plano por un número real obtenemos un vector de su misma dirección y de longitud la que tenía el vector multiplicada por el número, (si el número es negativo cambia de sentido), quedando las coordenadas del vector multiplicadas por el número.

Como las operaciones de los vectores se trasmiten a las operaciones de $R \times R$ al coger coordenadas de los vectores, la estructura de $R \times R$ debida a la suma y a la operación de multiplicación por un número real, se llama espacio vectorial real.

Podemos hacer lo análogo en el espacio trazando tres rectas perpendiculares dos a dos que se cortan en un punto del espacio llamado origen: asociar a cada punto un vector que empiece en el origen y fijada una unidad de medida, asociar a cada punto tres coordenadas.

En el espacio podemos sumar por la regla del paralelogramo y multiplicar un vector por un número, lo cual está en correspondencia con las dos operaciones en las ternas de números reales ($R^3 = R \times R \times R$): suma y multiplicación por un número real. La suma es una operación interna. La multiplicación por un número real es una operación externa. Estas dos operaciones tienen las mismas propiedades que las operaciones análogas de R^2, por eso R^3 también tiene estructura de espacio vectorial real.

La estructura de estos conjuntos con estas operaciones puede encontrarse también en otros conjuntos utilizados en Geometría y en Análisis y por ello se estudia de manera abstracta para poder aplicar sus resultados a todos los conjuntos con la misma estructura.

Además, la introducción del concepto de dimensión en los espacios vectoriales permite comparar los conjuntos de soluciones de distintos sistemas de ecuaciones y determinar cuándo son coincidentes. También se puede simplificar el cálculo del rango de una matriz sin tener que calcular todos sus menores utilizando el concepto de dimensión.

En un espacio vectorial genérico, la operación externa está definida por los elementos de un cuerpo. Por eso, antes de definir un espacio vectorial necesitamos la definición de cuerpo:

Pasamos ahora a una descripción precisa.

Cuerpo. Propiedades.

Definición 1: **Cuerpo** es un conjunto con dos operaciónes internas que llamamos suma y producto con las siguientes propiedades:

1) La suma es:

a) Asociativa.

b) Tiene elemento neutro (cero).

c) Todo elemento tiene elemento opuesto.

d) Conmutativa.

2) El producto es:

α) Asociativo.

β) Tiene elemento neutro (unidad).

γ) Todo elemento distinto del elemento neutro de la suma tiene elemento inverso (opuesto respecto a la multiplicación).

δ) El producto es distributivo respecto a la suma (a los dos lados).

Si el producto es conmutativo, el cuerpo se llama cuerpo conmutativo. Los cuerpos utilizados para los espacios vectoriales son cuerpos conmutativos. Por eso en nuestros cuerpos también se da la propiedad:

γ) Conmutativo.

La existencia de la suma con las propiedades a), b), c) configura al conjunto K en grupo aditivo. La propiedad d) lo hace además grupo aditivo conmutativo.

Otra operación llamada multiplicación o producto, estructura a $K-\{0\}$, en un grupo multiplicativo.

El conjunto de los números reales es un cuerpo, que denotamos por R. También el conjunto de los números complejos, que denotamos por C es un cuerpo y el conjunto de los números racionales, que denotamos por Q.

Estamos tan acostumbrados a que el producto del cero por cualquier otro elemento sea cero que podemos pensar que este resultado es evidente, pero no lo es a partir de los axiomas establecidos en la definición de cuerpo.

Denotando por e al elemento neutro de la suma para que deje de parecer tan trivial, vamos a establecer:

$$e \cdot x = e \quad \forall x \in K$$

En efecto:

$$e \cdot x = (e + e) \cdot x = e \cdot x + e \cdot x$$

Sumando ahora a los dos miembros de esta igualdad el elemento x' opuesto de ex, tenemos:
$e = x' + e \cdot x = x' + e \cdot x + e \cdot x = e + e \cdot x = e \cdot x$ es decir, $e = e \cdot x$.

Otras propiedades interesantes son:

El elemento neutro de un grupo es único: Suponiendo la existencia de dos elementos neutros e y e', llegamos a su igualdad: tendríamos $e = e + e' = e'$.

De aquí tenemos la unicidad no sólo del elemento neutro de la suma sino también la unicidad del elemento neutro de la multiplicación sin más que cambiar el signo + por el signo $\cdot$. Usualmente, representaremos por 1 el elemento neutro de la multiplicación.

El elemento opuesto de uno dado x de un grupo es único: suponiendo la existencia de dos elementos opuestos x' y x'' de x, tenemos:

$$x' = x' + e = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = e + x'' = x''.$$

Propiedad importante es que $\lambda_1 \lambda_2 = e$ implica $\lambda_1 = e$ ó $\lambda_2 = e$.

En efecto: si $\lambda_2 \neq e$, λ_2 tiene un inverso respecto a la multiplicación. Sea λ_2^{-1} este inverso, entonces, según las propiedades anteriores,

$$e = e\lambda_2^{-1} = (\lambda_1 \lambda_2)\lambda_2^{-1} = \lambda_1(\lambda_2 \lambda_2^{-1}) = \lambda_1.$$

Espacio Vectorial.

Definición 2: Un conjunto V es un Espacio Vectorial sobre un cuerpo K si

1) Está dotado de una operación interna llamada suma respecto de la cual es grupo conmutativo.

2) Tiene una multiplicación externa por los elementos de un cuerpo K, es decir, existe una aplicación del conjunto $K \times V \to V$ que asocia a cada par (λ, v) el elemento denotado por λv con las siguientes propiedades:

a) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$. (Distributividad respecto a la suma de V).

b) $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$. (Distributividad respecto a la suma en K).

c) $(\lambda_1\lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2 v)$. (Asociatividad mixta).

d) $1v = v$ donde 1 es el elemento neutro del cuerpo para la multiplicación y v es cualquier vector de v.

El espacio vectorial se representa por V_K.

En los espacios vectoriales se verifica, si e es el elemento neutro del cuerpo, que $e \cdot v = 0$ para cada vector v del espacio. Propiedad análoga a la de los cuerpos, cuya demostración es también exactamente análoga.

También, si $\lambda \in K$ y 0 es el elemento neutro de la suma de V, se verifica $\lambda \cdot 0 = 0$. En efecto, llamando v' al elemento opuesto de $\lambda \cdot 0$, tenemos

$$0 = v' + \lambda \cdot 0 = v' + \lambda \cdot (0+0) = v' + (\lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0) = (v' + \lambda \cdot 0) + \lambda \cdot 0 = 0 + \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0$$

Otra propiedad interesante: si 1 es la unidad del cuerpo y -1 es el opuesto de 1 en K, el producto $(-1)v$ es el opuesto de v en V. Se deduce de la igualdad:

$$v + (-1)v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1))v = e \cdot v = 0$$

y de la unicidad del elemento opuesto.

Además, si un vector v es distinto de cero, la igualdad $\lambda v = 0$ implica $\lambda = 0$, ya que si $\lambda \neq 0$, existiría el inverso de λ : (λ^1) y tendríamos $0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1 \cdot v = v$, en contra de lo supuesto.

Se puede comprobar fácilmente que el conjunto de matrices 2×2 de números racionales es un espacio vectorial sobre $\mathcal{Q}$.

Es interesante observar que R tiene estructura de espacio vectorial sobre R y que cada cuerpo K tiene estructura de espacio vectorial sobre K.

También se verifica que C tiene estructura de espacio vectorial sobre R y R tiene estructura de espacio vectorial sobre Q.

Es fácil comprobar que el conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales es un espacio vectorial sobre R y que el conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes complejos es un espacio vectorial sobre C. A los espacios vectoriales sobre R, se les llama espacios vectoriales reales. A los espacios vectoriales sobre C se les llama espacios vectoriales complejos.

Son espacios vectoriales reales el conjunto de matrices con entradas reales de m filas y n columnas, $\mathcal{M}_{m\times n}(R)$, el conjunto de funciones reales de variable real, el conjunto de las sucesiones de números reales...

Son espacios vectoriales complejos el conjunto de matrices con entradas complejas de m filas y n columnas, $\mathcal{M}_{m\times n}(C)$, el conjunto de sucesiones de números complejos...

El conjunto de las aplicaciones definidas en un conjunto con imagen en un cuerpo es un espacio vectorial sobre ese cuerpo, sea este R, C o Q.

Ejercicios

5.1.1. Indicar por qué el conjunto de todas las matrices de números reales de todas las dimensiones con números reales no es un espacio vectorial real.
5.1.2. Comprobar que el conjunto de funciones reales continuas de variable real son un espacio vectorial real.

Un ejemplo en el que se ve la importancia del cuerpo en la estructura de espacio vectorial es el conjunto C de los números complejos. C tiene estructura de espacio vectorial sobre R y estructura de espacio vectorial sobre C. Pero son dos estructuras distintas; Como espacio vectorial complejo, fijado un elemento no cero, todo elemento de C se puede obtener multiplicando el elemento fijo por otro del cuerpo. Pero como espacio vectorial real, fijado un elemento distinto de cero sólo los elementos de la recta geométrica con dirección el elemento fijado se pueden obtener multiplicándolo por elementos del cuerpo.

La estructura de espacio vectorial es importante porque permite el concepto de dimensión que clasifica a estos espacios y establece diferencias entre los subconjutos de los espacios vectoriales llamados subespacios vectoriales. Se verá como ejercicio que la dimensión de C no es la misma cuando se considera espacio vectorial complejo que cuando se considera espacio vectorial real.

Subespacios Vectoriales.

Definición 3: Un **Subespacio vectorial** de un espacio vectorial V sobre un cuerpo K es un subconjunto S no vacío de V que es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo K con las leyes de composición inducidas por las leyes de V con K.

El espacio vectorial R contenido en el espacio vectorial C es un subespacio suyo si se considera en C la operación externa por los elementos de R, pero no es un subespacio vectorial, si se considera en C la operación externa por los elementos del mismo C.

El cuerpo sobre el que se considera el espacio vectorial es importante a la hora de considerar subespacios: fijado un origen, hemos visto que los puntos del plano dan lugar a un espacio vectorial real formado por los vectores que tienen el mismo origen 0 y que este espacio vectorial se puede hacer coincidir con el espacio vectorial real $R \times R$ introduciendo un sistema de referencia. El conjunto de los vectores horizontales, con origen en el punto prefijado, son un subespacio vectorial real del primer espacio vectorial y correspondientemente, el conjunto de las parejas $\{(a, 0)|a \in R\}$, es un subespacio vectorial de $R \times R$.

Pero también, se pueden poner los puntos del plano en correspondencia con los números complejos y trasmitirles la estructura de espacio vectorial complejo de C. En este caso, como el subconjunto de los números reales no es subespacio vectorial del espacio de los números complejos cuando el cuerpo que se considera es C, la recta horizontal, que es la que corresponde a R no es un subespacio del espacio de los puntos del plano con la estructura vectorial compleja.

Para que un subconjunto S no vacío de un espacio vectorial sea subespacio vectorial se tendrá que verificar que la suma del espacio vectorial sea una operación del subconjunto, asociativa, con elemento neutro, tal que todo elemento del subconjunto tenga su elemento opuesto en el conjunto, conmutativa y además que la multiplicación externa por los elementos del mismo cuerpo sea otra operación del subconjunto con las propiedades distributivas y asociativa mixta y tal que $1 \times v = v \quad \forall v \in S$.

Pero hay algunas de estas propiedades, como la asociatividad, la distributividad y la conmutatividad, que por verificarse en V, se verifican en cualquier subconjunto S, y por ello, para comprobar que un subconjunto S es subespacio vectorial, sólo hay que comprobar que las operaciones se mantienen dentro del subconjunto, (se dice que sean cerradas en el subconjunto), y que el subconjunto contiene el elemento neutro de la suma.

Podemos ahorrarnos comprobaciones estableciendo:

Proposición 1: El subconjunto S es un subespacio vectorial de un espacio vectorial V si:

i) S es cerrado respecto a la suma de V. $(\forall v_1, v_2 \in S, v_1 + v_2 \in S)$.

ii) S contiene el elemento neutro de la suma de V.

iii) S es cerrado respecto a la operación externa. $(\forall v \in S, \forall \lambda \in K, \lambda v \in S)$

En efecto, si S es cerrado respecto a la suma, S está dotado de esta operación. Como S también tiene el elemento neutro por ii), y la operación es asociativa en S (por serlo en V). Lo único que le falta a S para ser grupo es que para cada v el elemento opuesto: $-v$ pertenezca a S; Por ser cerrado respecto a la operación externa, $-v = (-1)v$ pertenece a S. Por lo que tenemos que S es un grupo aditivo.

La conmutatividad de la suma en S viene heredada de la conmutatividad de la suma en V.

Luego 1) S es un grupo aditivo conmutativo.

Además, si S es cerrado respecto a la operación externa de V, existe la aplicación $K \times S \to S$ que asocia a cada par (λ, v) el elemento λv de S con las propiedades: a), b), c), d), de la definición 2. heredadas de las de V. Es decir,

2) S está dotado de la operación externa por ser cerrado respecto a ella. Y las restantes propiedades de las operaciones de un espacio vectorial quedan heredadas.

Hay que añadir la condición ii) porque el conjunto vacío verifica i) y iii) pero no es subespacio vectorial.

Sin embargo, podemos simplificar aún más las condiciones a cumplir por un subespacio vectorial y establecer la

Proposición 2: El subconjunto S es un subespacio vectorial de un espacio vectorial V si:

i) S contiene el elemento neutro del espacio vectorial respecto a la suma.

ii) Dados λ_1, λ_2 cualesquiera de K y dados v_1, v_2 cualesquiera en S, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ está en S.

Demostración:

Veamos primero que si se cumplen las condiciones de la proposición 2, se cumplen las condiciones de la proposición 1.

La condición i) de la proposición 2 es la condición ii) de la proposición 1.

Si se verifica ii) de la proposición 2, cogiendo $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, dados dos vectores v_1 y v_2 de S, el vector $1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = v_1 + v_2$ pertenece a S, luego S es cerrado respecto a la suma en V.

Además, cogiendo $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = e$, $v_1 = v = v_2$, tenemos que $\lambda_1 v + e \cdot v = \lambda v$ está en S, cualquiera que sea $\lambda \in K$ y $v \in S$, luego S es cerrado respecto a la ley de composición externa.

Recíprocamente, veamos que si se cumplen las condiciones de la proposición 1, se cumplen las condiciones de la proposición 2:

ii) Dados λ_1, λ_2 de K cualesquiera, y dados v_1, v_2 en S los vectores $\lambda_1 v_1$ y $\lambda_2 v_2$ pertenecen a S, por ser S cerrado respecto a la operación externa y su suma pertenece a S por ser S cerrado respecto a la suma.

La condición i) de esta proposición no es superflua, porque en el caso de ser S vacío se cumpliría la condición ii) pero no sería S un grupo aditivo al no contener el elemento neutro.

En realidad, podemos establecer la

Proposición 3: El subconjunto S es un subespacio vectorial de un espacio vectorial V si:

i) S es no vacío.

ii) Dados λ_1 λ_2 cualesquiera de K y dados v_1, v_2 cualesquiera en S, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ está en S.

Ya que al ser S no vacío, existiendo $v \in S$, el vector cero $0 = e \cdot v$ pertenece a S por ii), cogiendo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $v_1 = v_2 = v$.

<u>Ejercicios:</u>

5.2.1. Comprobar que el conjunto de vectores con origen en O cuyos extremos están en una recta que pasa por el punto O es un subespacio vectorial del espacio vectorial real formado por todos los vectores con origen en O.

5.2.2. Explicar por qué el conjunto de vectores con origen en O cuyos extremos están en una recta que no pasa por un punto O no es un subespacio vectorial del espacio vectorial real formado por todos los vectores con origen en O.

5.2.3. Comprobar que el subconjunto de R^2 formado por las parejas (x, y) con $x \geq 0$ no es un subespacio vectorial de R^2.

5.2.4. Estudiar si son subespacios vectoriales de R^2 los siguientes subconjuntos:
a) $S_1 = \{(x, y) \in \ R^2 |\ y - x = 0\}$,
b) $S_2 = \{(x, y) \in \ R^2 |\ y - x = 1\}$,
c) $S_3 = \{(x, y) \in \ R^2 |\ xy = 0\}$,
d) $S_4 = \{(x, y) \in \ R^2 |\ y = |x|\}$,
e) $S_5 = \{(x, y) \in \ R^2 |\ |y| = |x|\}$.

5.2.5. Estudiar si son subespacios vectoriales de R^3 los siguientes subconjuntos:
a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \ R^3 |\ y - x = 0\}$,
b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \ R^3 |\ y - x = 1\}$,
c) $S_3 = \{(x, y, z) \in \ R^3 |\ xy = 0\}$,
d) $S_4 = \{(x, y, z) \in \ R^3 |\ y = |x|\}$,
e) $S_5 = \{(x, y, z) \in \ R^3 |\ |y| = |x|\}$.

5.2.6. Comprobar que aunque Q está contenido en R y sus operaciones están inducidas por las de R, Q no es subespacio vectorial de R. (La multiplicación de elementos de Q por elementos de R no es cerrada en Q (puede dar elementos de R no contenidos en Q)). Lo mismo ocurre con R respecto a C.

5.2.7. Estudiar si son subespacios vectoriales de C, considerado como espacio vectorial complejo, a) el conjunto de los números reales. b) el conjunto de los números imaginarios puros.

5.2.8. Comprobar que el conjunto de las matrices diagonales de orden n con elementos de un cuerpo K, es un subespacio vectorial del espacio vectorial sobre el cuerpo dado, de las matrices cuadradas de orden n con elementos de ese cuerpo.

5.2.9. Comprobar que el espacio vectorial de las matrices 2×2 con números racionales no es subespacio vectorial del espacio vectorial real de las matrices 2×2 con números reales.

5.2.10. Estudiar si son subespacios vectoriales del espacio vectorial real de funciones reales de variable real los siguientes subconjuntos:

$S_1 = \{f|f(0) = 0\}$, $S_2 = \{f|f(1) = 0\}$, $S_3 = \{f|f(0) = 1\}$.

5.2.11. Averiguar si son subespacios vectoriales de los correspondientes espacios vectoriales los siguientes subconjuntos:

a) El subconjunto de los polinomios con coeficientes reales dentro del espacio vectorial real de las funciones reales de variable real.

b) El subconjunto de los polinomios de grado $\leq n$, con coeficientes reales, siendo n fijo, dentro del espacio vectorial real de las funciones reales de variable real.

c) El conjunto de los polinomios de grado n, siendo n fijo, con coeficientes reales como subconjunto del espacio vectorial real de los polinomios de cualquier grado con coeficientes reales.

d) El subconjunto de polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales divisibles por $x - 1$ como subconjunto del espacio vectorial real de los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales.

5.2.12. Averiguar si son subespacios vectoriales del espacio vectorial real de matrices de números reales de orden 2×2 los siguientes subconjuntos:

a) El subconjunto de las matrices de números reales de orden 2×2 de traza cero como subconjunto del espacio vectorial real de las matrices de números reales de orden 2×2. (Se llama traza de una matriz a la suma de los elementos de su diagonal).

b) El subconjunto de las matrices de números reales de orden 2×2 de rango 1 como subconjunto del espacio vectorial real de las matrices de números reales de orden 2×2.

c) El subconjunto de las matrices de números reales de orden 2×2 que conmutan con la matriz B, siendo B una matriz fija 2×2, como subconjunto del espacio vectorial real de las matrices de números reales de orden 2×2.

5.2.13. Averiguar si son subespacios vectoriales de los correspondientes espacios vectoriales los siguientes subconjuntos:

a) El subconjunto de las matrices triangulares superiores $n \times n$ con elementos de un cuerpo como subconjunto del espacio vectorial sobre ese cuerpo de las matrices cuadradas $n \times n$ con elementos del mismo cuerpo.

b) El subconjunto de las matrices simétricas $n \times n$ con elementos de un cuerpo como subconjunto del espacio vectorial sobre ese cuerpo de las matrices cuadradas $n \times n$ con elementos del mismo cuerpo.

c) El subconjunto de las matrices antisimétricas $n \times n$ con elementos de un cuerpo como subconjunto del espacio vectorial sobre ese cuerpo de las matrices cuadradas $n \times n$ con elementos del mismo cuerpo.

5.2.14. Averiguar si es subespacio vectorial del espacio vectorial real de matrices de números reales de orden $m \times n$ el subconjunto de las matrices escalonadas de m filas y n columnas.

Corolario 1:(de la proposición 2.)
La intersección de una familia de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial. La demostración a partir de la proposición 2 es fácil de ver y se deja como ejercicio.

Corolario 2:
El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con coeficientes en un cuerpo conmutativo es un subespacio vectorial.
Demostración:
Demostrando primero que el conjunto de soluciones de una ecuación lineal es un subespacio vectorial, la demostración se sigue de la observación de que el conjunto de soluciones del sistema es la intersección de los subespacios soluciones de cada ecuación.

Respecto a lo primero, sea $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ una ecuación con coeficientes en un cuerpo K conmutativo y sea S el conjunto de sus soluciones. Entonces:
i) (0,0,...,0) es solución de la ecuación lineal.
ii) Sean λ_1 y λ_2 elementos del cuerpo K y $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$, soluciones de la ecuación,

$$\lambda_1(u_1, u_2, \cdots, u_n)+\lambda_2(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (\lambda_1u_1+\lambda_2v_1, \lambda_1u_2+\lambda_2v_2, \cdots, \lambda_1u_n+\lambda_2v_n)$$

es también solución de la ecuación porque:

$$a_1(\lambda_1u_1 + \lambda_2v_1) + a_2(\lambda_1u_2 + \lambda_2v_2) + \cdots + a_n(\lambda_1u_n + \lambda_2v_n) =$$

(por la distributividad del producto)

$$= a_1(\lambda_1u_1) + a_1(\lambda_2v_1) + a_2(\lambda_1u_2) + a_2(\lambda_2v_2) + \cdots + a_n(\lambda_1u_n) + a_n(\lambda_2v_n) =$$

(por la asociatividad del producto)

$$= (a_1\lambda_1)u_1 + (a_1\lambda_2)v_1 + (a_2\lambda_1)u_2 + (a_2\lambda_2)v_2 + \cdots (a_n\lambda_1)u_n + (a_n\lambda_2)v_n =$$

(por la commutatividad del producto)

$$= (\lambda_1a_1)u_1 + (\lambda_2a_1)v_1 + (\lambda_1a_2)u_2 + (\lambda_2a_2)v_2 + \cdots + (\lambda_1a_n)u_n + (\lambda_2a_n)v_n =$$

(por la commutatividad de la suma)

$= (\lambda_1 a_1)u_1 + (\lambda_1 a_2)u_2 + \cdots + (\lambda_1 a_n)u_n + (\lambda_2 a_1)v_1 + (\lambda_2 a_2)v_2 + \cdots + (\lambda_2 a_n)v_n =$ (por la asociatividad del producto)

$= \lambda_1(a_1u_1) + \lambda_1(a_2u_2) + \cdots + \lambda_1(a_nu_n) + \lambda_2(a_1v_1) + \lambda_2(a_2v_2) + \cdots + \lambda_2(a_nv_n) =$ (por la distributividad del producto respecto a la suma)

$$= \lambda_1(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n) + \lambda_2(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) =$$

(por ser $(u_1, v_2, \cdots, u_n)$ y $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ soluciones de la ecuación)

$$= \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0$$

porque estos números pertenecen a un cuerpo.

Un subespacio vectorial ha sido dado hasta ahora por una condición que han de cumplir sus vectores, pero también puede darse por una familia de vectores, a partir de los cuales se obtienen todos los demás. p. ej. los vectores horizontales de R^3 son un subespacio de R^3 dados por la condición de ser horizontales, pero también se pueden expresar: $\{(x_1, x_2, 0) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0)\}$, es decir, que se pueden obtener a partir de $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ multiplicando por números reales y sumando.
Se introduce el concepto de combinación lineal para expresar un vector a partir de otros.

Definición 4: se llama **combinación lineal** de los vectores $\{v_1, v_2, ..., v_m\} \subset V_K$ a cualquier vector v que se pueda escribir $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$ donde los λ_i pertenecen al cuerpo K.

El vector cero es combinación lineal de cualquier familia de vectores, ya que tomando $\lambda = 0$, se obtiene $\lambda v = 0$, cualquiera que sea v.

Démonos cuenta de que si S es subespacio vectorial de V, por la propiedad asociativa de la suma, dados m vectores: $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ de S, el vector $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$ (donde los λ_i pertenecen al cuerpo) permanece en S.
Podemos decir que un subespacio vectorial es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial que coincide con las combinaciones lineales de todos sus elementos. Pero investigaremos la posibilidad de determinar un subespacio

por un subconjunto de sus vectores, (cuantos menos mejor), como conjunto de las combinaciones lineales de este subconjunto.

Un ejemplo de subespacios son los conjuntos de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones, que se pueden expresar como combinaciones lineales de un número finito de vectores. Lo veremos más adelante en el ejemplo usado para establecer el Teorema 2.

Lema 1: El conjunto de las combinaciones lineales de m vectores fijos de un espacio vectorial es un subespacio vectorial del dado con las operaciones inducidas. (Su comprobación se deja como ejercicio). Se llama subespacio vectorial engendrado por los m vectores. Representaremos por $\mathcal{L}\{v_1, v_2, ...v_m\}$ al subespacio vectorial engendrado por $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Llamamos a este conjunto de vectores un sistema generador de dicho subespacio. Y a los vectores del conjunto, vectores generadores.

Como nos interesa la mayor simplicidad, nos interesan los sistemas generadores con el mínimo número de elementos y por eso introducimos el concepto de vector linealmente dependiente:

Definición 5: **Un vector** v **depende linealmente** de los vectores $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ si se puede expresar como combinación lineal de los vectores dados.

Observemos que el vector nulo siempre depende de cualquier conjunto de vectores: se expresa como una combinación lineal en la que todos los coeficientes son nulos.

La consideración de los vectores linealmente dependientes está justificada por la proposición siguiente:

Proposición 4: Si un vector v depende linealmente de los vectores $\{v_1, v_2 \dots, v_m\}$, los subespacios vectoriales engendrados por $\{v_1, v_2 \dots, v_m\}$ y por $\{v_1, v_2 \dots, v_m, v\}$ coinciden.

Demostración:

Está claro que $\mathcal{L}\{v_1, v_2, ...v_m\} \subset \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_m, v\}$.

Para la inclusión $\mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_m, v\} \subset \mathcal{L}\ \{v_1, v_2, ...v_m\}$, escribimos: $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$, entonces, cualquier elemento de $\mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_m, v\}$ se escribe:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m + \alpha v =$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m + \alpha(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m) =$$

$$(\alpha_1 + \alpha\lambda_1)v_1 + (\alpha_2 + \alpha\lambda_2)v_2 + ... + (\alpha_m + \alpha\lambda_m)v_m.$$

Este último es un elemento de $\mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_m\}$.

Por ejemplo, $= \mathcal{L}\{(1,0,0)(0,1,0)\} = \mathcal{L}\{(1,0,0)(0,1,0)(1,1,0)\}$ dentro de R^3.

Definición 6: Se dice que **los vectores** $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ **son linealmente dependientes** si y sólo si uno de ellos depende del resto.

Si el vector cero es uno de los vectores v_i, los vectores son linealmente dependientes. (Reléase la observación posterior a la definición 5).

Proposición 5: Los vectores $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ son linealmente dependientes si y sólo si el vector cero se puede expresar como combinación lineal de los vectores dados utilizando algún coeficiente no nulo.

Demostración:

$\Leftarrow$).

Sea

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$$

y sea $\lambda_i \neq 0$.

Entonces,

$$\lambda_i v_i = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - ... - \lambda_m v_m$$

donde en el segundo miembro aparecen sólo los vectores distintos del v_i.

Como $\lambda_i \neq 0$ y K es un cuerpo, existe inverso de λ_i. Multiplicando por λ_i^{-1} tenemos:

$$v_i = -\lambda_i^{-1}\lambda_1 v_1 - ... - \lambda_i^{-1}\lambda_m v_m$$

donde no aparece el v_i en el segundo miembro, por tanto uno de ellos depende linealmente del resto.

$\Rightarrow$). Sea v_i un vector que depende del resto de vectores. Entonces,

$$v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m$$

donde no aparece v_i en el segundo miembro. Pasándolo al segundo miembro, tenemos

$$0 = \lambda_1 v_1 + ... - v_i + ... + \lambda_m v_m$$

El coeficiente de v_i en el segundo miembro es -1 porque v_i antes no aparecía en el segundo miembro. Hemos conseguido escribir el cero como combinación lineal de los vectores dados siendo al menos el coeficiente de v_i (-1)

distinto de cero. Luego, por la definición 6, los vectores son linealmente dependientes.

Definición 7: Se dice que **los vectores** $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ **son linealmente independientes** si no son linealmente dependientes.

En este caso, por la prop. 5, no podemos encontrar una expresión:

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$$

con algún $\lambda_i \neq 0$, o lo que es lo mismo, en una expresión del tipo

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$$

todos los λ_i han de ser nulos.

En la práctica, en los casos concretos, se comprueba si $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ son linealmente independientes viendo si la existencia de la expresión:

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$$

implica que todos los coeficientes sean nulos.

Esta regla también nos da que un conjunto de vectores formado sólo por el vector cero es dependiente. Y que un conjunto formado sólo por un vector distinto de cero es independiente. (Véanse las propiedades que se demostraron al principio del capítulo sobre las operaciones en un espacio vectorial).

Ejercicios:

5.3.1. Estudiar si son independientes en su espacio vectorial correspondiente las siguientes familias de vectores:

a) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\} \subset R^3$,
b) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\} \subset R^3$,
c) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 1, -1)\} \subset R^3$,
d) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (3, 2, 1)\} \subset R^3$,
e) $\{(i, 1 - i), (2, -2i - 2)\} \subset C^2$,
f) $\{(i, 1, -i), (1, i, -1)\} \subset C^3$.

5.3.2. En los casos de las familias anteriores que sean dependientes, expresar uno de los vectores como combinación lineal de los restantes.

5.3.3. Estudiar si son independientes en su espacio vectorial correspondiente las siguientes familias de vectores:

a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \right\}$$

subconjunto de las matrices 2×2 de números reales.

b) Los polinomios $\{1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3\} \subset P_R^3[x]$.

5.3.4. Demostrar que si $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$ son funciones reales de variable real tales que existen $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ verificando

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_k(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_k(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_k) & f_2(a_k) & \cdots & f_k(a_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

son funciones independientes.

5.3.5. Utilizar el resultado anterior para

a)

Demostrar que para todo n, considerados como vectores de $P^n[x]$, los polinomios $\{1, x-2, (x-2)^2, \cdots, (x-2)^n\} \subset P^n[x]$ son independientes en dicho espacio vectorial.

b)

Demostrar que los polinomios: $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\} \subset P^n[x]$, cualquiera que sea n, y cualquiera que sea a, son independientes.

La proposición 4 establece que en un conjunto de generadores de un subespacio se puede prescindir de los que dependan linealmente de los otros.

Introducimos el concepto de base para prescindir en el sistema generador de un subespacio de los vectores que dependan de los restantes. Así obtenemos las bases como sistemas generadores con un número mínimo de vectores.

Bases.

Definición 8: Se llama **base** de un espacio vectorial a un sistema generador del espacio que a su vez es linealmente independiente.

Ejercicios

5.4.1. Comprobar que los siguientes conjuntos de vectores son bases de los correspondientes espacios vectoriales: (son las llamadas bases canónicas)

a) $\{(1,0,0,\cdots,0), (0,1,0,\cdots,0), (0,0,1,\cdots,0), \cdots, (0,0,0,\cdots,1)\} \subset R^n$.

b)

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(R)$$

c) $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\} \subset P_R^n(x)$.

5.4.2. Estudiar si las siguientes familias de vectores son bases de los espacios vectoriales dados:

a) $\{(1,0,0,1),(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)\} \subset R^4$,

b) $\{(1,0,0,1),(1,0,1,0),(0,2,1,0),(0,1,0,1)\} \subset R^4$,

c)

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(R),$$

d)

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(R),$$

e)

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathcal{R}),$$

f)

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathcal{R}).$$

5.4.3. Encontrar bases de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathcal{R})$:

a) Las matrices diagonales.
b) Las matrices triangulares superiores.
c) Las matrices triangulares inferiores.
d) Las matrices simétricas.
e) Las matrices antisimétricas.

5.4.4. Siendo $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base de R^n, demostrar que los vectores:

$$u_1 = e_1, u_2 = e_1 + e_2, \cdots, u_{n-1} = e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1}, u_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

son otra base de R^n.

Además de ser una base un sistema generador mínimo, (por ser un sistema independiente), permite la definición de coordenadas que asocia a cada vector un conjunto de números e identifica el espacio vectorial con un producto cartesiano del cuerpo K por sí mismo un determinado número de veces.

Definición 9: Se llaman **coordenadas** de un vector en una base a los coeficientes que hay que poner a los vectores de dicha base para obtener una combinación lineal que dé el vector dado.

Teorema 1: Las coordenadas están bien definidas. (Son únicas para un vector fijo en una base fija).

Demostración:

Sean $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y $\{x'_1, x'_2, ..., x'_n\}$ dos conjuntos de coordenadas de un vector x respecto a una base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de V. Entonces,

$$x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = x = x'_1e_1 + x'_2e_2 + ... + x'_ne_n$$

de donde

$$(x_1 - x'_1)e_1 + (x_2 - x'_2)e_2 + ... + (x_n - x'_n)e_n = 0$$

Como los vectores e_i son independientes, los coeficientes $x_i - x'_i$ han de ser nulos. Entonces $x_i = x'_i$ para todo i.

Observemos que si el sistema generador de un subespacio vectorial no es una base, los coeficientes que podemos poner a los vectores del sistema generador para obtener un vector dado no son únicos:

En $\mathcal{L}\{(1,0,0)(0,1,0)(1,1,0)\}$ podemos escribir:

$(2,1,0) = 2(1,0,0)+1(0,1,0)+0(1,1,0)$ ó $(2,1,0) = 1(1,0,0)+0(0,1,0)+1(1,1,0)$

Y no siempre le corresponderían al vector cero las coordenadas $(0,0,0)$ ya que también se tendría $(0,0,0) = -1(1,0,0) - 1(0,1,0) + 1(1,1,0)$

Por ello, las coordenadas de un vector en un sistema generador que no sea base no están bien definidas. Sin embargo, dada una base de n elementos en un espacio vectorial, cada vector del espacio queda determinado por los n números que son sus coordenadas en esa base.

<u>Ejercicios:</u>

5.5.1. Hallar las coordenadas del vector $(3,2,-1,0)$ de R^4 en la base de R^4 dada en el ejercicio 5.4.2 b).

5.5.2.

a) Hallar las coordenadas del vector $(n, n-1, \cdots, 2, 1)$ de R^n, en la base $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ dada en el ejercicio 5.4.4 cuando $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ es la base canónica de R^n.

b) Hallar las coordenadas del vector $(1, 2, \cdots, n-1, n)$ de R^n, en la base $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ dada en el ejercicio 5.4.4 cuando $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ es la base canónica de R^n.

5.5.3. Hallar las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathcal{R})$$

5.5.4. Hallar las coordenadas de $1 + x + x^2$ en la base $1, x-1, (x-1)^2$.

Veremos cúal es la relación entre las coordenadas de un vector en bases distintas pero antes demostraremos una serie de resultados encaminados a demostrar que si un espacio vectorial tiene una base con n elementos, cualquier otra base tiene también n elementos.

Proposición 6: Todo conjunto formado por n vectores independientes de R^n forma una base de R^n.

Demostración:

Sea $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ un conjunto formado por n vectores independientes. Entonces la expresión: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0$ sólo se cumple cuando todos los coeficientes λ_i son nulos.

Si $v_1 = (v_{11}, v_{12}, ..., v_{1n})$, $v_2 = (v_{21}, v_{22}, ..., v_{2n})$, $\cdots v_n = (v_{n1}, v_{n2}, ..., v_{nn})$ (todos elementos de R^n), el vector $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$ es:

$(\lambda_1 v_{11} + \lambda_2 v_{21} + ... + \lambda_n v_{n1},\ \lambda_1 v_{12} + \lambda_2 v_{22} + ... + \lambda_n v_{n2},\ \cdots\cdots,\ \lambda_1 v_{1n} + \lambda_2 v_{2n} + ... + \lambda_n v_{nn})$.

Si los vectores dados son independientes, estos números son todos a la vez nulos sólo si los λ_i son nulos, es decir si el sistema lineal homogéneo:

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda_1 v_{11} + \lambda_2 v_{21} + ... + \lambda_n v_{n1} & = 0 \\ \lambda_1 v_{12} + \lambda_2 v_{22} + ... + \lambda_n v_{n2} & = 0 \\ \cdots\cdots & = 0 \\ \lambda_1 v_{1n} + \lambda_2 v_{2n} + ... + \lambda_n v_{nn} & = 0 \end{array}\right\}$$

sólo tiene la solución trivial.

Esto es cierto si y sólo si

$$det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

Veremos que esta condición es suficiente para demostrar que los vectores dados son un sistema generador, es decir, que $\mathcal{L}\ \{v_1, v_2, ...v_n\} = R^n$

En efecto, dado cualquier vector: $(x_1, x_2, ...x_n)$ de R^n, el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1 v_{11} + \lambda_2 v_{21} + ... + \lambda_n v_{n1} = x_1 \\ \lambda_1 v_{12} + \lambda_2 v_{22} + ... + \lambda_n v_{n2} = x_2 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_1 v_{1n} + \lambda_2 v_{2n} + ... + \lambda_n v_{nn} = x_n \end{array}\right\}$$

tiene solución por el Teorema de Rouché Frobenius, ya que al ser el determinante de la matriz de sus coeficientes (el anterior determinante) distinto de cero, el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es igual al rango de la matriz ampliada.

Cogiendo las soluciones encontradas para los valores de λ_i en la expresión: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$, obtenemos el vector dado $(x_1, x_2, ...x_n)$. Esto nos dice que cualquier vector de R^n es una combinación lineal de los vectores dados, por tanto, formaban un sistema generador. Como también eran independientes, forman un sistema generador independiente, es decir, una base de R^n.

El procedimiento seguido en esta demostración establece también que: *n n-uplas de R^n son una base de R^n si y sólo si el determinante de la matriz cuyas columnas(o filas)son las n-uplas dadas es distinto de cero.*

Ejercicios:

5.6.1. Encontrar los valores de a para que formen una base de R^3, los vectores $\{(a, 0, 1), (0, 1, 1), (2, -1, a)\}$.

5.6.2. Dados dos vectores $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$ de R^3, se define el producto vectorial $a \times b$ como el vector simbólicamente expresado por

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \equiv \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Demostrar que si los vectores a y b son independientes, los vectores $\{a, b, a \times b\}$ son una base de R^3.

5.6.3. Hallar los números complejos z para los cuales los vectores:

$$\{(z + i, 1, i), (0, z + 1, z), (0, i, z - 1)\}$$

no forman base considerados como vectores del espacio vectorial complejo C^3.

5.6.4. Los vectores $\{(z,1,0),(-1,z,1),(0,-1,z)\} \subset R^3$, pueden considerarse contenidos en R^3 ó en C^3, según se permita a z variar en R ó en C. Aún considerándose contenidos en C^3, puede darse a éste conjunto estructura de espacio vectorial real y estructura de espacio vectorial complejo. Hallar los valores de z que los hacen dependientes en cada uno de los tres casos.

Se puede generalizar la proposición 6 a la siguiente **proposición 7**: Todo conjunto formado por n vectores independientes de un espacio vectorial que tenga una base de n elementos forma una base de dicho espacio.

Proposición 7:

Si un espacio vectorial V_K tiene una base con n vectores, cualquier conjunto con más de n vectores es dependiente.

Demostración:

Sean $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de V y $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ un conjunto de vectores, donde $m > n$. Expresemos los vectores por sus coordenadas en la base dada:

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, ..., v_{1n})$$
$$v_2 = (v_{21}, v_{22}, ..., v_{2n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_m = (v_{m1}, v_{m2}, ..., v_{mn})$$

Las coordenadas de una combinación lineal de estos vectores: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m$ son:

$$\lambda_1 v_{11} + \lambda_2 v_{21} + ... + \lambda_m v_{m1}$$
$$\lambda_1 v_{12} + \lambda_2 v_{22} + ... + \lambda_m v_{m2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\lambda_1 v_{1n} + \lambda_2 v_{2n} + ... + \lambda_m v_{mn}$$

La combinación lineal es nula si y sólo si sus coordenadas son nulas. El sistema lineal homogéneo:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1 v_{11} + \lambda_2 v_{21} + ... + \lambda_m v_{m1} = 0 \\ \lambda_1 v_{12} + \lambda_2 v_{22} + ... + \lambda_m v_{m2} = 0 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_1 v_{1n} + \lambda_2 v_{2n} + ... + \lambda_m v_{mn} = 0 \end{array}\right\}$$

tiene por el teorema de Rouché-Frobenius, soluciones no nulas para todas las λ_i ya que como $m > n$, hay más incógnitas que ecuaciones y por tanto el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas. Estas soluciones pemiten poner el vector nulo como combinación lineal de los vectores dados con coeficientes no todos nulos, por tanto los vectores dados son dependientes.

Con esta proposición llegamos al *importante*

Teorema de la Base.

Si un espacio vectorial tiene una base con n vectores, cualquier otra base tiene el mismo número de vectores.

Demostración: Sea $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ una base de V. Sea $\{e'_1, e'_2, ...e'_m\}$ otra base de V.

Si $m > n$, según la proposición anterior, los vectores $\{e'_1, e'_2, ...e'_m\}$ serían dependientes y no podrían formar base.

Si $m < n$, tomando $\{e'_1, e'_2, ...e'_m\}$ como base de partida de V, tendríamos, también, según la proposición anterior, que los vectores $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ serían dependientes y no podrían formar base.

Luego $m = n$.

Se llama **dimensión del espacio vectorial** al número de vectores de una base. (Un espacio vectorial de dimensión finita es un espacio vectorial que admite una base de n vectores para algún $n \in N$.) El Teorema de la Base demostrado garantiza que la dimensión del espacio vectorial es independiente de la base considerada, cuando el espacio es de dimensión finita.

Una aplicación del concepto de dimensión nos sirve para distinguir el espacio vectorial formado por los complejos sobre el cuerpo complejo del espacio vectorial formado por los complejos sobre el cuerpo real: véase el siguiente ejercicio:

5.7.1. Comprobar que una base de C considerado como espacio vectorial sobre C está formada por $\{1\}$, pero una base de C considerado como espacio vectorial sobre R es $\{1, i\}$. Estos dos espacios vectoriales tienen distinta dimensión.

También se deduce de la proposición 7 que n vectores independientes de un espacio vectorial con una base de n elementos son otra base, pues cualquier otro vector añadido a los dados es dependiente de ellos, siendo por tanto el conjunto dado de vectores independientes un sistema generador del espacio vectorial.

Dado que las bases contienen un menor número de elementos, hacen los cálculos más cortos y por eso en el trabajo con espacios vectoriales son útiles las dos proposiciones siguientes:

Proposición 8: De todo sistema generador finito de un espacio vectorial se puede extraer una base.

Si el sistema generador no es una base es porque no es linealmente independiente y existe algún vector que depende linealmente del resto. Por la proposición 4, el espacio de combinaciones lineales del sistema generador coincide con el espacio de combinaciones lineales del conjunto de vectores que queda al extraer del sistema generador el vector dependiente. Podemos repetir el proceso mientras el sistema generador sea dependiente hasta que se haga independiente (porque es finito). En el primer momento en que el conjunto de vectores no extraidos sea independiente será también una base del espacio porque sigue siendo un sistema generador.

Proposición 9: Todo sistema independiente de un espacio vectorial de dimensión finita se puede completar a una base.

Sea n la dimensión de V y $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ un sistema de vectores independientes de V.

Por la proposición 7 no puede ser $r > n$.

Si $\mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_r\} = V$, $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ son también un sistema generador de V y por tanto son ya una base de V. Entonces, por el teorema de la base, $r = n$.

Si $\mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_r\} \neq V$, debe ser $r < n$ y existir un vector $w \in V - \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_r\}$, que es linealmente independiente de los dados. Llamemos $v_{r+1} = w$ y añadámoslo a los vectores dados. El conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}\}$ es un conjunto de vectores independiente, que será una base de V si $\mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}\} = V$, en cuyo caso $r + 1 = n$ y ya hemos completado el conjunto de vectores dado a una base. Si $r + 1 < n$, repetimos el proceso anterior para añadir un v_{r+2} independiente de los anteriores y hasta un v_n independiente de los anteriormente añadidos y en ese momento, el sistema independiente es un sistema generador por la proposición 7, habiendo completado el sistema independiente dado a una base de V.

El método para llevar a cabo los hechos de las dos proposiciones anteriores en casos concretos se verá como aplicación de la relación entre el rango de una matriz y el número de sus filas independientes, más adelante.

Corolario 3: Dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 son iguales si y sólo si $S_1 \subset S_2$ y $dimS_1 = dimS_2$. (S_1 y S_2 son intercambiables).

Este corolario es cierto porque si $S_1 \subset S_2$, una base de S_1 puede completarse a una base de S_2, pero al ser $dimS_1 = dimS_2$, no podemos añadir ningún vector porque todas las bases tienen el mismo número de elementos, lo cual implica que la base de S_1 es ya una base de S_2, y por tanto, $S_1 = S_2$.

Teorema 2: La dimensión del subespacio de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es igual al número de incógnitas menos el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas.

Como es más fácil comprobar este teorema en un ejemplo y visto el ejemplo, el teorema resulta obvio, aún sabiendo que un ejemplo no es una demostración, vamos a hallar la dimensión del subespacio de soluciones del sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{llllll} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & =0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & & =0 \\ 6x_1 & +4x_2 & +x_3 & & -3x_5 & =0 \end{array}\right\}$$

Una forma sistemática de resolver un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, que se puede escribir en forma matricial por Ax=0, es reducir la matriz A a una matriz escalonada E por operaciones elementales y pasar en las ecuaciones de Ex=0, las incógnitas de las columnas que no dan escalón al segundo miembro.

Como hicimos en el capítulo del método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{rrrrrl} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & =0 \\ & & x_3 & +2x_4 & +x_5 & =0 \\ & & -x_3 & -2x_4 & -x_5 & =0 \end{array}\right\} \equiv$$

$$\equiv \left.\begin{array}{rrrrrl} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & =0 \\ & & x_3 & +2x_4 & +x_5 & =0 \end{array}\right\}$$

Pasamos al segundo miembro las incógnitas x_2 x_4 y x_5 :

$$\left.\begin{array}{rrlrr} 3x_1 & +x_3 & =-2x_2 & -x_4 & +x_5 \\ & x_3 & = & -2x_4 & -x_5 \end{array}\right\}$$

Ahora, al recorrer las ecuaciones de arriba a abajo, las incógnitas del primer miembro van dismi-nuyendo de una en una, apareciendo sólo una incógnita despejada en el primer miembro en la última ecuación. Sustituyendo esta incógnita en la ecuación anterior, podemos despejar otra incógnita más y seguir así despejando hasta agotar las incógnitas de los primeros miembros.

En este ejemplo, sustituyendo el valor de x_3 dado por la segunda ecuación en la primera ecuación tenemos: $3x_1 = -2x_2 + x_4 + 2x_5$,.

Podemos considerar todas las incógnitas como funciones lineales de las variables pasadas al segundo miembro, añadiendo $x_i = x_i$ para estas últimas variables.

En este ejemplo, añadiendo $x_2 = x_2,\ x_4 = x_4,\ x_5 = x_5$, obtenemos las condiciones:

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & -\frac{2}{3}x_2 \ +\frac{1}{3}x_4 + \ \frac{2}{3}x_5 \\
x_2 & = & x_2 \\
x_3 & = & -2x_4 \ -x_5 \\
x_4 & = & x_4 \\
x_5 & = & x_5
\end{array}$$

Una solución cualquiera es una 5-upla de valores, donde las incógnitas pasadas al segundo miembro pueden variar arbitrariamente y las incógnitas del primer miembro están sujetas a las condiciones despejadas. Que expresamos por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo ahora $x_2 = \lambda_1,\ x_4 = \lambda_2,\ x_5 = \lambda_3$ se escribe:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El subespacio de soluciones del sistema es el subespacio de las combinaciones lineales de los tres vectores columna del segundo miembro.

En este caso, ninguno de los vectores columna anteriores del segundo miembro de la igualdad es superfluo a la hora de dar las combinaciones lineales soluciones. En nuestro caso, para comprobar que son independientes, miraríamos si una combinación lineal de los vectores igual a cero es posible con coeficientes λ_i distintos de cero. Tendría que ser:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Considerando la segunda, la cuarta y la quinta filas, tenemos:

$$0 = \lambda_1,\ 0 = \lambda_2,\ 0 = \lambda_3,$$

lo que implica que los vectores columna escritos son independientes. La dimensión del espacio de soluciones de este sistema es $5-2=3$, (n^o de incógnitas menos rango de la matriz de los coeficientes).

Para demostrar el teorema 2 en forma general, tenemos en cuenta que la forma sistemática, por el Método de Gauss, de resolver un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, escrito en forma matricial por Ax=0, es reducir la matriz A a una matriz escalonada E por operaciones elementales y pasar en las ecuaciones de Ex=0, las incógnitas de las columnas que no dan escalón al segundo miembro. Se despejan las incógnitas que dan escalón en función de las que no lo dan y si n es el número de incógnitas, las soluciones son las n-uplas de números que se pueden escribir según las expresiones obtenidas al despejar, donde varían arbitrariamente las incógnitas del segundo miembro. Poniendo las n-uplas soluciones en columna ordenada y desglosando sus expresiones según las incógnitas variables, (que se pueden sustituir por paramétros), aparecen las soluciones como combinaciones lineales de tantas columnas como incógnitas variables. Estas columnas son un sistema de generadores del conjunto de soluciones del sistema.

Los vectores generadores así obtenidos tienen el número 1 en el sitio correspondiente a dicha coordenada y el número 0 en el sitio correspondiente a las otras coordenadas pasadas al segundo miembro. Por esta condición son independientes.

El número de incógnitas que dan escalón es igual al número de escalones de E, igual a su vez al rango de la matriz de los coeficientes del sistema, (en términos de determinantes), por tanto, se pasan al segundo miembro un número de incógnitas igual al número total de ellas menos el rango de la matriz de los coeficientes. Por ello, la dimensión del conjunto de soluciones del sistema es n^o de incógnitas menos rango de la matriz de los coeficientes.

<u>Ejercicios:</u>

5.8.1. Encontrar bases de los siguientes subespacios:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_3 & +2x_4 = & 0 \\ x_1 & -x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \subset R^4 \qquad \left.\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & =0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & =0 \end{array}\right\} \subset R^5$$

$$\left.\begin{array}{llllll} 3x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & +3x_5 & =0 \\ 3x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & +3x_5 & =0 \end{array}\right\} \subset R^5$$

5.8.2. Encontrar una base del subespacio $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ definido por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \quad \begin{array}{rl} 2a+b-c+d & =0 \\ a+b+c-d & =0 \end{array} \right\}$$

5.8.3. Encontrar una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres divisibles por $x-1$.

Corolario 4: Dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 dados respectivamente por las ecuaciones matriciales $A_1x = 0$ y $A_2x = 0$ son iguales si y sólo si el rango de A_1 es igual al rango de A_2 y $S_1 \subset S_2$. (S_1 y S_2 son intercambiables).

Se pueden utilizar estos corolarios para averiguar si los conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos distintos son coincidentes.

Corolario 5: En el conjunto de ecuaciones $Ax = 0$ de un subespacio vectorial, podemos suprimir las ecuaciones tales que al suprimir de A las filas de coeficientes correspondientes a tales ecuaciones, queda una matriz del mismo rango que A.

Ejercicios:

5.9.1. Comprobar que el subespacio vectorial engendrado por $\{(1,0,1,-1), (1,-1,1,-1)\}$ en R^4 coincide con el espacio de soluciones del sistema:

$$\left. \begin{array}{llll} x_1 & +x_3 & +2x_4 = & 0 \\ x_1 & -x_3 & = & 0 \end{array} \right\} \subset R^4.$$

5.9.2. Comprobar que los subespacios S_1 y S_2 de R^5 cuyas ecuaciones son los sistemas:

$$\left. \begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & =0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & =0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{llllll} 3x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & +3x_5 & =0 \\ 3x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & +3x_5 & =0 \end{array} \right\}$$

son iguales.

5.9.3. Dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 dados respectivamente por las ecuaciones matriciales $A_1x = 0$ y $A_2x = 0$ son iguales si y sólo si

$$r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = r(A_1) = r(A_2).$$

(S_1 y S_2 son intercambiables).

Cambio de base.

Veremos aquí cuál es la relación entre las coordenadas de un vector en dos bases distintas.

Sean $B = \{e_1, e_2, ...e_n\}, B' = \{e'_1, e'_2, ...e'_n\}$ dos bases de un espacio vectorial de dimensión n.

Sean $(x_1, x_2, ...x_n), (x'_1, x'_2, ...x'_n)$ las coordenadas respectivas de un vector x en ambas bases.

Entonces, $x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = x = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + \cdots + x'_ne'_n$, lo que también se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & ... & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = x = (e'_1, e'_2, ...e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Sean

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n \\ &\cdots \\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

los vectores de la nueva base expresados en la antigua. También los podemos escribir globalmente así:

$$\begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & ... & e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & ... & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

sustituyendo la expresión anterior de los $\{e'\}$ en la expresión de x, tenemos:

$$x = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & ... & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}$$

que comparada con

$$x = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & ... & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},$$

ya que las coordenadas de un vector en una base fija son únicas, da:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Expresión de la relación entre las coordenadas en las dos bases.

Observemos que las columnas de esta matriz son las coordenadas de cada uno de los vectores de la nueva base expresados en la antigua.

Ejercicios:

5.10.1. Hallar las matrices de cambio de base en R^4
a) de la base dada en el ejercicio 5.4.2. b) a la base canónica.
b) de la base canónica a la base dada en el ejercicio 5.4.2. b)

5.10.2. Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{(1,1,0,0),(0,1,0,-1),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ y $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \{(1,0,0,1),(1,0,1,0),(0,2,1,0),(0,1,0,1)\}$, hallar:
a) Las coordenadas del vector $3w_1+2w_2+w_3-w_4$ en la base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
b) Las coordenadas del vector $3v_1 - v_3 + 2v_2$ en la base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

5.10.3. Escribir las matrices de cambio de base en R^4 entre las dos bases del ejercicio 5.10.2 y comprobar los resultados de ese ejercicio.

5.10.4.
a) Hallar las matrices de cambio de base en $\mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ entre las siguientes bases:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Hallar directamente las coordenadas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en las dos bases anteriores y comprobar que están relacionadas por las matrices de cambio de base.

5.10.5. Escribir las matrices de cambio de base en el espacio de los polinomios de grado ≤ 3, entre las bases $\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ y $\{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\}$.

Hallar las coordenadas del polinomio $1+x+x^2+x^3$ directamente en las dos bases y comprobar que están relacionadas por las matrices de cambio de base.

APLICACIONES DEL CONCEPTO DE DIMENSION A PROCESOS CONCRETOS.

Independencia del número de escalones obtenidos escalonando una matriz.

Queremos aquí mostrar, sin usar determinantes, que el número de escalones de la matriz escalonada E obtenida escalonando una matriz dada A es independiente del itinerario seguido para escalonarla (de las operaciones elementales utilizadas y del orden de éstas).

Primero demostramos que las filas no nulas de una matriz escalonada tal que todos sus elementos tienen inverso, son independientes:

Sea

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mn} \end{pmatrix}$$

una matriz escalonada.

Sea

$$\lambda_1(e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1n}) + \lambda_2(e_{21}, e_{22}, \cdots, e_{2n}) + \cdots +$$
$$+ \cdots + \lambda_i(e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in}) + \lambda_r(e_{r1}, e_{r2}, \cdots, e_{rn})$$

una conbinación lineal nula de sus filas

Recordemos que por ser la matriz escalonada, si e_{1k} es el primer número distinto de cero de la primera fila $e_{ik} = 0$ para $i > 1$. Entonces, la k-ésima coordenada de la anterior combinación lineal se reduce a $\lambda_1 e_{1k}$, pero si esta combinación lineal es nula, $\lambda_1 e_{1k} = 0$. Como $e_{1k} \neq 0$ y pertenece a un cuerpo, existe e_{1k}^{-1} y entonces tenemos $\lambda_1 = (\lambda_1 e_{1k})e_{1k}^{-1} = 0$.

Sea ahora e_{2l} el primer número no nulo de la segunda fila. Entonces, $e_{il} = 0$ para $i > 2$. Como $\lambda_1 = 0$, la l-ésima coordenada de la combinación lineal escrita es $\lambda_2 e_{2l}$, pero como la combinación lineal es nula, $\lambda_2 e_{2l} = 0$ y concluimos que $\lambda_2 = 0$, lo mismo que en el caso anterior.

Vamos considerando las filas sucesivamente en orden creciente y llegamos a la conclusión de que todas las λ_j son nulas ya que lo son las λ_i anteriores, y en cada fila no nula hay una primera coordenada no nula tal que las coordenadas en ese lugar de las filas sucesivas son nulas. Por tanto, las filas no nulas de la matriz escalonada son independientes.

Ahora, dada una matriz $A_{m\times n}$, llamamos $\{v_i\}_{i\leq m} \subset K^n$ a los vectores que tienen por coordenadas los elementos de las filas de la matriz A y llamamos espacio fila de A: (F(A)) al subespacio de K^n engendrado por los vectores $\{v_i\}_{i\leq m}$.

El número de escalones de la matriz escalonada E(A) obtenida de A es igual al número de sus filas no nulas. Veamos que este número (el de filas no nulas de la matriz escalonada al que queda reducida A) *es la dimensión del subespacio vectorial F(A).* Cuando lo hayamos visto, tendrenos que los distintos números de filas no nulas de distintas matrices escalonadas obtenidas de A son todos iguales, por ser iguales a la dimensión de F(A).

Para ello, primero, se puede comprobar que en cada operación elemental realizada en la matriz A para hacerla escalonada, sus vectores filas se transforman en otros vectores que dependen linealmente de los anteriores, por lo que el subespacio de las combinaciones lineales de los vectores filas de la matriz obtenida está contenido en el subespacio fila de la matriz de la que provenía y al final $F(E(A)) \subset F(A)$. Como las operaciones elementales tienen como inversas, otras operaciones elementales; al volver hacia atrás desde E(A) a A, en cada operación elemental ocurre lo mismo: el subespacio engendrado por los vectores filas está contenido en el anterior, por lo que $F(A) \subset F(E(A)))$, luego $F(A) = F(E(A)))$.

Después, siendo las filas de E(A): $\{e_i = (e_{i1}, e_{i2}....e_{in})\ i \leq m\}$, y siendo las filas no nulas de E(A): $\{e_i = (e_{i1}, e_{i2}....e_{in})\ i \leq r\}$, por lo anterior, $F(A) = \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_i, ...v_m\} = \mathcal{L}\ \{e_1, e_2, ..., e_i, ...e_m\} = \mathcal{L}\{e_1, e_2, ..., e_i, ...e_r\}$ ya que podemos prescindir de las filas nulas.

Como los vectores filas no nulas de E(A) son independientes y forman un sistema generador de $\mathcal{L}\{e_1, e_2, ..., e_i, ...e_r\} = \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_i, ..., v_m\}$, son una base de este subespacio.

Cualquiera que sea la forma en que escalonamos la matriz A, el número de filas no nulas (y, por tanto, el número de escalones) coincide con la dimensión del subespacio F(A).

O sea, si escalonando de otra forma, obtenemos que $\mathcal{L}\{e'_1, e'_2, ..., e'_i, ...e'_{r'}\} = \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_i, ..., v_m\}$, como $\{e_1, e_2, ..., e_i, ...e_r\}$ y $\{e'_1, e'_2, ..., e'_i, ...e'_{r'}\}$ son dos bases del mismo subespacio vectorial, han de tener el mismo número de elementos, luego $r = r'$.

En el proceso de esta demostración hemos hallado bases del subespacio vectorial engendrado por las filas de una matriz. Si nos dan un subespacio vectorial por una familia de generadores, una manera de obtener una base del subespacio es escribir la matriz formada por las coordenadas de esos vectores en filas, escalonarla y los vectores correspondientes a las filas no nulas de la matriz escalonada obtenida, son una base del subespacio dado.

Si queremos que la base sea un subconjunto del conjunto de generadores dado, seguimos el siguiente procedimiento:

Extracción de la base a partir de un sistema generador.

Se deduce de lo visto en la proposición 7 que para extraer una base de un sistema generador hay que ir eliminando los vectores que dependan de los demás. Esto, a veces, puede hacerse a simple vista, pero, en general, no. Veremos cómo escoger un sistema generador independiente utilizando el rango de la matriz que tiene por filas las coordenadas de los vectores generadores en una base prefijada.

El número de vectores que tenemos que escoger es igual a la dimensión del subespacio considerado.

Sea $S = \mathcal{L}\{v_1, v_2, ..., v_i, ...v_m\}$ donde cada $v_i = (v_{i1}, v_{i2}....v_{in})$ está expresado en una base prefijada del espacio total. Llamamos A a la matriz que tiene por filas las coordenadas de cada v_i y la reducimos a su forma escalonada a la que llamamos E(A). Sabemos (por el procedimiento de la demostración del teorema de Rouché-Frobenius) que el número de filas no nulas de una matriz escalonada E(A) a la que A se reduzca es igual al máximo de los órdenes de los menores distintos de cero de A, al que vamos a llamar r. Hemos visto que este número (el de filas no nulas de la matriz escalonada E(A)) es la dimensión del subespacio vectorial engendrado por los vectores $\{v_i\}_{i\leq m}$. Luego es r, el número de vectores independientes que tenemos que escoger.

Tenemos que decidir ahora cuáles pueden ser esos r vectores. Por la definición de rango, podemos escoger en A un menor de orden r distinto de cero; consideramos la submatriz formada por las r filas de las dadas que intersecan con este menor distinto de cero. El rango de esta submatriz es r, por lo que el subespacio engendrado por esas filas es de dimensión r. Como este subespacio está contenido en el dado y es de su misma dimensión, coincide con el dado y podemos escoger las r filas correspondientes a la submatriz considerada para formar una base del subespacio dado.

Ejercicios:

5.11.1. Calcular la dimensión y extraer una base del subespacio de R^5 engendrado por
$\{(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 3, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 2, 1)\}$.

5.11.2. Encontrar una base de R^4 que contenga $\{(0,0,1,1),(1,1,0,0)\}$.

5.11.3. Calcúlese según los valores de α,β,γ la dimensión del espacio vectorial:
$S=\mathcal{L}\{(1,1,0),(2,1,\alpha),(3,0,\beta),(1,\gamma,1)\}$

5.11.4. Dado el subespacio vectorial de las matrices cuadradas 2×2 engendrado por

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$$

extraer una base del subespacio considerado, de este sistema de generadores.

5.11.5. Dado el subespacio vectorial de los polinomios de grado 3 engendrado por los vectores: $\{x^2-1,x^2+1,x^3+4,x^3\}$ extraer una base de este sistema de generadores.

También, del procedimiento anterior se deduce que el rango de una matriz A es igual al número de sus filas independientes, ya que siempre se puede extender un sistema independiente de vectores a una base de F(A) y un número de vectores superior al de la dimensión del subespacio F(A) es dependiente.

Y como el rango de A, como máximo de los órdenes de los menores distintos de cero de A, es igual al rango de su traspuesta, este rango es igual al número de filas independientes de ${}^tA$, es decir, al número de columnas de A.

Aplicación del rango a la obtención de las ecuaciones cartesianas de un subespacio dado por sus generadores.

Para simplificar los cálculos, se obtiene primero una base del subespacio dado. Una vez obtenida una base del subespacio vectorial dado por sus generadores, la condición necesaria y suficiente para que un vector $(x_1,x_2,...,x_n)$ sea del subespacio es que dependa linealmente de los vectores de la base, es decir, que el rango de la matriz que tiene por filas las componentes de los vectores de la base sea igual al rango de esta matriz aumentada con la fila $(x_1,x_2,...,x_n)$.

Como el rango de la matriz que tiene por filas las coordenadas de los vectores de la base es igual al número de estos, (llamémoslo r), podemos encontrar en ella un menor de orden r distinto de cero. Agrandamos la matriz formada por las coordenadas de los vectores de la base en filas con la fila $(x_1, x_2, ..., x_n)$ debajo de las anteriores; completando ahora el menor encontrado de todas las formas posibles a un menor de orden r+1 en la matriz agrandada con las columnas que no aparecen en dicho menor, obtenemos n-r expresiones lineales en las coordenadas que han de ser cero para que el nuevo vector $(x_1, x_2, ..., x_n)$ pertenezca al subespacio. Estas n-r condiciones necesarias son también suficientes para que el vector dependa linealmente de los de la base. Para darnos cuenta de ello, tengamos en cuenta que al ser el determinante de una matriz igual al de su traspuesta, el rango de la matriz, no sólo es el número de filas independientes, sino el número de columnas independientes y que la anulación de cada una de las expresiones obtenidas indica que cada columna de la matriz agrandada depende linealmente de las columnas del menor distinto de cero de orden r encontrado. Por ello aseguran que el número de columnas independientes de la matriz agrandada es r; y también el número de sus filas, por lo que aseguran que la fila $(x_1, x_2, ..., x_n)$ pertenece al subespacio considerado.

Ninguna de estas ecuaciones es superflua porque considerando la matriz de los coeficientes del sistema homogéneo formado por ellas, las n-r columnas formadas por los coeficientes de las incógnitas que no están debajo de las del menor distinto de cero tienen sólo un elemento distinto de cero de valor absoluto igual al del menor distinto de cero, permutado además de tal forma que dan lugar a un menor de orden n-r distinto de cero. Conviene comprobarlo con un ejemplo.

Así tenemos n-r ecuaciones que son necesarias y suficientes para que un vector $(x_1, x_2, ..., x_n)$ pertenezca al subespacio.

Hay una sola ecuación cuando la dimensión del subespacio es $n-1$; estos subespacios se llaman hiperplanos. El subespacio solución de un sistema de ecuaciones homogéneo es una intersección de hiperplanos. Y según hemos visto ahora, los subespacios engendrados por una base de r vectores son intersección de $n-r$ hiperplanos.

Ejercicios:

5.12.1. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios de R^4:

$S_1 = \mathcal{L}\{(1,0,1,0)(2,1,0,-1)(1,-1,3,1)\}$,

$S_2 = \mathcal{L}\{(3,1,0,-1)(1,1,-1,-1),(7,1,2,-1)\}$,

$S_3 = \mathcal{L}\{(0,2,5,0)\}$.

5.12.2. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios de R^5:

$S_1 = \mathcal{L}\{(1,0,1,0,1)(0,1,1,0,1)(1,1,3,1,1),(0,0,1,1,1)(0,-1,1,2,1)\}$,

$S_2 = \mathcal{L}\{(1,0,1,0,0)(2,1,0,-1,1)(2,0,1,0,0),(3,1,0,-1,1)\}$.

Cálculo del rango de la matriz A y búsqueda del menor distinto de cero de orden igual al rango.

Según la definición de rango de A como el máximo de los órdenes de los menores distintos de cero, parece que habría que calcularlos todos, pero teniendo en cuenta que también es el número de filas independientes de la matriz, no es necesario calcular los determinantes de todas las submatrices de A, según el procedimiento que vamos a ver.

Veamos antes un ejemplo: calculemos el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Podemos prescindir de la primera columna de ceros, porque siempre que aparezca en un menor, este menor tiene determinante cero.

Empezamos aquí por el primer 1 de la primera fila y la segunda columna, que da un menor de orden uno distinto de cero.

Ahora, lo orlamos con elementos de la segunda fila y de la segunda columna para formar un menor de orden 2.

De esta forma, obtenemos:

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Entonces, el rango de la matriz primitiva es mayor o igual que dos y las filas 1^a y 2^a son independientes.

Ampliamos este menor con la fila 3^a y columna 3^a, obteniendo:

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} = 0$$

y con la fila 3 y con la columna 4 obteniendo:

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

Ya que la anulación de estos dos determinantes implica la dependencia lineal de las dos últimas columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

respecto a las dos primeras, se sigue de la anulación de estos dos determinantes, la anulación de

$$det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

ya que sus tres columnas perteneces a un espacio de dimensión 2. Por tanto, no es necesario calcular este determinante.

Al mismo tiempo, el número de filas independientes de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

es igual a su número de columnas independientes igual a 2.

Como calcular el rango de la matriz total es calcular el número de filas independientes, podemos prescindir de la 3^a fila en el cálculo de las filas independientes y no tenemos que calcular ningún determinante de ningún menor de orden mayor que 3 en el que aparezcan las tres primeras filas.

Ampliamos ahora el menor de orden 2 distinto de cero obtenido con elementos de la 4^a fila y 3^a columna y obtenemos:

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -9 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

Entonces, el rango es mayor o igual que 3 y las filas $1^a, 2^a$ y 4^a son independientes.

Para ver si la última fila es independiente de las anteriores, ampliamos el menor de orden 3 obtenido a un menor de orden 4, obteniendo:

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -9 & -6 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -13 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

Ya podemos concluir que el rango de la matriz es tres sin necesidad de calcular más menores. Podríamos pensar que quizá otra submatriz de orden cuatro con otras filas pudiera tener determinante distinto de cero.

Pero lo que se deduce de que el anterior determinante es cero, es que la última fila depende de las otras, luego sólo hay tres filas independientes. Entonces, el espacio engendrado por las filas de la matriz es de dimensión 3 y cualesquiera que sean las cuatro filas que escojamos, por la proposición 7, son dependientes, siendo por tanto el menor formado, nulo y el rango de A no superior a 3.

Nos hemos ahorrado el cálculo de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 9 & -6 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 9 & -6 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 9 & -6 \end{vmatrix}$$

<u>Estableciendo, en general,</u>
<u>el procedimiento de cálculo del rango de una matriz</u>:

Podemos prescindir de las columnas nulas y de las filas nulas de la matriz porque no aumentan el orden de los menores con determinante distinto de cero.

Hecho esto, después de una permutación de filas, (que no altera el rango), si es necesario, podemos suponer que a_{11} es distinto de cero. Entonces consideramos todos los menores de orden dos en los que figura a_{11} con elementos de la segunda fila, si alguno de estos menores es distinto de cero, el rango de la matriz es mayor o igual que dos. En caso contrario, el rango de la matriz formada por las dos primeras filas es 1. Entonces, la segunda fila es múltiplo de la primera, por ello podemos prescindir de ella en el cálculo de las filas independientes. Repetimos el proceso con las restantes filas hasta encontrar, o bien que todas son múltiplos de la primera y entonces el rango es uno y hemos acabado. O bien un menor de orden dos con determinante no nulo, y entonces, el rango es mayor o igual que dos y hemos encontrado dos filas independientes.

Para averiguar si el rango es mayor que dos, consideramos los menores de orden 3 obtenidos al ampliar el primer menor de orden dos con determinante distinto de cero encontrado, con elementos correspondientes de las columnas siguientes y de la fila siguiente. Si todos los determinantes de las submatrices de orden 3 con esta fila son cero, esa fila depende de las dos anteriores y podemos prescindir de ella en la formación de más menores.

Seguimos formando menores de orden 3 con las filas siguientes. Si todos los menores formados así salen con determinante cero, las filas siguientes dependen de las dos primeras. Al haber sólo dos filas independientes, otro menor cualquiera de orden 3 es cero, el rango es dos y hemos acabado.

Si hay un menor de orden 3 con determinante distinto de cero, el rango de la matriz es mayor o igual que 3 y hemos encontrado tres filas independientes.

El procedimiento es análogo para ver si el rango de la matriz es mayor que 3, ampliando el menor de orden 3 distinto de cero encontrado con elementos de las columnas y de las filas siguientes.

Seguimos aumentando el tamaño de los menores tanto como sea posible con el mismo proce-dimiento y cuando no podamos aumentar el tamaño, hemos llegado al máximo orden de los menores con determinante distinto de cero en los que aparece parcial o totalmente la primera fila no nula.

Podríamos pensar que al formar submatrices que no empiecen en la 1^a fila no nula, orlándolas luego con elementos correspondientes de las otras columnas y otras filas se pudieran encontrar submatrices de orden superior al rango establecido anteriormente, con determinante distinto de cero. Pero en el procedimiento seguido hemos hallado el máximo número de filas independientes. Este número es la dimensión del espacio vectorial engendrado por las filas, independiente del orden considerado al formar las submatrices. Por tanto no tenemos que comprobar más determinantes de más submatrices.

Además, como el rango de la matriz es la dimensión del espacio engendrado por sus vectores filas y del espacio engendrado por sus vectores columnas, el orden de éstas no influye en la dimensión. Por ello, podemos hacer un intercambio de filas o de columnas antes de empezar a calcular menores si vemos que las operaciones van a resultar más fáciles.

<u>Ejercicios:</u>

5.13.1. Estudiar, según el valor de λ, los rangos de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.13.2. Estudiar, según los valores de λ la compatibilidad de los sistemas $AX = b$ donde la matriz $A|b$ es la dada a continuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & \lambda & 5 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right).$$

Aplicación al método de Gauss.

Las soluciones de un sistema homogéneo son un subespacio vectorial de dimensión igual al número de incógnitas menos el rango de la matriz del sistema y este rango se puede determinar calculando determinantes de menores de la matriz de coeficientes de la manera ordenada indicada.

SUMA E INTERSECCIÓN de subespacios vectoriales.

La intersección de dos subespacios vectoriales es su intersección conjuntista. El corolario 1 afirma que es otro subespacio vectorial.

Se define la suma de dos subespacios vectoriales como el conjunto de los vectores que son suma de vectores de los dos subespacios. Puede comprobarse como ejercicio, que es otro subespacio vectorial porque cumple las condiciones de la proposición 2.

La suma de dos subespacios vectoriales está engendrada por la unión de dos sistemas generadores de cada uno de los subespacios. Sus ecuaciones se obtienen a partir de este sistema generador, suprimiendo los generadores dependientes.

Las dimensiones de la suma y de la intersección de dos subespacios están relacionadas por la fórmula de las dimensiones para la suma y la intersección de dos subespacios vectoriales.

Fórmula de las dimensiones:

Si V_1 y V_2 son dos subespacios vectoriales,

$$dim(V_1) + dim(V_2) = dim(V_1 + V_2) + dim(V_1 \cap V_2).$$

Cuando la intersección $V_1 \cap V_2$ es $\{0\}$, la suma se llama suma directa y se representa por $V_1 \oplus V_2$.

Si además de ser directa la suma, $V_1 \oplus V_2 = V$, los dos subespacios se llaman *complementarios*.

Demostración de la Fórmula de las dimensiones.

Sean V_1, V_2, los subespacios vectoriales de dimensiones n_1 y n_2, respectivamente. Sea k la dimensión de la intersección. La base del subespacio intersección se puede ampliar a una base de V_1 y a una base de V_2; podemos suponer que $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ es una base de $V_1 \cap V_2$, $\{e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_{n_1}\}$ una base de V_1, $\{e_1, e_2, ..., e_k, e'_{k+1}, ..., e'_{n_2}\}$ una base de V_2.

Nuestra fórmula está demostrada si vemos que

$$\{e_1, e_2, ...e_k, e_{k+1}, ...e_{n_1}, e'_{k+1}, e'_{k+2}, ...e'_{n_2}\}$$

es una base de $V_1 + V_2$.

Desde luego, los vectores

$$\{e_1, e_2, ...e_k, e_{k+1}, ...e_{n_1}, e'_{k+1}, e'_{k+2}, ...e'_{n_2}\}$$

son un sistema generador de la suma. En cuanto a la independencia lineal, sea

$$\Sigma_{i=1}^{n_1}\lambda_i e_i + \Sigma_{j=1}^{n_2-k}\lambda'_j e'_{k+j} = 0$$

Veamos que todos los coeficientes han de ser nulos.

Escribamos:

$$\Sigma_{i=1}^{n_1}\lambda_i e_i = -\Sigma_{j=1}^{n_2-k}\lambda'_j e'_{k+j}$$

El vector del primer miembro de esta igualdad está en V_1 y el vector del segundo miembro de la igualdad está en V_2. Al ser iguales estos vectores, están en la intersección de V_1 y de V_2. Este vector de $V_1 \cap V_2$ se expresa de manera única en cada una de las bases de V_1, V_2 y $V_1 \cap V_2$.

Las coordenadas del vector en la base dada de V_1 son las $(\lambda_i)_{i\leq n_1}$, de forma que si ha de estar en $V_1 \cap V_2$ ha de ser $\lambda_i = 0,\ para\ i\ tal\ \ que\ \ k < i \leq n_1$, y las $\{\lambda_i\}_{i\leq k}$ son las coordenadas del vector en la base de $V_1 \cap V_2$. La suma considerada: $\Sigma_{i=1}^{n_1}\lambda_i e_i + \Sigma_{j=1}^{n_2-k}\lambda'_j e'_{k+j} = 0$, queda, entonces, como una combinación lineal nula de los vectores de la base de V_2 y por tanto sus coeficientes han de ser cero.

Se pueden sacar importantes consecuencias de la fórmula de las dimensiones para la suma directa de subespacios:

Si $V_1 + V_2 = V_1 \bigoplus V_2$, por ser la intersección de los dos subespacios cero, la unión de las bases de V_1 y de V_2 es una base de su suma directa. (Basta observar la demostración).

Si además los espacios son complementarios, la unión de las dos bases es una base del espacio total. Por eso, dado un subespacio V_1, los vectores que se puedan añadir a la base de V_1 para dar una base del espacio total, constituyen una base de un espacio complementario de V_1.

Aunque la condición para que dos espacios sean complementarios es que su intersección sea el cero y su suma sea el total, sólo es necesario comprobar una de estas dos condiciones además de que la suma de las dimensiones de los dos subespacios es la dimensión del espacio total, porque cada una de ellas se da contando con la otra más la fórmula de las dimensiones. Es decir:

a) Si $V_1 \bigcap V_2 = 0$, V_1 y V_2 son complementarios si y sólo si la suma de sus dimensiones es la dimensión del espacio total.

b) Si la suma de V_1 y V_2 es el espacio total, V_1 y V_2 son complementarios si y sólo si la suma de sus dimensiones es igual a la dimensión del espacio total.

Veamos a):

Si $V_1 \bigcap V_2 = 0$, la fórmula de las dimensiones implica que $dim(V_1+V_2) = dim(V_1) + dim(V_2)$; sea V el espacio total, como $V_1 + V_2 = V$ si y sólo si tienen la misma dimensión, $V_1 + V_2 = V$ si y sólo si $dim(V_1) + dim(V_2) = dimV$.

Veamos b):

Si $V_1 + V_2 = V$, la fórmula de las dimensiones da $dim(V_1 \bigcap V_2) = dim(V_1)+dim(V_2)-dim(V_1+V_2)$; por tanto $V_1 \bigcap V_2 = 0 (\equiv dim(V_1 \bigcap V_2) = 0)$ si y sólo si $dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 + V_2) = 0$, es decir, si $dim(V_1) + dim(V_2) = dim(V_1 + V_2) = dimV$.

Ejercicios:

5.14.1.

Si $S_1 = \mathcal{L}\{(1,-5,2,0)(1,-1,0,2)\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(3,-5,2,1)(2,0,0,1)\}$, hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y de $S_1 \bigcap S_2$.

5.14.2.

Si $S_1 = \mathcal{L}\{(1,0,1,0)(2,1,0,-1)\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(3,1,0,-1)(1,1,-1,-1)\}$, hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y de $S_1 \bigcap S_2$.

5.14.3. Comprobar que $S_1 + S_2 = S_2$ y $S_1 \bigcap S_2 = S_1$ si
$S_1 = \mathcal{L}\{(3,1,0,-1,0)(1,1,-1,-1,-1)\}$,
$S_2 = \mathcal{L}\{(1,0,1,0,1)(2,1,0,-1,0)(2,0,1,0,1)\}$.

5.14.4. Siendo $S_1 = \mathcal{L}\{(1,1,2,0)(-2,0,1,3)\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(0,2,5,0)(-1,1,3,2)\}$, Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \bigcap S_2$.

5.14.5. Siendo $S_1 = \mathcal{L}\{(0,1,1,0)(1,0,0,1)\}$ y

$$S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & 0 \\ x_1 & +x_2 & & = & 0 \end{array} \right.$$

hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \bigcap S_2$.

5.14.6. Siendo

$$S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & & -x_4 = & 0 \end{array} \right.$$

y

$$S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & 0 \\ x_1 & +x_2 & & = & 0 \end{array} \right.$$

hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \bigcap S_2$.

5.14.7. Siendo F_1 el plano de ecuación $x + 2y - z = 0$ y F_2 la recta de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rrr} x & -y & +2z = 0 \\ -2x & +2y & +z = 0 \end{array}\right\}$$

Averiguar si son complementarios.

5.14.8. Siendo $V_1 = \mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ y $V_2 = \mathcal{L}\{(0,1,1)\}$. Averiguar si son complementarios.

5.14.9. Comprobar que son complementarios los subespacios de ecuaciones:

$$S_1 \equiv \left\{\begin{array}{rrrrcl} -2x_1 & -5x_2 & +4x_3 & & = & 0 \\ -2x_1 & +7x_2 & & +4x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad S_2 \equiv \left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 0 \end{array}\right.$$

5.14.10. Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de un espacio complementario de

a) $S_1 = \mathcal{L}\{(0,2,5,0)(-1,1,3,2)\}$.

b) $S_2 = \mathcal{L}\{(1,1,0,0)(1,0,1,0)(0,0,1,1)(0,1,0,1)\}$

5.14.11. Hallar una base de $S_1 \bigcap S_2$ donde

$$S_1 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$S_2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

¿Cúal es $S_1 + S_2$?.

5.14.12. Hallar una base de $S_1 \bigcap S_2$ y de $S_1 + S_2$, donde

$$S_1 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$S_2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Hallar también las ecuaciones cartesianas de $S_1 \bigcap S_2$ y de $S_1 + S_2$.

5.14.13. En $\mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ se consideran los subespacios que conmutan con cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar una base de cada uno de ellos, de su suma y de su intersección.

b) Hallar una base de un espacio complementario del subespacio de las matrices que conmutan con A.

5.14.14. Sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y $S_1 = \{A|AM = A\}$, $S_2 = \{B|MB = B\}$.

Encontrar dimensiones y bases de $S_1 \bigcap S_2$ y de $S_1 + S_2$.

5.14.15. Hallar los subespacios suma e intersección de los siguientes subespacios de las matrices cuadradas de orden n:

a) El subespacio de las matrices triangulares superiores de orden n y el subespacio de las matrices triangulares inferiores.

b) El subespacio de las matrices simétricas de orden n y el subespacio de las matrices antisimétricas de orden n.

5.14.16. Hallar los subespacios suma e intersección de los siguientes subespacios del espacio de los polinomios de grado ≤ 3: S_1 es el subespacio de los polinomios múltiplos de $x+1$ y S_2 es el subespacio de los polinomios múltiplos de $x-1$.

5.14.17. En R^4 sean $U = \mathcal{L}\{u_1, u_2\}$ y $V = \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$ donde

$$u_1 = (1, 1, 2, -\lambda), u_2 = (-1, 1, 0, -\lambda), v_1 = (1, \lambda, 2, -\lambda), v_2 = (2, 3, \lambda, 1)$$

Hallar según los valores de λ las dimensiones de U, V $U + V$, $U \bigcap V$.

PROBLEMAS RESUELTOS DE LOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE ÁLGEBRA LINEAL I.

1. Decidir acerca de la dependencia o independencia lineal de los vectores:

a)

$$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_1.\}$$

donde e_1, e_2, e_3, e_4 son cuatro vectores independientes.

b)

$$\{(1,1,0),(1,0,0)(0,0,1),(x,y,z)\}$$

cualesquiera que sean (x, y, z)

a) Serán independientes si los únicos coeficientes λ_1,λ_2,$\lambda_3\lambda_4$, que podemos poner para que salga cero la combinación lineal:

$$\lambda_1(e_1 - e_2) + \lambda_2(e_2 - e_3) + \lambda_3(e_3 - e_4) + \lambda_4(e_4 - e_1)$$

son todos cero.

Desarrollando la operación, tenemos:

$$(\lambda_1 - \lambda_4)e_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)e_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)e_3 + (\lambda_4 - \lambda_3)e_4$$

combinación lineal de vectores independientes, que será cero si y sólo si todos sus coeficientes son cero. Lo que da el sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & & & -\lambda_4 & = 0 \\ -\lambda_1 & +\lambda_2 & & & = 0 \\ & -\lambda_2 & +\lambda_3 & & = 0 \\ & & -\lambda_3 & +\lambda_4 & = 0 \end{array}\right\}$$

que se cumple si $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2$ no necesitando ser todos cero, por lo que no son linealmente independientes. Podemos tomar todos los $\lambda_i = 1$ y obtenemos cero.

b)

Los vectores $\{(1,1,0),(1,0,0)(0,0,1),(x,y,z)\}$son dependientes porque $\{(1,1,0),(1,0,0)(0,0,1)\}$ son ya una base de R^3, ya que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Entonces, cualquier otro vector (x, y, z) depende linealmente de los anteriores.

2. Hallar los números complejos z para los cuales los vectores:

$$\{(z+i, 1, i), (0, z+1, z), (0, i, z-1)\}$$

son linealmente dependientes en el espacio vectorial C^3 sobre el cuerpo C.

Solución:

Los tres vectores son dependientes si y sólo si el determinante de la matriz cuyas filas son las coordenadas de los vectores tiene determinante igual a cero.

$$\begin{vmatrix} z+i & 1 & i \\ 0 & z+1 & z \\ 0 & i & z-1 \end{vmatrix} = (z+i)(z^2-1-iz) = z^3 - i = 0$$

implica que z es una raiz cúbica de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Las raices cúbicas de i son

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

,

$$e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

Los números complejos z para los que los vectores dados son dependientes son los tres anteriores.

3. Dados

$$S_1 = \mathcal{L}\{(1,2,1,2), (2,-1,-1,-1)\} \quad S_2 = \mathcal{L}\{(1,1,1,-1), (-2,5,4,3)\}$$

Hallar bases y ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y de $S_1 \cap S_2$.

Solución:

El subespacio $S_1 + S_2$ está engendrado por la unión de los sistemas de genera-dores de S_1 y de S_2, por tanto,

$$S_1 + S_2 = \mathcal{L}\{(1,2,1,2),(2,-1,-1,-1),(1,1,1,-1),(-2,5,4,3)\}$$

Estos cuatro vectores son un sistema de generadores de la suma de S_1 y S_2, pero una base es un sistema de generadores independiente. Para ver si son independientes calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -20 \end{vmatrix} = 0.$$

Entonces, no son linealmente independientes y por ello no son una base de $S_1 + S_2$. Para ver si hay tres linealmente independientes calculamos los menores 3×3. El menor superior izquierdo 3×3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

por tanto, los tres primeros vectores son independientes y son suficientes para formar una base:

$$\textit{Base de } S_1 + S_2 = \{(1,2,1,2),(2,-1,-1,-1),(1,1,1,-1)\}$$

La ecuación cartesiana de $S_1 + S_2$ se obtiene igualando a 3 (que es su dimensión) el rango de la matriz formada por los tres vectores de la base y un vector genérico (x, y, z, t) del subespacio suma:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 3,$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \quad \equiv \quad -2x + 9y - 10z - 3t = 0.$$

En cuanto a $S_1 \cap S_2$, hallamos primero sus ecuaciones cartesianas y después una base.
Por la fórmula de las dimensiones,

$$dim(S_1 + S_2) + dim(S_1 \cap S_2) = dim(S_1) + dim(S_2)$$

Como

$$dim(S_1) = rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$dim(S_2) = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$dim(S_1 \cap S_2) = 1$

Una base de $(S_1 \cap S_2)$ está formada entonces por un vector y el número de ecuaciones cartesianas independientes que la determinan es 3.

Como un vector $v \in (S_1 \cap S_2)$ si y sólo si $v \in S_1$ y $v \in S_2$, v debe de satisfacer las ecuaciones de S_1 y las de S_2, que son dos para cada uno de los subespacios y de las cuatro ecuaciones cartesianas escogeremos tres independientes.

Ecuaciones cartesianas de S_1:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 2$$

equivalente a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \equiv \quad -x + 3y - 5z = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0 \quad \equiv \quad 5y - 5t = 0$$

Ecuaciones cartesianas de S_2:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 & 3 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 2$$

equivalente a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \equiv \quad -x - 6y + 7z = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0 \quad \equiv \quad 8x - y + 7t = 0$$

Las ecuaciones cartesianas de S_1 seguidas de las de S_2 son:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} -x & +3y & -5z & & = 0 \\ & y & & -t & = 0 \\ -x & -6y & +7z & & = 0 \\ 8x & -y & & +7t & = 0 \end{array}\right\}$$

de las que tres independientes son las tres primeras porque

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 7 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

Un sistema de ecuaciones de $S_1 \cap S_2$ es:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} -x & +3y & -5z & & = 0 \\ & y & & -t & = 0 \\ -x & -6y & +7z & & = 0 \end{array}\right\}$$

Una base de $S_1 \cap S_2$ es un vector que verifica las tres ecuaciones: para ello damos a t el valor 1 y despejamos las demás incógnitas, obteniéndose:

$y = 1$, $z = \frac{3}{4}$, $x = -\frac{3}{4}$, entonces una base de $S_1 \cap S_2$ es el vector $(-\frac{3}{4}, 1, -\frac{1}{4}, 1)$.

Multiplicándolo por cualquier número distinto de cero, sigue siendo una base; entonces, una base de $S_1 \cap S_2$ es $(-3, 4, 3, 4)$, no teniendo éste último, números fraccionarios.

4. Sean dos subespacios de R^4:

$S_1 = L\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,1,1,2)\}$ y $S_2 = L\{(1,0,0,2)(1,1,1,1)\}$.

Hallar una base de:

a) $S_1 + S_2$

b) $S_1 \cap S_2$.

Solución:

a)

$$S_1 + S_2 = \mathcal{L}\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,1,1,2),(1,0,0,2),(1,1,1,1)\}$$

pero si un generador depende del resto, puede ser suprimido del sistema de generadores quedando el mismo espacio.

Como $(1,1,1,1) = (1,0,0,1) + (0,1,1,0)$, el vector $(1,1,1,1)$ puede ser suprimido del sistema generador.

También $(1,0,0,2) = (1,1,1,2) - (0,1,1,0)$ por lo que también se puede suprimir, quedando

$$S_1 + S_2 = \mathcal{L}\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,1,1,2)\} = S_1$$

Una base de la suma de subespacios es un conjunto de generadores independientes. El número de generadores independientes es el rango de la matriz cuyas filas son las coordenadas de los vectores.

Dicha matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que contiene al menor de orden 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de determinante 1.

Como el rango de la matriz es 3, los tres generadores son independientes, y por tanto son una base de $S_1 + S_2 = S_1$.

b) Como hemos visto que los dos generadores de S_2 dependen de los de S_1, se tiene $S_2 \subset S_1$ por lo que $S_1 \cap S_2 = S_2$. Sus dos generadores son independientes porque el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es dos ya que el menor formado por sus dos primeras columnas tiene determinante distinto de cero.

Por ello, una base de $S_1 \cap S_2$ es $\{(1,0,0,2)(1,1,1,1)\}$.

5. Dados los subespacios siguientes S_1 y S_2 de R^4:

$$S_1 = \mathcal{L}\{(1,1,-2,1),(0,1,-1,2)\} \qquad S_2 \equiv \left.\begin{array}{rrrrr} 3x & & +az & & = 0 \\ x & -2y & & -2t & = 0 \end{array}\right\}$$

Hallar a para que $S_1 + S_2$ sea distinto de R^4.

Solución:

Para que $S_1 + S_2$ sea distinto de R^4, es suficiente con que su dimensión sea menor que 4.

Como S_1 viene dado por sus generadores, su dimensión es el rango de la matriz que tiene en filas las coordenadas de cada generador:

$$dim S_1 = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Como S_2 viene dado por sus ecuaciones cartesianas, su dimensión es cuatro menos el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas.

$$dim S_1 = 4 - rang \begin{pmatrix} 3 & 0 & a & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

cualquiera que sea a.

Entonces, según la fórmula de las dimensiones:

$$dim(S_1 + S_2) = dimS_1 + dimS_2 - dim(S_1 \cap S_2) =$$
$$= 2 + 2 - dim(S_1 \cap S_2) = 4 - dim(S_1 \cap S_2)$$

y lo necesario para que $dim(S_1 + S_2) < 4$ es que $dim\ S_1 \cap S_2 > 0$
Si tuviéramos las ecuaciones cartesianas de $S_1 \cap S_2$ su dimensión sería cuatro menos el rango de la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas. Las ecuaciones de esta intersección son las ecuaciones de S_1 junto a las ecuaciones de S_2, por eso hallamos las ecuaciones de S_1 que provienen de la igualdad:

$$2 = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

y son p. ej. las dos siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = x + y + z = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ x & y & t \end{vmatrix} = x - 2y + t = 0$$

Entonces, las ecuaciones de $S_1 \cap S_2$ serían:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & & = 0 \\ x & -2y & & +t & = 0 \\ 3x & & +az & & = 0 \\ x & -2y & & -2t & = 0 \end{array}\right\}$$

y la dimensión de $S_1 \cap S_2$ sería mayor que cero si el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & a & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es menor que cuatro, es decir, si la matriz tiene determinante cero. Como su determinante es (desarrollando por la tercera columna):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -18 + 9a$$

$-18 + 9a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2$, para que $S_1 + S_2$ sea distinto de R^4.

6. Consideramos el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2.

a) Demostrar que $B = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ es una base de ese espacio vectorial.

b) Hallar las coordenadas de $1 + x + x^2$ en la base anterior.

Solución:

Para que $B = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ sea una base, los tres polinomios tienen que ser independientes como vectores y además tienen que ser un sistema generador de todos los polinomios de grado menor o igual que 2, es decir, cualquier polinomio de grado menor o igual que 2 se debe poder escribir como combinación lineal de los tres polinomios.

a_1) Serán independientes si los únicos coeficientes λ_1,λ_2,λ_3, que podemos poner en la combinación lineal:

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (x-1) + \lambda_3 \cdot (x-1)^2$$

para que dicha combinación lineal sea cero, son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Veámoslo:

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (x-1) + \lambda_3 \cdot (x-1)^2 \Rightarrow$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 x - \lambda_2 + \lambda_3 \cdot x^2 - 2\lambda_3 x + \lambda_3 =$$
$$= \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 - 2\lambda_3)x + \lambda_3 x^2 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2.$$

Entonces, han de ser ciertas las ecuaciones:

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0; \quad \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0; \lambda_3 = 0.$$

donde ya tenemos que ha de ser $\lambda_3 = 0$.

Sustituyendo $\lambda_3 = 0$ en la ecuación central, ha de ser $\lambda_2 - 2 \cdot 0 = 0$, de donde también $\lambda_2 = 0$ y sustituyendo ahora los ceros en la primera ecuación, tenemos $\lambda_1 = 0$.

Por tanto, son independientes.

a_2) Veamos que son un sistema generador:

Para ello, cualquier polinomio de grado menor o igual que 2: $a + bx + cx^2$, (que es un vector de este espacio) se debe poder escribir como combinación lineal de los tres polinomios dados.

Entonces ha de ser:

$$a + bx + cx^2 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (x-1) + \lambda_3 \cdot (x-1)^2$$

para algunos λ_1,λ_2,λ_3. Viendo que podemos encontrar valores de los λ_i que verifican la igualdad tenemos demostrado que son un sistema de generadores.

En efecto, las igualdades:

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 &= \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (x-1) + \lambda_3 \cdot (x-1)^2 = \\ &= \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 - 2\lambda_3)x + \lambda_3 x^2 \end{aligned}$$

dan

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = a, \quad \lambda_2 - 2\lambda_3 = b, \quad \lambda_3 = c.$$

donde ya tenemos λ_3. Sustituyendo $\lambda_3 = c$ en la ecuación central, ha de ser $\lambda_2 - 2c = b$, de donde también $\lambda_2 = 2c + b$, y sustituyendo ahora los valores de λ_2 y λ_3 en la primera ecuación tenemos $\lambda_1 - (b + 2c) + c = a$, de donde $\lambda_1 = a + b + c$. Por tanto son un sistema generador.

b)

Las coordenadas de $1 + x + x^2$ en la base anterior son los coeficientes λ_1,λ_2,λ_3 que correspondan según los valores encontrados anteriormente para un polinomio general $a + bx + cx^2$.

Como ahora $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$, tenemos, según lo hallado:

$$\lambda_3 = c = 1, \quad \lambda_2 = b + 2c = 3, \quad \lambda_1 = a + b + c = 3$$

Por tanto, las coordenadas son $(3, 3, 1)$.

Se puede y se debe comprobar que sustituyendo los valores de las coordenadas en la combinación lineal de los polinomios dados (vectores de este espacio)se encuentra el polinomio $1 + x + x^2$:

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2 = 3 + 3x - 3 + x^2 - 2x + 1 = 1 + x + x^2.$$

7. Estudiar si las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

forman una base del espacio de matrices 2×2 con números reales.

Solución:

Para que las cuatro matrices sean base, tienen que ser linealmente independientes y además ser un sistema generador.

a) Veamos si son independientes:

Para ello, la igualdad

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

sólo se puede cumplir cuando todos los λ_i son cero.

La expresión anterior es equivalente a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_4 & \lambda_4 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que implica (sumando las matrices):

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, deberían cumplirse las cuatro ecuaciones:

$\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \quad \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

Restando la segunda de la primera se obtiene $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, lo que implica $\lambda_1 = \lambda_2$.

Restando la cuarta de la segunda, se obtiene $\lambda_4 - \lambda_1 = 0$, lo que implica $\lambda_1 = \lambda_4$.

Entonces, sustituyendo, las ecuaciones se transforman en:

$$2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_3 = -2\lambda_1 \quad \lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_2 = -2\lambda_1$$

$$y \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

de donde

$$\lambda_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_1 = -3\lambda_1 = 0$$

de donde ha de ser $\lambda_1 = 0$, y de las anteriores, $\lambda_2 = \lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = \lambda_1 = 0$.

Como todos los λ_i han de ser cero, las matrices son linealmente independientes.

b) Para ver que son un sistema generador se debe ver que cualquier matriz fijada A puede ponerse como combinación lineal del sistema de matrices dadas, es decir, que podemos encontrar los coeficientes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ tales que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para ello,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_4 & \lambda_4 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix}$$

teniéndose las ecuaciones:

$\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = a \quad \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = b \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = c \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = d$

Restando a la primera la segunda, a la segunda la tercera, a la tercera la cuarta y dejando la cuarta tal como está, tenemos:

$\lambda_1 - \lambda_2 = a - b, \ \ -\lambda_1 + \lambda_3 = b - c, \ \ -\lambda_3 + \lambda_4 = c - d, \ \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = d.$

de donde

$\lambda_1 = \lambda_2 + a - b, \ \ \lambda_3 = \lambda_1 + b - c = \lambda_2 + a - c, \ \ \lambda_4 = \lambda_3 + c - d = \lambda_2 + a - d,$
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = d.$

Sustituyendo en la última, tenemos:

$\lambda_2 + a - b + \lambda_2 + \lambda_2 + a - c = d \ \equiv \ 3\lambda_2 = -2a + b + c + d \ \equiv \ \lambda_2 = \frac{1}{3}(-2a + b + c + d).$

Sustituyendo ahora el valor de λ_2 en las otras λ_i obtenemos:

$\lambda_1 = \frac{1}{3}(a - 2b + c + d), \ \ \lambda_3 = \frac{1}{3}(a + b - 2c + d), \ \ \lambda_4 = \frac{1}{3}(a + b + c - 2d).$

Obtenidos los valores de los λ_i, podemos poner la matriz fijada al principio como combinación lineal de las matrices del sistema independiente, siendo éste por tanto, un sistema generador.

También, para ver que son un sistema generador, se puede tener en cuenta que el espacio vectorial de las matrices 2×2 es de dimensión 4 y que todo sistema linealmente independiente se puede extender a una base. Entonces, al extender el sistema anterior a una base se obtendría una base de más de cuatro elementos, lo cual es contradictorio con el teorema de la base, que afirma que todas las bases tienen el mismo número de elementos. Por lo tanto, si cuatro elementos de este espacio vectorial son independientes, son ya una base y un sistema generador.

8. Hallar las coordenadas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en la base anterior.

Solución:
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ son las coordenadas de la matriz dada si

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, ha de ser
$\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \quad \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 1 \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, lo que implica $\lambda_1 = \lambda_2$.

Restando la cuarta ecuación de la segunda, por el mismo procedimiento se obtiene $\lambda_1 = \lambda_4$.

Por lo que la primera ecuación da $1 = 2\lambda_1 + \lambda_3$ y la última da $1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$; restando estas dos ecuaciones, se obtiene $0 = -\lambda_2 + \lambda_3$, es decir, $\lambda_2 = \lambda_3$ y todos los λ_i son iguales.

Mirando ahora en una de las ecuaciones obtenidas anteriormente, y sustituyendo se obtiene $3\lambda_1 = 1$, de donde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1/3$. Siendo las coordenadas de la matriz dada: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

9. Dados

$$S_1 = \mathcal{L}\{(1,1,-2,1),(1,0,-1,-1)\} \qquad S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x+y+z+t & = 0 \\ 2x-y+z-t & = 0 \end{array} \right.$$

Hallar una base de un subespacio complementario de $S_1 \cap S_2$.

Solución:

Antes de hallar una base del complementario de $S_1 \cap S_2$, hallamos una base de $S_1 \cap S_2$ y luego la completamos a una base de R^4, constituyendo los vectores que hemos añadido, una base de un complementario.

Una base de $S_1 \cap S_2$ puede escogerse cuando se tengan sus ecuaciones, que son las ecuaciones de S_2 junto a las ecuaciones de S_1. Como S_1 viene dado por generadores, sus ecuaciones surgen de la igualdad de los rangos de las dos matrices formadas una por los generadores de S_1 en filas y la otra por los mismos generadores en fila añadiéndole la fila (x, y, z, t):

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}.$$

Nos fijamos en el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y lo completamos con la última fila y cada una de las dos columnas restantes, teniendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0$$

Estos menores igualados a cero son:

$$\left. \begin{array}{ll} -x-y-z & = 0 \\ -x+2y-t & = 0 \end{array} \right\} \equiv \left. \begin{array}{ll} x+y+z & = 0 \\ x-2y+t & = 0 \end{array} \right\}$$

Son las ecuaciones de S_1.

Entonces, las ecuaciones de $S_1 \cap S_2$ son:

$$\left.\begin{array}{rl} x+y+z & =0 \\ x-2y+t & =0 \\ x+y+z+t & =0 \\ 2x-y+z-t & =0 \end{array}\right\}$$

de las cuales hay sólo 3 linealmente independientes porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6+3-9=0$$

y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

Por ello, la dimensión de $S_1 \cap S_2$ es 1. Una base de este espacio está constituida por $\{(-2,-1,3,0)\}$ (se puede obtener resolviendo por el método de Gauss el sistema de las ecuaciones de $S_1 \cap S_2$ y se puede comprobar que verifica dichas ecuaciones).

Según hemos dicho al principio, una base de un complementario de $S_1 \cap S_2$ está formada por tres vectores que añadidos a éstos den una base de R^4, p. ej.

$\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ ya que

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

Otra base de otro complementario es:

$\{(1,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ ya que

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

10. Sean $S_1 \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(R)$, $S_2 \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(R)$, los siguientes subespacios vectoriales:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ll} a+b & =0 \\ c+d & =0 \end{array} \right\} \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ll} a+c & =0 \\ b+d & =0 \end{array} \right\}$$

a) Explicar cual es la dimensión de $S_1 + S_2$

b) Hallar las ecuaciones cartesianas (o implícitas) de $S_1 + S_2$.

a)

Primero vamos a encontrar las dimensiones de S_1 y de S_2

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ll} a+b & =0 \\ c+d & =0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix} \middle| a \in R,\ c \in R \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{pmatrix} a \in R,\ c \in R \right\} =$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} a \in R,\ c \in R \right\} =$$

$$= \mathcal{L}\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \}$$

de donde

$$\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \}$$

es un sistema generador de S_1. También es una base porque es linealmente independiente:

$$\left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.$$

Entonces, $dim S_1 = 2$.

En cuanto a

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ll} a+c & =0 \\ b+d & =0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \middle| a \in R, b \in R \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -b \end{pmatrix} a \in R, b \in R \right\} =$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} a \in R, b \in R \right\} =$$

$$= \mathcal{L}\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \}$$

de donde

$$\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \}$$

es un sistema generador de S_2. También es una base porque es linealmente independiente:

$$\left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.$$

Por lo que también $dim(S_2) = 2$.

Un sistema generador de $S_1 + S_2$ es la unión de las bases de S_1 y de S_2:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \}$$

pero para que fuera una base, los únicos coeficientes que se podrían poner en

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

para que salga la matriz nula deben ser los coeficientes nulos. Haciendo la operación, tendríamos:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & -\lambda_2 - \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \left. \begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & & +\lambda_3 & & =0 \\ -\lambda_1 & & & +\lambda_4 & =0 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & & =0 \\ & -\lambda_2 & & -\lambda_4 & =0 \end{array} \right\}$$

Para que el sistema de cuatro incógnitas tenga únicamente la solución trivial, el determinante de la matriz de coeficientes ha de ser distinto de cero, pero

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

por lo que existen solciones no nulas para los coeficientes; por ello, no son independientes y para obtener una base hay que prescindir de una o varias matrices que dependan de las otras.

Observemos que las columnas de la matriz del sistema son las entradas de las matrices del sistema generador y que éstas son independientes si y sólo si las columnas lo son, lo cual se puede ver mirando el rango de la matriz; habiendo tantas matrices independientes como columnas independientes, siendo este número igual al rango de la matriz de coeficientes.

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

las tres marices primeras son independientes y por ser el determinante de la matriz total de coeficientes nulo, la cuarta matriz depende de las otras, pudiéndose prescindir de ella para dar una base.

Entonces, una base de $S_1 + S_2$ es:

$$\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

b)

Por lo que hemos visto una matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

pertenece a $S_1 + S_2$ si y sólo si depende de los vectores (matrices) de su base. Lo cual se verifica cuando la columna $(a, b, c, d)^t$ depende de las tres columnas primeras de la matriz de los coeficientes del sistema anterior, siendo su ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 0 & -1 & 0 & d \end{vmatrix} = -a-b-c-d=0 \equiv a+b+c+d=0.$$

11. Sea $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(R)$, determinado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{rrrr} a & +b & +c & +d=0 \\ 2a & +2b & +c & +d=0 \\ -a & & +2c & +2d=0 \end{array} \right\}$$

Encontrar, razonadamente, una base de un subespacio complementario de S.

Solución:

Como S es subespacio de un espacio vectorial de dimensión 4 y está determinado por tres ecuaciones independientes, S es de dimensión 1; (las tres ecuaciones son independientes porque el rango de la matriz de sus coeficientes es 3:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3, \text{ya que} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0).$$

Una base de S está formada por una matriz que satisface las ecuaciones, p.ej.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si el sistema hubiera sido complicado, la matriz se puede obtener resolviendo el sistema de las ecuaciones de S por el método de Gauss.

Las coordenadas de esta matriz en la base canónica:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

son: $(0, 0, -1, 1)$.

Un complementario de S tiene una base de tres vectores (matrices) independientes entre sí e independientes de la matriz de la base de S, para lo cual los vectores formados por sus coordenadas en la base canónica tienen que ser independientes entre sí e independientes del vector $(0,0,-1,1)$. Para encontrarlos escribimos una matriz con primera columna $(0,0,-1,1)$ y completamos con otras columnas que den determinante distinto de cero y esas columnas son las coordenadas en la base canónica de las matrices que forman la base de un complementario.

Como
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$
las matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
forman una base de un complementario de S.

También podíamos escribir una matriz con la primera fila $(0,0,-1,1)^t$ y completar con columnas que dieran una matriz con determinante distinto de cero. Las nuevas filas son las coordenadas en la base canónica de las matrices que engendran un complementario.
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$
y se obtienen las mismas matrices como generadores de un complementario.

Referencias.

[A] Algebra Lineal y aplicaciones. J. Arvesú Carballo, R. Alvarez Nodarse, F. Marcellán Español. Ed. Síntesis Madrid. 1999.

[Gr] Algebra lineal con aplicaciones. S. I. Grossman. Ed. Mc Graw Hill 2001.

[G] Matemáticas 2 Bachillerato. Carlos Gonzalez García. Jesús Llorente Medrano. Maria José Ruiz Jimńez. Ed. Editex. 2009.

[M] Matemáticas 2 Bachillerato. Mª Felicidad Monteagudo Martínez. Jesús Paz Fernández Ed. Luis Vives. 2003.

[S] Algebra lineal y sus aplicaciones. G. Strang Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. 1990.

[S2] Introduction to Linear Algebra. G.Strang Ed. Wellesley-Cambridge Press 1993.

APLICACIONES LINEALES.

Introducción.

Una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo es una aplicación que respeta las operaciones de espacio vectorial, es decir, aplica la suma de vectores en la suma de sus imágenes y el producto de un escalar por un vector en el producto del escalar por la imagen del vector, respectivamente.

Definición:
Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo y f una aplicación de V_1 en V_2. Se dice que f **es una aplicación lineal** si
a) Dados dos vectores cualesquiera v y v' de V_1, $f(v+v') = f(v)+f(v')$.
b) Dados un vector v de V_1 y un elemento del cuerpo λ, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

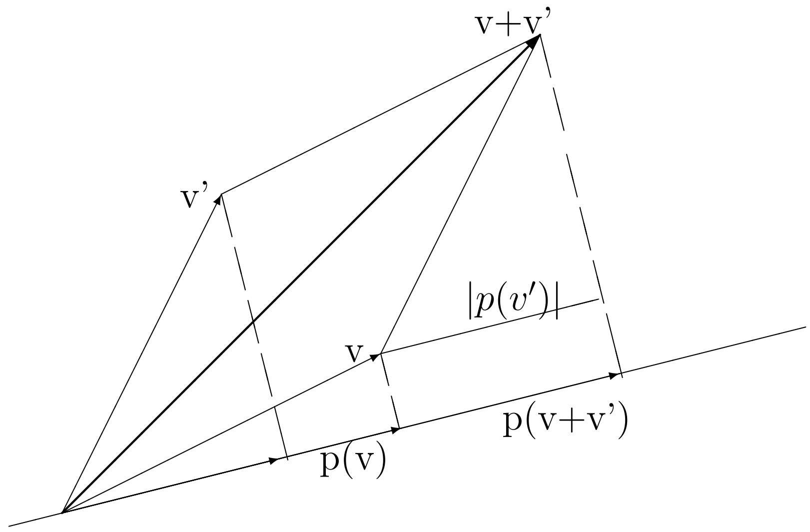
Las aplicaciones lineales se llaman también homomorfismos.

Las aplicaciones lineales nos permiten trasvasar los resultados encontrados en unos espacios vectoriales a otros en los que la intuición es más difícil.
Además, la importancia de la estructura de espacio vectorial está en que no sólo la encontramos en los conjuntos de vectores del plano o del espacio, sino en que se puede trasmitir a otros conjuntos que están en correspondencia biyectiva con algún R^n ó algún C^n, haciendo la biyección una aplicación lineal.

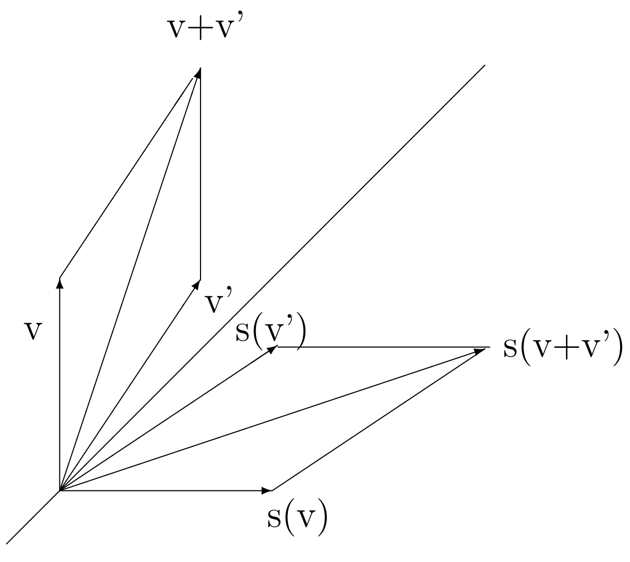
Consecuencia inmediata de la definición es:
1) $f(0) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0$.
2) $f(-v) = f((-1)v) = (-1)f(v) = -f(v), \quad \forall v \in V_1$.

Cuando el espacio original y el espacio final coinciden, el homomorfismo se llama endomorfismo.
Un ejemplo de endomorfismos son las aplicaciones que resultan al multiplicar los vectores del espacio por un número fijo: $f_\alpha(v) = \alpha v \quad \forall v \in V$. Estas aplicaciones se llaman homotecias.

Las proyecciones sobre una recta de R^2 o de R^3 y sobre un plano de R^3 son aplicaciones lineales. (Véase el dibujo siguiente).



Las simetrías respecto a rectas o planos en R^3 son endomorfismos. (Véase el dibujo siguiente).



La aplicación que hace corresponder a cada matriz cuadrada su traza es una aplicación lineal definida en cada espacio vectorial de matrices cuadradas de orden n con valores en el cuerpo del que son las entradas de la matriz.

La aplicación derivada hace corresponder a un polinomio de grado $\leq n$ otro polinomio de grado $\leq n-1$, por tanto es también una aplicación del espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales en el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n-1$ con coeficientes reales. Se puede comprobar que es una aplicación lineal.

La aplicación de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}$ definida por $f(x) = x+1$ no cumple la condición 1). Por tanto no es lineal. A pesar de que la aplicación de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}$ definida por $f(x) = x^2$ cumple la condición 1), no cumple la condición 2), por lo que tampoco es lineal.

<u>Ejercicios:</u>

6.1.1. Averiguar si son aplicaciones lineales las siguientes aplicaciones:

a) La aplicación del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n en el espacio vectorial de las matrices antisimétricas de orden n dada por $\mathcal{A}(B) = \frac{1}{2}(B - {}^tB)$.

b) La aplicación traza definida en el espacio vectorial de las matrices cuadradas 3×3 con entradas reales sobre R.

c) La aplicación del espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$ en éste mismo conjunto dada por $T(p(x)) = p(x-1)$.

d) La aplicación del espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$ en éste mismo espacio vectorial dada por $T(p(x)) = p(x) - 1$.

e) La aplicación del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n en el mismo espacio vectorial dada por $P(A) = AB$ donde B es una matriz fija.

f) La aplicación del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n en el mismo espacio dada por $Q(A) = A + B$ donde B es una matriz fija.

g) La aplicación del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n en el mismo espacio dada por $C(A) = AB - BA$ donde B es una matriz fija.

La suma de aplicaciones lineales es otra aplicación lineal. El producto de una aplicación lineal por un número es una aplicación lineal. Pueden comprobarse como ejercicio fácilmente estas dos afirmaciones y por tanto que el conjunto de las aplicaciones lineales definidas entre dos espacios vectoriales es otro espacio vectorial, que denotamos por $\mathcal{L}\ (V_1, V_2)$. Como consecuencia del párrafo siguiente vamos a ver que $\mathcal{L}\ (V_1, V_2)$ se puede equiparar a un espacio vectorial de matrices.

Expresión matricial de una aplicación lineal.

Primero, queremos pasar del concepto de aplicación lineal a ciertos números que la determinen y luego obtener números que la caractericen.

Fijada $\{e_1, e_2, ...e_n\}$, base de V_1, f está determinada por las imágenes de los elementos de esa base y fijada $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$, base de V_2, estas imágenes están determinadas por sus coordenadas en esa base, como consecuencia, cada aplicación lineal está determinada por una matriz $m \times n$:

Para determinarla, escribimos:

un vector x de V_1 como $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ y escribimos el vector $y = f(x)$ de V_2 como $f(x) = y_1u_1 + y_2u_2 + ... + y_mu_m$.

Entonces, si x es un vector de V_1,

$f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = f(x_1e_1) + f(x_2e_2) + ... + f(x_ne_n) =$ por a)

$$= x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n). \qquad \text{por b)}$$

Si las coordenadas de $f(e_1)$ son $(a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1})$, las de $f(e_2)$ son $(a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2})$ ..., las de $f(e_n)$ son $(a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})$, en la base de V_2, las de $y = f(x)$ son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama matriz de la aplicación f en las bases dadas.

Se escribe, de forma abreviada, una aplicación lineal por $f(x) = Ax$. Las columnas de esta matriz están formadas por las coordenadas de los vectores imágenes de los de la base del primer espacio expresados en la base del segundo espacio.

Dados dos espacios vectoriales y escogidas una base en cada uno de ellos, hemos visto que corres-ponde a cada aplicación lineal entre los dos, una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Recíprocamente, dados dos espacios vectoriales V_1 y V_2 de dimensiones respectivas n y m, y escogidas una base en cada uno de ellos, a cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ le corresponde una aplicación lineal definida por $f(x) = Ax$, donde x es la columna de las coordenadas de un vector de V_1 en una base de éste y Ax es la columna de las coordenadas de su imagen en una base correspondiente de V_2. Se comprueba fácilmente que f es lineal utilizando las propiedades del producto de matrices.

Es fácil ver que esta correspondencia es biyectiva entre el espacio vectorial de las aplicaciones lineales entre V_1 y V_2 y el espacio $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ una vez fijadas las bases de estos, y que a su vez es una aplicación lineal, que por ello identifica $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ con $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

La expresión abreviada $Ax = f(x)$ nos recuerda la expresión abreviada $Ax = b$ de un sistema de ecuaciones lineales. Nos indica que resolver el sistema $Ax = b$ es encontrar un vector x del primer espacio que se aplica en b por la aplicación f de la misma matriz A. Si no existe este vector, el sistema es incompatible, si existe sólo un vector, es compatible determinado, si existen muchos vectores cumpliendo esa condición, el sistema es compatible indeterminado.

Ejercicios:

6.2.1. Escribir la matriz de la simetría de R^2 respecto a:
a) El eje coordenado OX.
b) El eje coordenado OY.
c) La diagonal del primer cuadrante.
d) La diagonal del segundo cuadrante.

6.2.2. Escribir las matrices de las proyecciones ortogonales de R^2 sobre las distintas rectas enuncia-das en el ejercicio anterior.

6.2.3. Escribir la matriz de un giro:

a) de noventa grados en sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj), alrededor del origen en R^2

b) de ángulo α en sentido positivo alrededor del origen en R^2.

6.2.4. Escribir la matriz de la simetría de R^3 respecto a:

a) El plano de ecuación $y = x$.

b) El plano de ecuación $y = z$.

c) El plano de ecuación $x = z$.

d) La recta de ecuaciones $y = x,\ z = 0$.

e) La recta de ecuaciones $y = z,\ x = 0$.

f) La recta de ecuaciones $x = z,\ y = 0$.

6.2.5. Escribir las matrices de las proyecciones ortogonales de R^3 sobre los distintos planos y rectas enunciados en el ejercicio anterior.

6.2.6. Determinar la matriz que corresponde en la base canónica al endomorfismo de R^3 que transforma los vectores $\{(3,2,1)(0,2,1)(0,0,1)\}$ en los vectores $\{(1,0,0)(1,1,0)(1,1,1)\}$ respetando el orden. (Se pueden calcular fácilmente las imágenes de los vectores de la base canónica).

6.2.7. Hallar la matriz en las bases canónicas de la aplicación del espacio de los polinomios de grado ≤ 3 en R^4 dada por

$f(p(x)) = (p(-1), p(1), p(-2), p(2))$.

6.2.8. Hallar las matrices en las bases canónicas de las siguientes aplicaciones:

a) La aplicación A de R^3 en R^3 dada por $A(x,y,z) = (x - y + 2z, x + y, 2x + 2y + z)$.

b) La aplicación B de C^2 en C^2 dada por $B(z_1, z_2) = (iz_1 + 2z_2, z_1 - iz_2)$.

c) La aplicación C de R^3 en R^3 dada por $C(x,y,z) = (x+z, y, x+y+z)$.

d) La aplicación D de C^2 en C^3 dada por $D(z_1, z_2) = (iz_1 + z_2, z_1 + iz_2, z_1 - iz_2)$.

e) La aplicación E de R^2 en R^4 dada por $E(x,y) = (x, x+y, 2x, x+2y)$

6.2.9. Hallar la matriz en las bases canónicas de la aplicación traza considerada en el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 de números reales con valores en R.

Como la matriz de una aplicación lineal depende de las bases escogidas, no es un invariante intrínseco de la aplicación lineal y por ello tenemos que ver qué le ocurre al cambiar las bases. Veamos cómo están relacionadas las matrices que coresponden a una aplicación lineal en las distintas bases.

Cambio de base en la expresión matricial de una aplicación lineal.

Sean $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base de V_1, $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ base de V_2 y f un homomorfismo dado en estas bases por

$$f(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv Ax$$

Sean $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ otra base de V_1, $\{u'_1, u'_2, ..., u'_m\}$ otra base de V_2 y A' la matriz de f en las nuevas bases. Si $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ son las coordenadas de x e $(y'_1, y'_2, ..., y'_n)$ son las coordenadas de $y = f(x)$ en las nuevas bases, se tiene la relación:

$$f(x) = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Para ver la relación entre A y A' recordemos que las coordenadas de un vector x de V_1 en las dos bases están relacionadas por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Las coordenadas de un vector y de V_2 en las dos bases están relacionadas por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}$$

Recordemos que las columnas de las matrices C y D son las coordenadas de los vectores de las nuevas bases en las antiguas y que estas matrices son invertibles.

Sustituyendo respectivamente estas relaciones en la expresión de la aplicación lineal, tenemos:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

De donde

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Esta es la expresión matricial de la aplicación lineal en las nuevas bases. Por lo que $A' = D^{-1}AC$. las columnas de D^{-1} son las coordenadas de los vectores de la base primera en la base segunda dentro del segundo espacio.

Otra forma de ver la modificación que sufre la matriz de la aplicación lineal al realizar un cambio de base es darse cuenta de que la matriz A de una aplicación lineal sirve para expresar los vectores ¨$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ en función de los vectores $(u_1, u_2, ...u_m)$ según la relación: ¨

$$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) =$$
$$= (u_1, u_2, ...u_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (u_1, u_2, ...u_m)A$$

La matriz A' expresaría los vectores ¨$(f(e'_1), f(e'_2), ..., f(e'_n))$ en función de los vectores $(u'_1, u'_2, ...u'_m)$ según la relación: ¨

$$(f(e'_1), f(e'_2), ..., f(e'_n)) =$$
$$= (u'_1, u'_2, ...u'_m) \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix} = (u'_1, u'_2, ...u'_m)A'$$

Como

$$(e'_1, e'_2, ..., e'_n) = (e_1, e_2, ..., e_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

implica

$$(f(e'_1), f(e'_2), ..., f(e'_n)) = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$(u'_1, u'_2, ...u'_m) = (u_1, u_2, ...u_m) \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix}$$

sustituyendo en la expresión en las nuevas bases tenemos

$$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$(u_1, u_2, ...u_m) \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix} A'$$

de donde

$$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) = (u_1, u_2, ...u_m) DA'C^{-1}$$

obteniéndose también $A = DA'C^{-1}$.

Si el homomorfismo es un endomorfismo, como coinciden el espacio original y el espacio final de la aplicación, se utiliza normalmente la misma base en estos dos espacios y un cambio de base en la matriz de la aplicación lineal se refiere al mismo cambio de base en V considerado como espacio inicial y como espacio final. Entonces $C = D$ y $A' = C^{-1}AC$. Todas las matrices correspondientes a un endomorfismo en distintas bases se llaman equivalentes.

Como aplicación del mecanismo de cambio de base en endomorfismos se puede hallar fácilmente la matriz de las simetrías ortogonales y de las proyecciones ortogonales que permiten escoger bases en las que su expresión es muy fácil. La expresión de estas aplicaciones en la base canónica se encuentra haciendo el cambio de base necesario en cada caso desde la base que da la expresión fácil de la aplicación a la base canónica.

<u>Aplicación 1.</u>

1) Matriz de la simetría ortogonal de R^3 respecto al plano $x-y+z=0$:

Esta simetría deja invariantes los vectores del plano y transforma en su opuesto el vector perpendicular al plano.

Sean dos vectores independientes del plano $e'_1=(1,1,0)$, $e'_2=(1,0,-1)$. Estos dos vectores junto al vector perpendicular al plano $e'_3=(1,-1,1)$ forman una base de R^3 en la que la matriz de la simetría es:

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Como la matriz de cambio de base de las coordenadas de la nueva base a las coordenadas de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{pmatrix}$$

la matriz en la base canónica de la simetría considerada es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

<u>Aplicación 2.</u>

Matriz de la proyección ortogonal de R^3 sobre la recta engendrada por el vector (1,1,1):

En esta proyección el vector de la recta queda fijo y se aplican en cero los vectores ortogonales a la recta.

El vector de la recta $e'_1=(1,1,1)$ junto con dos vectores independientes ortogonales a él: $e'_2=(1,-1,0)$ $e'_3=(1,0,-1)$ forman una base en la que la matriz de la aplicación es:

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Como la matriz de cambio de base de las coordenadas de la nueva base a las coordenadas de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

la matriz en la base canónica de la proyección considerada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

6.3.1. Dada la aplicación de R^2 en R^4 por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases canónicas, hallar la matriz de dicha aplicación en las bases $\{(0,1),(1,1)\}$ de R^2 y $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)(0,0,0,1)\}$ de R^4.

6.3.2. Dada la aplicación de R^2 en R^4 por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases $\{(0,1),(1,1)\}$ de R^2 y $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)(0,0,0,1)\}$ de R^4, hallar la matriz de dicha aplicación en las bases canónicas.

6.3.3. Hallar, haciendo un cambio de base, la expresión matricial en la base canónica de la aplicación lineal f de R^3 en R^3 tal que:

$$f(1,1,0) = (1,1,1), \; f(1,0,-1) = (0,1,1), \; f(1,-1,1) = (1,2,2).$$

6.3.4. Comprobar mediante un cambio de base, la matriz en la base canónica obtenida para la aplicación lineal del ejercicio 6.2.6.

6.3.5. Hallar la matriz de la aplicación lineal del ejercicio 6.2.6.
a) en la base $\{(3,2,1)(0,2,1)(0,0,1)\}$.
b) en la base $\{(1,0,0)(1,1,0)(1,1,1)\}$.
c) Comprobar que las matrices obtenidas anteriormente están relacionadas con la matriz del endomorfismo en la base canónica por las matrices de cambio de base correspondientes entre las bases.

6.3.6. Utilizando cambios de base calculénse las matrices en las bases canónicas de
a) La simetría ortogonal de R^3 respecto a la recta engendrada por el vector $(-1,1,-1)$.
b) La proyección ortogonal de R^3 sobre el plano de ecuación $x+y+z=0$.
c) Las rotaciones vectoriales de noventa grados de R^3 respecto a la recta de ecuaciones: $x+y=0, z=0$.

A pesar de que la expresión matricial no es una propiedad intrínseca de la aplicación (porque depende de las bases escogidas en los espacios), podemos llegar, utilizándola, a la determinación de subespacios asociados de manera intrínseca a la aplicación lineal. Estos subespacios son el núcleo y la imagen de la aplicación lineal. Sus dimensiones son números independientes de la base escogida siendo por tanto, propiedades intrínsecas de dicha aplicación.

Núcleo de una aplicación lineal:
Es el conjunto de vectores del primer espacio que se aplican en el elemento neutro del segundo espacio.
El núcleo de una aplicación lineal es un subespacio vectorial ya que

Siempre contiene el cero por 1) y
Si $v_1, v_2 \in Nf$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = 0$. i. e. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in Nf$.

El subespacio núcleo de la aplicación lineal es independiente de su expresión matricial.

Fijándonos en la expresión matricial de la aplicación lineal, vemos que fijada la base $(e_1, e_2, ...e_n)$ de V_1, el núcleo de la aplicación lineal f es el conjunto de vectores de coordenadas $(x_1, x_2, ...x_n)$ en esa base tales que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el núcleo es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es la matriz de la aplicación lineal.

Su dimensión es por tanto la dimensión del primer espacio menos el rango de la matriz de la aplicación lineal. Llegamos, por ello, a que el rango de dicha matriz es siempre el mismo, cualquiera que sean las bases escogidas en los espacios V_1 y V_2. Es un número invariante de la aplicación y se le llama rango de la aplicación.

Las ecuaciones cartesianas del núcleo se obtienen eliminando en las ecuaciones $AX = 0$ del sistema, las ecuaciones cuyas filas dependan de las demás.

Una base del núcleo se obtiene resolviendo el sistema homogéneo obtenido.

Como ejemplo, hallemos el núcleo de una aplicación lineal f de R^5 en R^3 dada por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

El núcleo de f es el conjunto de vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ que verifican $f(x) = 0$, equivalente a $A(x) = 0$, es decir,

$$\left.\begin{array}{llllll} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & =0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & & =0 \\ 6x_1 & +4x_2 & +x_3 & & -3x_5 & =0 \end{array}\right\}$$

Este es el sistema del ejemplo 2 del capítulo sobre espacios vectoriales y repito aquí su resolución.

Una forma sistemática de resolver un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, que se puede escribir en forma matricial por Ax=0, es reducir la matriz A a una matriz escalonada E por operaciones elementales y pasar en las ecuaciones de Ex=0, las incógnitas de las columnas que no dan escalón al segundo miembro.

Como hicimos en el capítulo del método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{llllll} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & =0 \\ & & x_3 & +2x_4 & +x_5 & =0 \\ & & -x_3 & -2x_4 & -x_5 & =0 \end{array}\right\} \equiv$$

$$\equiv \left.\begin{array}{llllll} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & =0 \\ & & x_3 & +2x_4 & +x_5 & =0 \end{array}\right\}$$

Pasamos al segundo miembro las incógnitas x_2 x_4 y x_5 :

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} 3x_1 & +x_3 & = -2x_2 & & -x_4 & +x_5 \\ & x_3 & = & & -2x_4 & -x_5 \end{array}\right\}$$

Ahora, al recorrer las ecuaciones de arriba a abajo, las incógnitas del primer miembro van dismi-nuyendo de una en una, apareciendo sólo una incógnita despejada en el primer miembro en la última ecuación. Sustituyendo esta incógnita en la ecuación anterior, podemos despejar otra incógnita más y seguir así despejando hasta agotar las incógnitas de los primeros miembros.

En este ejemplo, sustituyendo el valor de x_3 dado por la segunda ecuación en la primera ecuación tenemos: $3x_1 = -2x_2 + x_4 + 2x_5$.

Podemos considerar todas las incógnitas como funciones lineales de las variables pasadas al segundo miembro, añadiendo $x_i = x_i$ para estas últimas variables.

En este ejemplo, añadiendo $x_2 = x_2,\ x_4 = x_4,\ x_5 = x_5$, obtenemos las condiciones:

$$\begin{array}{rclll} x_1 & = & -\frac{2}{3}x_2 & +\frac{1}{3}x_4+ & \frac{2}{3}x_5 \\ x_2 & = & x_2 & & \\ x_3 & = & & -2x_4 & -x_5 \\ x_4 & = & & x_4 & \\ x_5 & = & & & x_5 \end{array}$$

Una solución cualquiera es una 5-upla de valores, donde las incógnitas pasadas al segundo miembro pueden variar arbitrariamente y las incógnitas del primer miembro están sujetas a las condiciones despejadas. Que expresamos por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo ahora $x_2 = \lambda_1,\ x_4 = \lambda_2,\ x_5 = \lambda_3$ se escribe:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El subespacio de soluciones del sistema es el subespacio de las combinaciones lineales de los tres vectores columna del segundo miembro.

$Nf = \mathcal{L}\{(-\frac{2}{3},1,0,0,0),(\frac{1}{3},0,-2,1,0),(\frac{2}{3},0,-1,0,1)\}$ y estos tres vectores son una base de Nf.

En efecto, ninguno de los vectores columna es superfluo a la hora de dar las combinaciones lineales soluciones. En nuestro caso, para comprobar que son independientes, miraríamos si una combinación lineal de los vectores igual a cero es posible con coeficientes λ_i distintos de cero. Tendría que ser:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la segunda, la cuarta y la quinta filas, tenemos: $0 = \lambda_1,\ 0 = \lambda_2,\ 0 = \lambda_3$, lo que implica que los vectores columna escritos son independientes. La dimensión del espacio de soluciones de este sistema es $3 = 5 - 2 = dim\ V_1 - r(A)$.

Imagen de una aplicación lineal:

Es el conjunto de vectores que se pueden obtener como imagen de algún vector del primer espacio, por la aplicación lineal. Se representa por $Im(f)$.

Al obtener la expresión matricial de la aplicación lineal hemos visto que cualquier vector $f(x)$ de la imagen es combinación lineal de los vectores $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$, (vuélvase a leer), es decir, de los vectores columnas de la matriz de la aplicación lineal. Recíprocamente, cualquier combinación lineal de estos vectores con los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ es la imagen del vector $(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n)$ de V_1.

Por ello, la imagen de f es el subespacio de V_2 engendrado por las imágenes $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$. Como las coordenadas de estos vectores son las columnas de A, podremos extraer de ellos tantos vectores independientes como sea el rango de A, por lo que la dimensión de la imagen es el rango de A.

Extrayendo una base de este sistema generador podemos hallar las ecuaciones cartesianas y las paramétricas del subespacio imagen de la aplicación lineal.

En el ejemplo anterior, (en el que hemos calculado el núcleo de f), la imagen de f es el subespacio de R^3 engendrado por

$\{(3,3,6),(2,2,4),(1,2,1),(1,3,0),(-1,0,-3)\}$, de los cuales, sólo dos son independientes (compruébese); la imagen de esa aplicación lineal está engendrada p.ej. por $\{(1,3,0),(-1,0,-3)\}$, siendo su ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \equiv -9x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \ \equiv 3x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Teorema de Rouché-Frobenius

Según hemos visto en un párrafo anterior, resolver el sistema $Ax = b$ es hallar x tal que $f(x) = b$ donde f es la aplicación lineal dada por la matriz A. Si b no está en $Im(f)$, este x no existe, siendo el sistema incompatible. Si b está en $Im(f)$ el sistema es compatible, siendo determinado, si sólo hay "uno" de tales x, e indeterminado si existen muchos x.

Veamos que si Nf es cero, sólo puede existir un x tal que $f(x) = b$: sean x y x' tales que $f(x) = b = f(x')$, entonces, $f(x - x') = f(x) - f(x') = 0$ implica que $x - x' = 0$, *i.e.* $x = x'$.

Veamos también que si $Nf \neq 0$, existen muchas soluciones cuando el sistema es compatible: entonces, $\forall a \in Nf$, $a \neq 0$, y si $f(x) = b$, también $f(x + a) = b$, siendo $x \neq x + a$.

En el ejemplo de la aplicación f anterior y de su matriz A, el sistema $Ax = b$ tiene solución si y sólo si siendo $b = (b_1, b_2, b_3)$, se verifica

$3b_1 - b_2 - b_3 = 0$. La solución no es única porque $Nf \neq 0$. Luego ese sistema es compatible indeterminado si $3b_1 - b_2 - b_3 = 0$ e incompatible en caso contrario.

También deducimos de las consideraciones anteriores que el sistema $Ax = b$ tiene solución (es compatible) si y sólo si al añadir el vector b a los vectores que generan la imagen de A, (que son las columnas de A) el número de vectores independientes es el mismo, lo cual equivale a que el rango de la matriz ampliada $A|b$ es igual al rango de la matriz A. Para que la solución sea única, (sea compatible determinado), además, la dimensión del núcleo de f debe ser cero, es decir, $dim\ V_1 - r(A) = 0$, o lo que es lo mismo, el rango de A debe ser igual al número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado si el rango de la matriz ampliada $A|b$ es igual al rango de la matriz A y éste es menor que el número de incógnitas. Así hemos vuelto a encontrar el teorema de Rouché-Frobenius como consecuencia de la teoría estudiada sobre aplicaciones lineales.

Es conveniente, para adquirir agilidad, hacer los siguientes

Ejercicios:

6.4.1. Determinar cuál es el núcleo y cuál es la imagen:

a) de una proyección ortogonal de R^2 sobre una de sus rectas.

b) de una proyección ortogonal de R^3 sobre una de sus rectas.

c) de una proyección ortogonal de R^3 sobre uno de sus planos.

d) de una simetría ortogonal de R^2 respecto a una de sus rectas.

e) de una simetría ortogonal de R^3 respecto a una de sus rectas.

f) de una simetría ortogonal de R^3 respecto a uno de sus planos.

6.4.2. Hallar las ecuaciones cartesianas y una base de los núcleos y de las imágenes de las siguientes aplicaciones lineales:

a) La aplicación A de R^3 en R^3 dada por
$A(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y, 2x + 2y + z)$.

b) La aplicación B de C^2 en C^2 dada por $B(z_1, z_2) = (iz_1 + 2z_2, z_1 - iz_2)$.

c) La aplicación C de R^3 en R^3 dada por $C(x, y, z) = (x + z, y, x + y + z)$.

d) La aplicación D de C^2 en C^3 dada por $D(z_1, z_2) = (iz_1 + z_2, z_1 + iz_2, z_1 - iz_2)$.

e) La aplicación E de R^2 en R^4 dada por $E(x, y) = (x, x + y, 2x, x + 2y)$

6.4.3. Dada la aplicación lineal $f : R^5 \to R^4$ en las bases canónicas por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Hallar una base del núcleo de f.
2) Seleccionar las ecuaciones del núcleo de f.
3) Hallar una base de la imagen de f.
4) Hallar las ecuaciones cartesianas de la imagen de f.

6.4.4. Siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar c para que el sistema $Ax = b$ tenga solución en los dos casos siguientes:

1) $b = (1, 0, 1, c)^t$, 2) $b = (1, 0, c, 1)^t$

2) En los casos anteriores, ¿es el sistema compatible determinado o indeterminado?

6.4.5. Hallar las ecuaciones cartesianas y una base del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal de R^4 en R^4 (endomorfismo) dada por la matriz:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La unión de las dos bases encontradas correspondientes al núcleo y a la imagen es un conjunto de cuatro vectores. ¿Es una base de R^4? ¿Podríamos conseguir una base de R^4 como unión de otras bases distintas del núcleo y de la imagen de estas aplicaciones?

Responder a las mismas cuestiones para la aplicación lineal g dada por

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6.4.6. Dada la aplicación lineal de R^4 en R^4 (endomorfismo) por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la dimensión del subespacio vectorial $f(L) \subset R^4$ en los dos casos si-guientes:

a) $L \equiv x_3 = 0$. b) $L \equiv x_1 + x_3 - x_4 = 0$.

¿Hay algún hiperplano de R^4, cuya imagen es otro hiperplano? (Un hiperplano de R^n es un subespacio vectorial de dimensión $n-1$).

6.4.7. Dada la aplicación lineal de R^4 en R^4 (endomorfismo) por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial $f(L) \subset R^4$ si $L \equiv x_3 - x_4 = 0$.

b) Hallar las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial $L \neq R^4$, tal que su imagen sea un hiperplano de R^4. (Un hiperplano de R^n es un subespacio vectorial de dimensión $n-1$).

c) ¿Hay algún hiperplano de R^4, cuya imagen sea una recta?

6.4.8. Cualquier matriz puede expresarse como suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica. Considerar en $\mathcal{M}_{3\times 3}(R)$ las aplicaciones lineales:

a) La que hace corresponder a cada matriz su matriz simétrica sumando.

b) La que hace corresponder a cada matriz su matriz antisimétrica sumando.

Hallar el núcleo y la imagen de cada aplicación.

Fórmula de las dimensiones para una aplicación lineal.

Repitiendo, la dimensión de la imagen de una aplicación lineal es, por tanto, el número de vectores independientes de los $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$, es decir, de columnas independientes de la matriz de la aplicación, o sea, el rango de la matriz de la aplicación lineal. Como hemos visto que la dimensión del núcleo es la dimensión del espacio original menos el rango de esta misma matriz, tenemos la relación:

$$dim(Nf) + dim(Im\ f) =$$
$$= dim(espacio\ origen) - r(A) + r(A) = dim(espacio\ origen).$$

Si las dimensiones del espacio original y el espacio final coinciden, la dimensión del núcleo es cero si y sólo si la dimensión del espacio imagen coincide con la dimensión del espacio total.

Es un ejercicio conveniente comprobar la fómula de las dimensiones en cada uno de los ejercicios anteriores en los que se han hallado ambos espacios.

Hasta ahora, dada una aplicación lineal, hemos hallado su núcleo y su imagen. Podemos plantearnos el problema inverso: dados dos espacios vectoriales V_1 y V_2, si $W_1 \subset V_1$ y $W_2 \subset V_2$ son dos subespacios vectoriales, ¿se pueden construir aplicaciones lineales de V_1 en V_2 tales que su núcleo sea W_1 y su imagen sea W_2?

Para que se puedan construir, en virtud de la fórmula de las dimensiones, es necesario que $dimW_1 + dimW_2 = dimV_1$. Vamos a ver que esta condición es suficiente. En efecto, podemos coger una base de W_1 y extenderla a una base de V_1, para lo cual necesitamos tantos vectores como hay en una base de W_2. Como una aplicación lineal queda determinada por las imágenes de los elementos de una base, definimos la aplicación lineal aplicando los elementos de la base de W_1 en cero y aplicando los añadidos para obtener una base de V_1, en una base de W_2 con cualquier biyección posible.

Ejercicios

6.5.1. Comprobar la fórmula de las dimensiones en todas las aplicaciones lineales de los ejercicios anteriores en las que se han calculado núcleo e imagen.

6.5.2. Comprobar que es posible hallar una aplicación definida en R^3 con imagen en R^3, tal que:

a) Su núcleo es el plano de ecuación $x + y + z = 0$ y su imagen es la recta $x = y = 2z$.

b) Su imagen es el plano de ecuación $x + y + z = 0$ y su núcleo es la recta $x = y = 2z$.

c) Hallar las matrices correspondientes en la base canónica.

6.5.3. Comprobar que es posible hallar una aplicación lineal (y su matriz) de R^4 en R^4, tal que tanto su núcleo como su imagen sean el subespacio de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + \quad x_2 + x_3 \quad + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 0 \end{array}\right\}$$

Isomorfismos.

Los homomorfismos cuyo núcleo es cero y cuya imagen es el espacio total se llaman <u>isomorfismos</u>. Los isomorfismos son aplicaciones lineales que hacen coresponder a cada elemento de un espacio otro elemento del otro espacio y sólo uno, por ello, identifican distintos espacios vectoriales y permiten el trasvase de propiedades de un espacio a otro.

Un <u>isomorfismo</u> es un homomorfismo cuyo núcleo es cero y cuya imagen es el total.

El carácter de isomorfismo de una aplicación lineal queda reflejado en la matriz de la aplicación lineal: Veremos que para que la aplicación lineal sea isomorfismo es necesario y suficiente que la matriz sea cuadrada y que su determinante sea distinto de cero.

Si f es isomorfismo, por por ser $N(f) = 0$ y por la fórmula de las dimensiones $dimIm(f) = dimN(f) + dimIm(f) = dim(V_1)$; como también $Im(f) = V_2$, $dimIm(f) = dim(V_2)$, por lo que $dimV_1 = dimV_2$. Ya que la matriz de una aplicación lineal $f : V_1 \longrightarrow V_2$ es $m \times n$ donde m es la dimensión de V_2 y n es la dimensión de V_1, la matriz de un isomorfismo es cuadrada. Por otra parte, el núcleo de f será cero si y sólo si $0 = dimNf = dimV_1 - r(A)$, es decir, si y sólo si $r(A) = dimV_1$, (que es su número de columnas) o sea si y sólo si el determinante de A es distinto de cero.

Recíprocamente, si A es cuadrada, $dimV_1 = dimV_2$ y cuando $|A| \neq 0$, $dimN(f) = dimV_1 - r(A) = 0$, por lo que $N(f) = 0$ y utilizando otra vez la fórmula de las dimensiones, $dimIm(f) = dimV_1 = dimV_2$, por lo que $Im(f) = V_2$.

Teorema 1: Si $f : V_1 \longrightarrow V_2$ es isomorfismo, existe la aplicación inversa de f, que es lineal, y si A es la matriz de f en dos bases prefijadas de V_1 y de V_2, A^{-1} es la matriz de la aplicación lineal inversa de f en las mismas bases.

Demostración:

La aplicación inversa g de f existe si sabemos hacer corresponder a cada $y \in V_2$ un x tal que $f(x) = y$, entonces sería $x = g(y)$.

Si f es isomorfismo, por ser $Im(f) = V_2$, cualquiera que sea el $y \in V_2$, existe x tal que $f(x) = y$; este x es un candidato a ser $g(y)$, pero podríamos tener problemas si existieran varios de estos x y no supiéramos cuál escoger. Veremos que sólo existe uno cuando f es un isomorfismo. En efecto, si $f(x) = f(x')$, para algún otro x', $0 = f(x) - f(x') = f(x - x')$ implica que $x - x' \in Nf = \{0\}$, es decir que $x = x'$. Luego podemos construir la aplicación inversa de f, haciendo corresponder a cada $y \in V_2$ el único $x \in V_1$, tal que $f(x) = y$.

Esta aplicación es lineal, porque si $f(g(y_1)) = y_1$ y $f(g(y_2)) = y_2$, se tiene $f(g(y_1) + g(y_2)) = f(g(y_1)) + f(g(y_2)) = y_1 + y_2$, de donde $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$ por una parte y si $f(g(y)) = y$, $f(\alpha g(y)) = \alpha f(g(y)) = \alpha y$, de donde $\alpha g(y) = g(\alpha y)$.

El hecho de que la matriz de g es la inversa de la matriz de f se sigue de que al ser $g \circ f = Id$ y $f \circ g = I$, si la matriz de f es A y la matriz de g es B, AB=I y BA=I.

También tenemos el siguiente

Teorema 2: Dos espacios vectoriales son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.

Demostración:

Si $f : V_1 \longrightarrow V_2$ es un isomorfismo, $dimV_1 = dim(Im(f))$ por la fórmula de las dimensiones y por ser $N(f) = 0$, y por la definición de isomorfismo, $dim(Im(f)) = dimV_2$, por lo que $dimV_1 = dim(Im(f)) = dimV_2$

El recíproco también es cierto: si dos espacios tienen la misma dimensión, son isomorfos.

En efecto, sea $dim(V_1) = dim(V_2) = n$ y sean $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de V_1 y $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ una base de V_2, definimos:

$$f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$$

Se puede comprobar fácilmente que la aplicación f es lineal:

a)

$$f(x+y) = f((x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) + (y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n)) =$$

$$f((x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + ... + (x_n + y_n)e_n) =$$
$$= (x_1 + y_1)u_1 + (x_2 + y_2)u_2 + ... + (x_n + y_n)u_n =$$

$$(x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n) + (y_1u_1 + y_2u_2 + ... + y_nu_n) = f(x) + f(y)$$

b)

$$f(\alpha x) = f(\alpha(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n)) = f(\alpha x_1e_1 + \alpha x_2e_2 + ... + \alpha x_ne_n)) =$$

$$= (\alpha x_1)u_1 + (\alpha x_2)u_2 + ... + (\alpha x_n)u_n = \alpha(x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n) = \alpha f(x).$$

Como $Imf = \mathcal{L}\ \{u_1, u_2, ..., u_n\} = V_2$ y según la fórmula de las dimensiones, $Nf = 0$, f es isomorfismo.

Quedando así demostrado el teorema.

El teorema nos da una forma fácil para calcular la dimensión del espacio vectorial de las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales.

Corolario:

Si V_1 y V_2 son dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, de dimensiones respectivas n y m, $dim\ \mathcal{L}\ (V_1, V_2) = m \times n$.

Ya que hemos visto anteriormente que fijadas las bases de V_1 y de V_2, hay una aplicación lineal biyectiva entre $\mathcal{L}\ (V_1, V_2)$ y $\mathcal{M}\ _{m\times n}(K)$. y se puede comprobar fácilmente que esta aplicación es isomorfismo.

Ejercicios:

6.6.1. Compruébese que:

a) La composición de dos aplicaciones lineales es una aplicación lineal y

b) La matriz de la composición de ellas es el producto de sus matrices.

6.6.2. Sea f un isomorfismo en R^3 y g otro homomorfismo tal que la dimensión de la imagen de $g \circ f$ es 2.

a) ¿Cuál es el rango de la matriz de g.

b) ¿Cúal es la dimensión de la imagen de $f \circ g$?

6.6.3. Demostrar que una aplicación lineal con núcleo cero tiene inversa a la izquierda también lineal. ¿Es única?

6.6.4. Demostrar que una aplicación lineal cuya imagen coincide con el espacio final, tiene inversa a la derecha también lineal. ¿Es única?

6.6.5. Estudiar si son isomorfismos las aplicaciones del ejercicio 6.4.1. ¿Cúales son los isomorfismos inversos en los casos que existen?

6.6.6. Considerar las aplicaciones lineales de los ejercicios 6.2.6. y 6.3.3. y estudiar si son isomorfismos.

En los casos que lo sean hallar la matriz del isomorfismo inverso.

Espacio Dual.

Un tipo especial de aplicaciones lineales, que merecen un nombre especial, son las aplicaciones lineales de un espacio vectorial real V^n en R. Se llaman *formas lineales*, forman el espacio $\mathcal{L}(V^n, R)$ que según lo visto anteriormente, son un espacio vectorial de dimensión n. Este espacio vectorial se llama **espacio dual** de V^n.

Un ejemplo de forma lineal en R^3 es la aplicación que resulta de multiplicar escalarmente un vector fijo $a = (a_1, a_2, a_3)$ por los distintos vectores de R^3:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

Una vez escogida una base de V^n, una forma lineal, como aplicación lineal de un espacio de dimensión n en un espacio de dimensión 1, viene determinada por una matriz $1 \times n$, (la base de R se da por supuesta como 1). Por eso, tanto un elemento de R^n como un elemento de su dual vienen determinados por n números reales.

Si f es una forma lineal de R^n,

$$f(x) \equiv f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

expresión que nos recuerda la del producto escalar.

Proposición: Si una forma lineal no es nula, es suprayectiva.
Demostración: Si la forma lineal no es nula, existe un vector x que no se aplica en el cero. Entonces, para cada valor $r \in R$, podemos encontrar el vector $\frac{r}{f(x)}x$ que se aplica en r.

Son de especial significado geométrico los conjuntos de nivel de estas aplicaciones. Se llama conjunto de nivel de una aplicación con valores reales al conjunto de puntos que se aplican en uno dado de R. Por ser las formas lineales no nulas, suprayectivas, los conjuntos de nivel de cada $r \in R$ son no vacíos.
Consideremos una forma lineal sobre R^2 no nula,
Ya que la forma lineal viene dada en general por:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a_1, a_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1x + a_2y,$$

el conjunto de nivel $r \in R$ de f es: $\{(x, y)|a_1x + a_2y = r\}$. Este conjunto es una recta del plano dada por su ecuación implícita.
Para cada forma lineal no nula de R^3 los conjuntos de nivel son planos geométricos dados por su ecuación impícita. En efecto, ya que la forma lineal viene dada en ge-neral por

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1x + a_2y + a_3z,$$

el conjunto de nivel $r \in R$ de f es: $\{(x, y, z)|a_1x + a_2y + a_3z = r\}$.

Dada una forma lineal en R^n, el conjunto de nivel cero es el núcleo de la forma lineal, que es un subespacio de R^n, cuya dimensión es $n - 1$, por la fórmula de las dimensiones y por ser la forma lineal suprayectiva.
Si x_0 es un vector tal que $f(x_0) = r$, el conjunto de nivel $r \in R$ se obtiene sumando al vector x_0 todos los vectores de $N(f)$. Ya que si $x \in N(f)$, $f(x_0 + x) = f(x_0) + f(x) = f(x_0)$. Y recíprocamente, si y_0 está en el conjunto de nivel r, se puede escribir $y_0 = x_0 + (y_0 - x_0)$, donde $y_0 - x_0 \in N(f)$.
Es decir, el conjunto de nivel r: $f^{-1}(r) = \{x_0 + x|x_0 \in f^{-1}(r) \ y \ x \in N(f)\}$ se obtiene trasladando por un vector $x_0 \in f^{-1}(r)$ el núcleo de la forma lineal.

Dada una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ...e_n\} \subset V^n$, se definen los elementos $\{e_i^*\}$ (duales de los e_i) por

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Se puede comprobar fácilmente que si $f \in V^*$, está definida en $\mathcal{B}$ por

$$f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1 \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ se tiene } f = a_1 e_1^* \cdots + a_n e_n^*$$

(Ya que coinciden en todos los elementos de la base).

Por ello, los elememtos $\{e_i^*\}_{i\in\{1...n\}}$ son un sistema de generadores de V^*. También se puede ver fácilmente que son independientes. Por ello, forman una base de V^*, llamada base dual de $\mathcal{B}$.

Las coordenadas de f en la base dual de $\mathcal{B}$ son $(a_1, ..., a_n)$, donde $a_i = f(e_i)$.

Un problema que se plantea es cómo varían las coordenadas de f al cambiar de base en V. ¿Cuál es la relación entre la matriz de cambio de base en V y la matriz de cambio de base en V^*?

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, dos bases de V, tales que la relación entre las coordenadas de un vector x en esas bases viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Sean $(a_1, ..., a_n)$ y $(a_1', ..., a_n')$, las coordenadas de una aplicación f en las bases duales de las dos anteriores.

Entonces, dado que

$$(a_1, ..., a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f(x) = (a_1', ..., a_n')\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$(a_1, ..., a_n)C\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (a_1', ..., a_n')\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

de donde

$$(a_1 ... a_n)C = (a_1' ... a_n') \quad \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = C^t \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (C^t)^{-1} \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

que es la relación buscada.

Representando los duales de dos espacios vectoriales por $V_1^* = \mathcal{L}(V_1, K)$, $V_2^* = \mathcal{L}(V_2, K)$, a cada aplicación $f : V_1 \to V_2$, le corresponde la aplicación $f^* : V_2^* \to V_1^*$ que hace corresponder a $\omega \in V_2^*$ la aplicación $\omega \circ f$. Esta aplicación es lineal, se llama aplicación dual de f y se representa por f^*.

El problema que se plantea ahora es encontrar la matriz de f^* en las bases duales de dos bases de V_1 y V_2, conocida la matriz de f en dichas bases.

Recordemos que si $\mathcal{B}_1 = \{e_1, ...e_n\} \subset V_1$ y $\mathcal{B}'_1 = \{e'_1, ...e'_m\} \subset V_2$, las columnas de la matriz que expresa f son las coordenadas de los vectores $f(e_i)$ en la base $\mathcal{B}'_1$. Análogamente, las columnas de la matriz de f^* son las coordenadas de las aplicaciones $f^*(e_k^{'*})$ en $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$. Hallémoslas: Sea A la matriz de f,

$$f^*(e_k^{'*})(e_i) = (e_k^{'*} \circ f)(e_i) = e_k^{'*}(f(e_i)) = e_k^{'*}(\sum a_{li} e'_l) = a_{ki}$$

Al variar i vamos obteniendo los elementos de la fila k de la matriz de f. Luego las columnas de la matriz de f^* son las filas de la matriz de f. Sus matrices, en las bases duales, son traspuestas la una de la otra.

Ejercicios:

6.7.1. Hallar las coordenadas de f en la base dual de la canónica de R^3, si f un elemento del dual de R^3 tal que $f(1,1,0) = 1, f(0,1,1) = 1, f(1,0,1) = 3$.

6.7.2. Sea $f : R^3 \to R^3$ una aplicación determinada por
$f(1,1,0) = (-1,0,1), \quad f(0,1,1) = (0,-1,1), \quad f(1,0,1) = (1,-1,0)$.
Hallar la matriz de la aplicación dual de f en la base dual de la base canónica de R^3.

6.7.3. Expresar en la base dual de la canónica de R^3 los elementos de la base dual de la base $\mathcal{B}$, siendo $\mathcal{B}$:
a) $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$
b) $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,2)\}$
Observar que aunque el primer vector coincide en estas dos bases, su dual no coincide en los dos casos.

PROBLEMAS RESUELTOS DE LOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE ÁLGEBRA LINEAL I.

1. Considérese la aplicación lineal $T : R^4 \to R^3$ que respecto de las bases canónicas de dichos espacios tiene la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular la dimensión y las ecuaciones cartesianas de los subespacios NT e imT.

b) Hallar las ecuaciones cartesianas de la imagen por T del subespacio generado por los vectores:

$$\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\}.$$

Solución:

a)

La aplicación es:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

$$(x,y,z,t) \in NT \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x & & +z & & = 0 \\ & y & & +t & = 0 \\ x & +2y & +z & +2t & = 0 \end{array}\right\}$$

Como la tercera ecuación es suma de la primera y del doble de la segunda, podemos prescindir de ella. Las otras dos son independientes porque el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

por tanto, las ecuaciones de NT son:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x & +z & & =0 \\ & y & +t & =0 \end{array}\right\}$$

En cuanto a ImT, está engendrada por los vectores columna de la matriz de la aplicación. Como la matriz es de rango 2, sólo hay dos vectores columna independientes, p.ej. $\{(1,0,1),(0.1,2)\}$.
Las ecuaciones cartesianas se obtienen teniendo en cuenta que

$$(x,y,z)\in\mathcal{L}\{(1,0,1),(0.1,2)\}\equiv$$
$$\equiv rang\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\x&y&z\end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}=2$$

es decir,

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\x&y&z\end{vmatrix}=0\equiv -x-2y+z=0\equiv x+2y-z=0.$$

b) La imagen por T del subespacio generado por los vectores:

$$\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\}.$$

está generada por

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Estos vectores son:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

que como generadores quedan reducidos a $(1,-1,-1)$.
Las ecuaciones cartesianas de la recta engendrada por $(1,-1,-1)$ se obtienen de

$$1 = rang \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

para lo cual es suficiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & z \end{vmatrix} = 0$$

Las dos ecuaciones de $Im(T) \subset R^3$ son $x + y = 0;\ x + z = 0.$

2. a) Considerar la aplicación de R^3 en R^3 que deja invariantes los vectores del plano de ecuación $x+y+z = 0$ y aplica el vector ortogonal a dicho plano en el vector nulo. Hallar la matriz en la base canónica de dicha aplicación.

b) Comprobar que el determinante de la matriz de esa aplicación es cero y explicar por qué.

Solución:

Escogiendo una base $\{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}$ de R^3 formada por dos vectores del plano y un vector perpendicular a él, ya que las columnas de la matriz de la aplicación en una base son las coordenadas de los vectores imágenes de la base en esa base:

$$f(1,-1,0) = (1,-1,0) = 1 \cdot (1,-1,0) + 0 \cdot (1,0,-1) + 0 \cdot (1,1,1).$$
$$f(1,0,-1) = (1,0,-1) = 0 \cdot (1,-1,0) + 1 \cdot (1,0,-1) + 0 \cdot (1,1,1).$$
$$f(1,1,1) = (0,0,0) = 0 \cdot (1,-1,0) + 0 \cdot (1,0,-1) + 0 \cdot (1,1,1).$$

la matriz de la aplicación en dicha base es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz de la aplicación en la base canónica tenemos que hacer un cambio de base en los espacios original y final. Siendo su matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que la matriz es la pedida, multiplicándola a la izquierda por los vectores de la base escogida al principio y viendo que sus imágenes son las requeridas:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b)

El determinante de la matriz A es cero porque la primera fila de la matriz es igual a la suma de las otras dos cambiadas de signo.

Tiene que salir cero porque hay un vector que se aplica en el vector nulo y el determinante en la primera base es nulo, siendo el determinante de una matriz de un endomorfismo independiente de la base en la que se exprese, siempre que ésta se exprese en la misma base en el espacio inicial y en el espacio final de la aplicación.

3. Hallar la matriz en base canónica de una aplicación lineal $f : R^3 \to R^3$ cuyo núcleo e imagen sean:

$$Nf \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y + 2z & = 0 \\ 2x + y + z & = 0 \end{array} \right. \qquad Imf \equiv x - y + z = 0.$$

Solución:

Una aplicación lineal queda determinada por las imágenes de los vectores de una base.

Los vectores del núcleo se aplican en $(0, 0, 0)$. Como en este caso, su dimensión es 1 porque las dos ecuaciones son independientes, podemos hallar un vector que lo genere, que se aplicará en el vector nulo. Después podemos completar este vector a una base de R^3, de forma que las imágenes de los otros dos vectores engendren Imf.

Un vector que engendra Nf se obtiene resolviendo por el método de Gauss el sistema de las dos ecuaciones de Nf:

$$\left\{\begin{array}{rl} x+2y+2z & =0 \\ 2x+y+z & =0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x+2y+2z & =0 \\ -3y-3z & =0 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{rl} x+2y & =-2z \\ -y & =z \end{array}\right.$$

Haciendo $z=1$, obtenemos $y=-1,\ x=0$, por tanto, un vector que engendra Nf es $(0,-1,1)$; lo ampliamos a una base de R^3:
$\{(0,-1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$. (Se comprueba que es base porque

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0)$$

Ahora hallamos los generadores de $Imf \equiv x=y-z$, donde haciendo $z=1,\ y=0$, obtenemos un vector de la imagen: $(-1,0,1)$. Otro vector independiente se obtiene haciendo $z=0,\ y=1$, hallando $(1,1,0)$.

Entonces, una aplicación como la pedida es la que cumple:

$$f(0,-1,1)=(0,0,0),\ f(1,0,0)=(-1,0,1),\ f(0,1,0)=(1,1,0)$$

La matriz de f en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Consideremos los subespacios vectoriales:

$$\left.\begin{array}{rl} x+y+z+t & =0 \\ x-y+2z-3t & =0 \end{array}\right\} \equiv S_1 \subset R^4$$

$$S_2=\mathcal{L}\{(1,2,3),(2,3,1),(1,1,a)\} \subset R^3.$$

a)

Explicar razonadamente si hay valores de a para los que existe $f : R^4 \longrightarrow R^3$, tal que el núcleo de f sea S_1 y la imagen de f sea S_2.

b)

Explicar razonadamente si hay valores de a para los que existe $g : R^3 \longrightarrow R^4$, tal que el núcleo de g sea S_2 y la imagen de g sea S_1.

Solución:

Por la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales:

$$dim(N(f)) + dim(Im(f)) = 4$$

Como

$$dim(S_1) = 4 - rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

para que el núcleo de f sea S_1 y la imagen de f sea S_2, ha de ser $dim(S_2) = 2$, por tanto, ha de ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \equiv -a - 2 = 0 \equiv a = -2$$

Esta condición es suficiente y la aplicación lineal se puede dar construyendo una base de $N(f)$, ampliando ésta a una base de R^4 con otros dos vectores y aplicando los vectores de la base del núcleo en el vector nulo y los otros dos vectores en $\{(1, 2, 1), (2, 3, 1)\}$ respectivamente.

b) Por la fórmula de las dimensiones para las aplicaciones lineales:

$$dim(N(g)) + dim(Im(g)) = 3$$

Como $dim(S_1) = 2$, si $Im(g) = S_1$, ha de ser $dim(Ng) = 1$, pero $dim(S_2) \geq 2$, por lo tanto no puede ser $N(g) = S_2$.

No hay valores de a para los que exista $g : R^3 \longrightarrow R^4$ con $Ng = S_2$ y $Im(g) = S_1$.

5. Dada una aplicación lineal $f : R^4 \longrightarrow R^4$ en la base canónica por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a & a \\ 1 & 0 & a^2 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

a) Hallar a y b para que la dimensión del núcleo de f sea igual a la dimensión de su imagen.

b) Hallar una base de un subespacio complementario del subespacio $Im(f)$, si f satisface las condiciones del apartado a).

Solución:

a)

Por la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales:

$$dim(Nf) + dim(Im(f)) = dim(R^4) = 4.$$

Si ha de ser $dim(Nf) = dim(Im(f))$, es $2dim(Im(f) = 4$, es decir, $dim(Im(f) = 2$.

La dimensión del subespacio $Im(f)$ es igual al rango de la matriz de la aplicación, ya que $Im(f)$ está engendrado por los vectores columnas de dicha matriz. Por ello, ha de ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \equiv 1 - a = 0 \equiv a = 1.$$

También ha de ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \equiv \ (a = 1) \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \equiv b - 1 = 0 \equiv b = 1$$

Estas dos condiciones son suficientes; se ve sustituyendo $a = 1, \ b = 1$ en la matriz dada y viendo su rango (que es igual a 2).

b)

En las condiciones anteriores, $Im(f) = \mathcal{L}\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$. Completando estas dos columnas con $(1,0,0,0)^t, (0,1,0,0)^t$ obtenemos una matriz 4×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de rango 4 (su determinante es 1). Entonces, estas cuatro columnas engendran R^4 y una base de un complementario de $Im(f)$ es $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$.

6. Sea $f : R^3 \to R^3$ una aplicación lineal cuya imagen es un plano ¿Puede ser $f^2 = 0$? ($f^2 = f \circ f$).

Solución:

Si $f^2 = 0$,

$f \circ f(R^3) = 0 \;\Rightarrow\; f(f(R^3)) = 0 \;\Rightarrow f(Imf) = 0 \;\Rightarrow Imf \subset kerf$

Según esto, si la imagen de f es un plano, la dimensión de $kerf$ es mayor o igual que 2, pero por la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales:

$$dimImf + dimkerf = 3 \Rightarrow 2 + dimkerf = 3 \Rightarrow dimkerf = 1$$

lo cual es una contradicción con lo anterior.

7. a) Si $f : R^3 \to R^3$ es una aplicación lineal dada en la base canónica por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

hallar la matriz B de una aplicación lineal g tal que $Ng = Imf$ y $Img = Nf$.

b) Comprobar que $AB = 0 = BA$ y explicar por qué en términos de aplicaciones lineales.

Solución:

Hallemos antes Nf e Imf:

$$Nf = \{(x, y, z) | \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\left.\begin{array}{rrr} x & +2y & +z = 0 \\ -x & & +z = 0 \\ & 2y & +2z = 0 \end{array}\right\} \equiv \mathcal{L}(1, -1, 1)$$

Se puede ver que la imagen de f está engendrada por los vectores columna de la matriz A:

$$Imf = \mathcal{L}\{(1, -1, 0), (2, 0, 2), (1, 1, 2)\} =$$
$$= \mathcal{L}\{(1, -1, 0), (2, 0, 2)\}(\text{porque}(1, 1, 2) = (2, 0, 2) - (1, -1, 0)) =$$
$$\mathcal{L}\{(1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$$

Si $Img = Nf$, todos los vectores columna de la matriz de g han de ser múltiplos de la columna $(1, -1, 1)^t$, no pudiendo ser cero todas las columnas.

Si $Ng = Imf$, los dos vectores que engendran Imf se han de aplicar en el vector nulo.

Las dos cosas las conseguimos completando la base de $Imf = Ng$ a una base de R^3 y aplicando los dos vectores de la base de Imf en el vector nulo y el vector añadido independiente en el vector $(1, -1, 1)$.

La matriz en la base $\{(1, -1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ del espacio inicial y en la base canónica del espacio final de una de las aplicaciones buscadas es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz de la aplicación lineal en la base canónica hacemos un cambio de base en el espacio inicial, obteniendo:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = BA.$$

Como AB es la matriz de $f \circ g$ y por ser $Img = Nf$, $f \circ g = 0$, ha de ser $AB = 0$.

Lo análogo ocurre con BA.

8. Sea $f : R^n \longrightarrow R^n$ una aplicación lineal que no es isomorfismo.

a) ¿Existe alguna aplicación lineal $g : R^n \longrightarrow R^n$ tal que $g \circ f$ sea isomorfismo?

b) ¿Existe alguna aplicación lineal $g : R^n \longrightarrow R^n$ tal que $f \circ g$ sea isomorfismo?

Solución:

a) La aplicación lineal $f : R^n \longrightarrow R^n$ es isomorfismo si y sólo si $Im(f) = R^n$. Por tanto, si f no es isomorfismo $Im(f) \neq R^n$ y $dim(Im(f)) < n$, entonces $dim(Im(g \circ f)) = dim(g(Im(f))) < n$ por lo que $g \circ f$ no puede ser isomorfismo.

b) La aplicación lineal $f : R^n \longrightarrow R^n$ es isomorfismo si y sólo si $Im(f) = 0$. Por tanto, si f no es isomorfismo $dim(Imf) < n$, entonces $dim(Im(f \circ g) \leq dim(Im(f) < n$ por lo que $f \circ g$ no puede ser isomorfismo.

Referencias.

[A] Algebra Lineal y aplicaciones. J. Arvesú Carballo, R. Alvarez Nodarse, F. Marcellán Español. Ed. Síntesis Madrid. 1999.

[G] Matemáticas 2 Bachillerato. Carlos Gonzalez García. Jesús Llorente Medrano. Maria José Ruiz Jimńez. Ed. Editex. 2009.

[S] Algebra lineal y sus aplicaciones. G. Strang Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. 1990.

[S2] Introduction to Linear Algebra. G.Strang Ed. Wellesley-Cambridge Press 1993.

[V] Problemas de Algebra. A. de la Villa. Ed. Clagsa, 1994.

ESPACIO VECTORIAL COCIENTE.

Introducción.

El espacio vectorial cociente recoge la estructura de los conjuntos imagen inversa de un punto por una aplicación lineal y por ello de la estructura de los conjuntos de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos. Estos conjuntos se llaman variedades afines y se encuentran también entre los elementos característicos de las aplicaciones afines.

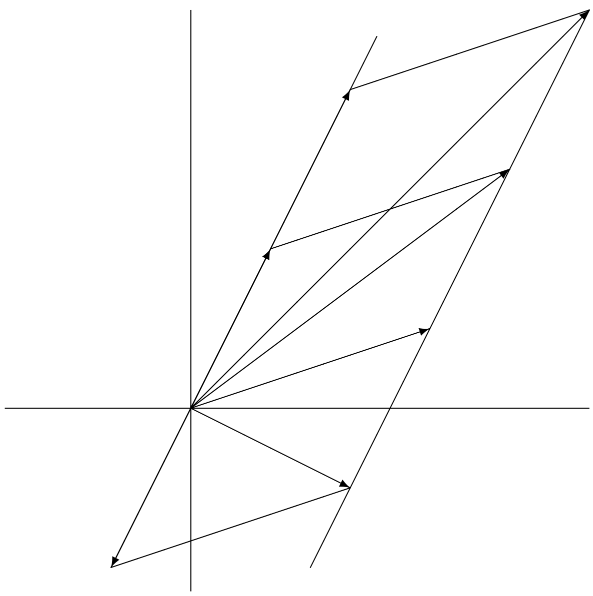
Variedades afines del plano (R^2).

Además de las rectas del plano que pasan por el origen y pueden ser expresadas matemáticamente como subespacios vectoriales del espacio vectorial R^2, hay otras rectas que no pasan por el origen. Las rectas que no pasan por el origen son un caso particular de variedades afines de dimensión 1.

Cada recta que no pasa por el origen es paralela a una recta que pasa por el origen y al mismo tiempo, por cada punto del plano pasa una recta paralela a una recta dada.

Todas las rectas paralelas son variedades afines paralelas, llamándose la que pasa por el origen, recta de dirección de dichas rectas paralelas.

Dado un vector v distinto de cero de la recta de dirección, r, ésta es el conjunto $r = \{\lambda v | \lambda \in R\}$. Cada recta paralela a la recta de dirección está formada por los puntos extremos de los vectores $\{u + \lambda v | \lambda \in R\}$ donde $u \in R^2$.



Considerada r como subespacio vectorial se denota por W y cualquier recta paralela a ella se denota por $u + W$. Es importante observar que $u+W = u'+W$ si $u' \in u+W$: En efecto, si $u' = u+\alpha v$, todos los vectores que se pueden obtener haciendo sumas $u+\lambda v$, cuando λ varía en R pueden obtenerse de $u' + \lambda' v$ haciendo $\lambda' = \lambda - \alpha$.

Conjunto cociente.

Las rectas paralelas a una dada son una descomposición del plano en partes, siendo vacía la intersección de dos de estas partes. Se dice que forman una partición del plano y considerando cada parte como un elemento tenemos un conjunto de elementos que se llama conjunto cociente de R^2 por W y se denota por R^2/W.

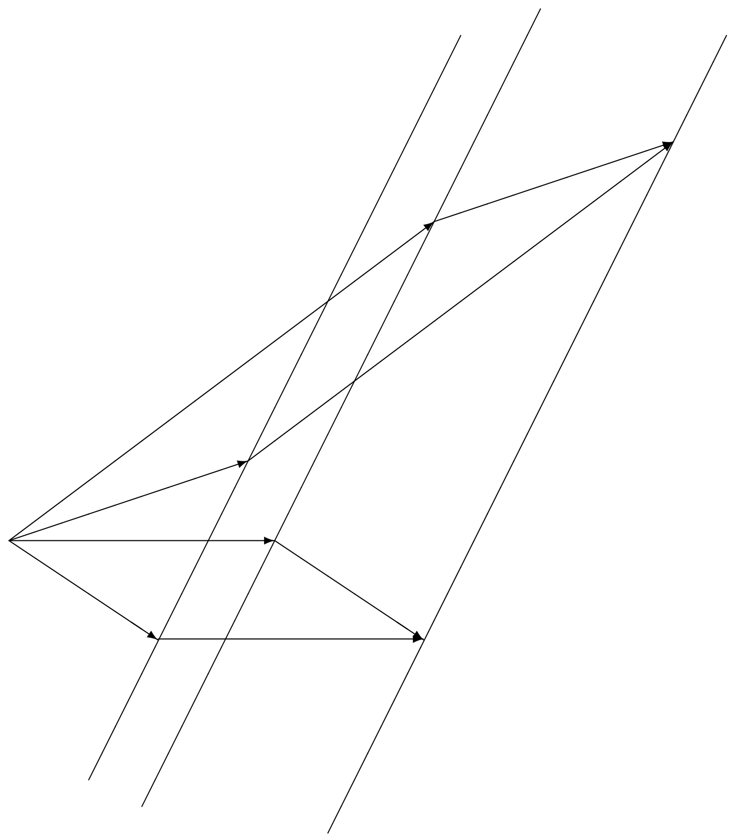
Espacio vectorial cociente.

Se pueden definir dos operaciones en R^2/W:

1) Suma:

Dadas dos rectas paralelas $r_1 = \{u_1 + \lambda v | \lambda \in R\}$, $r_2 = \{u_2 + \lambda v | \lambda \in R\}$, definimos $r_1 + r_2 = \{u_1 + u_2 + \lambda v | \lambda \in R\}$.

Se puede comprobar que esta suma está bien definida, es decir, que aunque cambiemos el vector u_1 por otro u'_1 que tenga extremo en la misma recta r_1 y cambiemos el vector u_2 por otro vector u'_2, que tenga extremo en la recta r_2, la recta suma obtenida utilizando u'_1 y u'_2 es la misma porque el vector $u'_1 + u'_2$ está en la recta $\{u_1 + u_2 + \lambda v | \lambda \in R\}$



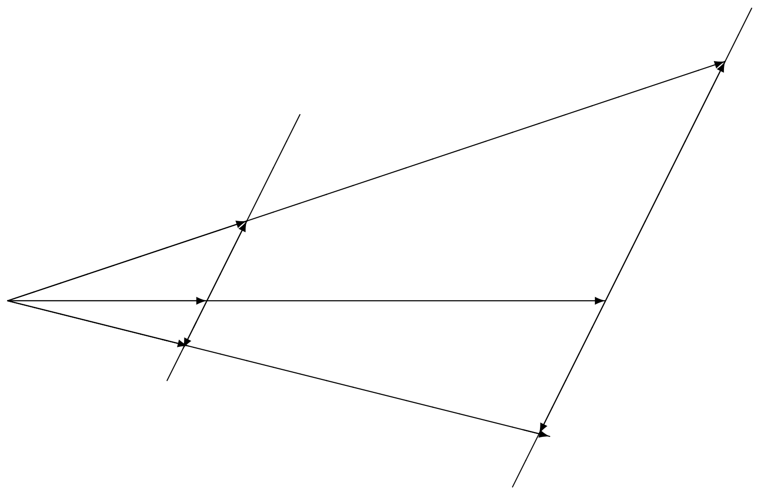
El elemento cero del espacio vectorial cociente es la variedad W que pasa por el origen.

2) Multiplicación por un número:

Dada una recta $r = \{u + \lambda v | \lambda \in R\}$ y un número $k \in R$, definimos $kr = \{ku + \lambda v | \lambda \in R\}$.

Se puede comprobar que esta multiplicación no depende del vector u escogido con extremo en r:

Si $u' = u + \alpha v$ la recta $\{ku' + \lambda v | \lambda \in R\}$ es $\{ku + k\alpha v + \lambda v | \lambda \in R\} = \{ku + (k\alpha + \lambda)v | \lambda \in R\} = \{ku + \lambda' v | \lambda' \in R\}$.

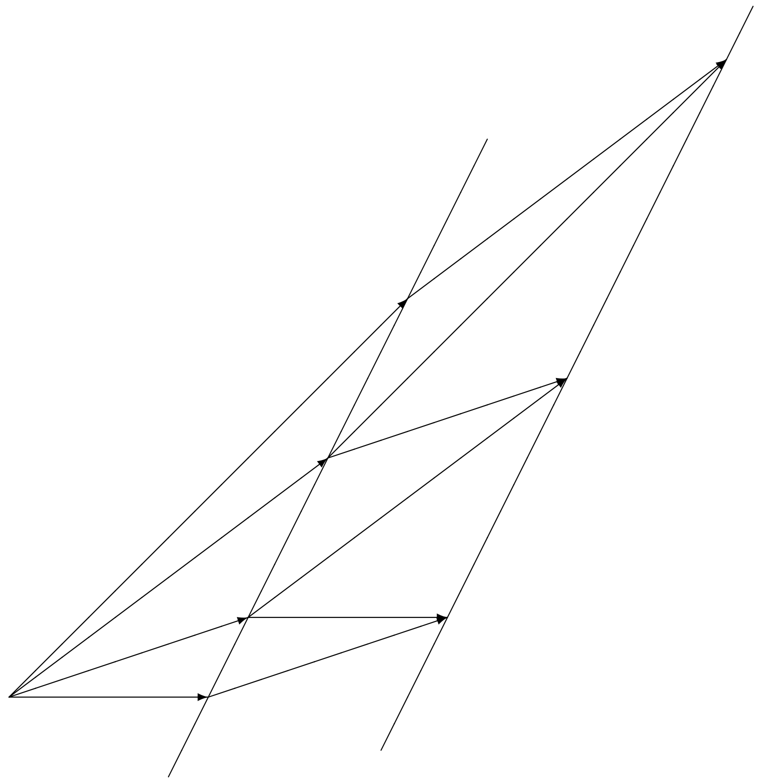


Obsérvese que si el vector que va del extremo de u al extremo de u' es αv y entonces el vector que va del extremo de ku al extremo de ku' es $k\alpha v$, por lo que la recta que pasa por el extremo de ku y tiene dirección v es la misma que la que pasa por ku' y tiene dirección v.

Es fácil comprobar que estas dos operaciones tienen las propiedades asociativas, distributivas, etc... que estructuran al conjunto cociente R^2/W como un espacio vectorial, que se llama espacio vectorial cociente.

La aplicacón que asocia a cada vector del plano la recta que pasa por su extremo y es paralela a W se llama aplicación cociente de R^2 en R^2/W y es lineal.

Es curioso observar que el doble de una recta se puede obtener sumando vectores con extremos en dicha recta, por lo que cualesquiera que sean las parejas de vectores que cojamos con extremos en la recta, los vectores suma de estas parejas tienen extremos en la misma recta. Véase el dibujo a continuación.



Otro ejemplo de espacio cociente:

Si W es un plano que pasa por el origen de R^3, el espacio cociente R^3/W es el conjunto de planos paralelos a W, que se pueden sumar y multiplicar por un número. El elemento cero de este espacio vectorial es W.

Podemos hacer en cualquier espacio vectorial V y con cualquier subespacio suyo W el mismo proceso:
Los conjuntos $\{u + \lambda v | \lambda \in R\} = u + W$ son casos particulares de variedades afines, paralelas a W. Consideradas como elementos forman el conjunto cociente V/W, que se puede estructurar en espacio vectorial con las operaciones suma y multiplicación por los números del cuerpo de V, análogas a las de R^2/W resultando así el espacio vectorial cociente V/W.

La aplicación natural $p(u) = u + W$ definida en V sobre V/W se llama aplicación cociente y es lineal.

Relación entre las aplicaciones lineales y los conjuntos cociente.

Empecemos por considerar aplicaciones lineales sencillas de R^2 en R.

Sea $f : R^2 \longrightarrow R$ definida por $f(x, y) = x$. Dado $a \in R$, el conjunto de puntos de R^2 con imagen a es $f^{-1}(a) = \{(x, y)|x = a\} = \{(a, y)|y \in R\} = \{(a, 0) + (0, y)|y \in R\} = \{(a, 0) + y(0, 1)|y \in R\}$, que podemos escribir $(a, 0) + W$ como una variedad afín, donde $W = \{(0, y)|y \in R\}$. Es la recta que pasa por $(a, 0)$ y es paralela a W. Como W es el conjunto de vectores del eje de ordenadas, esta recta es la vertical que pasa por $(a, 0)$. (Observemos que W, recta de dirección de estas variedades afines es el núcleo de la aplicación lineal f).

Las distintas imágenes inversas de puntos de R son las distintas rectas verticales, que forman una partición de R^2 y consideradas como elementos, son el conjunto cociente R^2/W, que es biyectivo al espacio R asociando a cada variedad afín $f^{-1}(a)$ el número a.

No es difícil comprobar que la biyección considerada es también lineal y por tanto un isomorfismo, teniéndose $R^2/Nf = R^2/W \approx Im(f) = R$.

El lector puede repetir la construcción anterior para la aplicación lineal $f : R^2 \longrightarrow R$ definida por $f(x, y) = y$, obteniendo que el conjunto de las rectas horizontales con la estructura de espacio cociente de R^2 por el subespacio del eje de abscisas es también isomorfo a R.

Para la aplicación $f : R^2 \longrightarrow R$ definida por $f(x, y) = x + y$ y para cada $a \in R$, $f^{-1}(a) = \{(x, y)|x + y = a\}$ es una recta paralela a la diagonal del segundo y cuarto cuadrante. El conjunto de todas estas rectas estructurado en espacio vectorial es isomorfo a R. El isomorfismo asocia a cada recta la abscisa de su punto de intersección con el eje de abscisas.

Consideremos ahora la aplicación $f : R^3 \longrightarrow R$ definida por $f(x, y, z) = x + y + z$.

Para cada $a \in R$, el conjunto $f^{-1}(a) = \{(x, y, z)|x + y + z = a\}$ es un plano. Los distintos planos que se obtienen para los distintos a son paralelos y forman el conjunto cociente de R^3 por el plano $W \equiv x + y + z = 0$. Este conjunto es isomorfo a R. El isomorfismo asocia a cada plano la abscisa de su punto de intersección con dicho eje.

Para la aplicación $f : R^3 \longrightarrow R^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$ el conjunto $f^{-1}(a, b)$ es el conjunto $\{(x, y, z)|x + y = a, y + z = b\} = \{(x, y, z)|x = a - \lambda, y = \lambda, z = b - \lambda\} = \{(x, y, z)|(x, y, z) = (a, 0, b) +$

$\lambda(-1,1,-1)\}$ que es una recta paralela a la recta
$\{(x,y,z)|x=-\lambda, y=\lambda, z=-\lambda\}=Nf$.

El conjunto de todas estas rectas paralelas es un conjunto cociente de R^3 por la recta Nf que con la estructura de espacio vectorial cociente es isomorfo a R^2. El isomorfismo asocia a cada recta la pareja de coordenadas no nulas de su punto de intersección con el plano $y=0$.

Si consideramos la aplicación $f: R^3 \longrightarrow R^2$ definida por $f(x,y,z)=(x+y,0)$, tenemos dos tipos de puntos en R^2: cuando $b\neq 0$, el punto (a,b) no pertenece a la imagen de f, por tanto su imagen inversa es vacía, pero para cada $(a,0)\in R^2$, el conjunto $f^{-1}(a,0)$ es el conjunto $(x,y,z)|x+y=a\}$, que es un plano. Para los distintos $a\in R$, obtenemos distintos planos paralelos, que forman el espacio cociente de R^3 por $W=\{(x,y,z)|x+y=0\}$. El espacio vectorial cociente R^3/W es isomorfo a $R\approx Im(f)$.

El mismo proceso se puede hacer para cualquier aplicación lineal
$f: V \longrightarrow V'$ entre dos espacios vectoriales, teniéndose $V/Nf\approx Imf$.

Si $f: V\longrightarrow V$ es una aplicación lineal con un subespacio invariante U, hay una aplicación lineal $V/U \longrightarrow V/U$ inducida por f que aplica cada variedad afín $v+U$ en $f(v)+U$. Puede comprobarse que está bien definida y que es lineal.

Relación del espacio cociente con los sistemas de ecuaciones.

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, que designamos simplificadamente por $Ax=b$, donde A es una matriz $m\times n$, considerando la aplicación lineal $f: R^n\longrightarrow R^m$ de matriz A, el conjunto de soluciones del sistema se puede escribir como la imagen inversa $f^{-1}(b)$, que según hemos visto es una variedad afín, elemento del conjunto cociente de R^n por el núcleo de f, siendo éste, a la vez, el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $Ax=0$.

Variedades afines y aplicaciones afines

Dada una aplicación afín $f(x)=a+Ax$, la imagen inversa de un punto $b\in Imf$ es el conjunto de puntos $\{x|a+Ax=b\}=\{x|Ax=b-a\}$, conjunto de soluciones de un sistema, que es también una variedad afín paralela al conjunto de soluciones del sistema $Ax=0$ y por tanto un elemento del conjunto cociente de R^n por $\{x|Ax=0\}$.

Ejercicios.

7.1.1

Consideremos en R^2 el subespacio F engendrado por $(1,1),(1,0)$.Dar una base de R^2/F.

7.1.2.

Consideremos en R^5 el subespacio F engendrado por $(1,1,0,1,1),(1,0,1,0,1)$.Dar una base de R^5/F.

7.1.3.

Sea S el subespacio de las matrices cuadradas simétricas de orden n (M)y A el subespacio de las matrices cuadradas antisimétricas de orden n. Hallar M/S y M/A.

Referencias.

[B] Juan de Burgos. Álgebra Lineal y Geometría cartesiana. 3ª edición. Ed. McGraw Hill/Interamericana de España. S. A. U. 2006.

[C] M. Castellet, I. LLerena. Álgebra Lineal y Geometría. Ed. Reverté. S. A. 1991.

[L] S. Lipschutz. Algebra Lineal. 2ª edición. Ed. McGraw Hill/Interamericana de España. S. A. U. 1992.

[X] S. Xambó Deschamps. Geometría. Ediciones UPC,1997.

Referencias Totales.

[A1] Algebra Lineal y aplicaciones. Jorge Arvesú Carballo, Renato Alvarez Nodarse, Francisco Marcellán Español. Ed. Síntesis 1999.

[A2] La Matemática: su contenido, métodos y significado. A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentief y otros. Ed. Alianza Universidad. 1981.

[B] Juan de Burgos. Álgebra Lineal y Geometría cartesiana. 3ª edición. Ed. McGraw Hill/Interamericana de España. S. A. U. 2006.

[C] M. Castellet, I. LLerena. Álgebra Lineal y Geometría. Ed. Reverté. S. A. 1991.

[D] El Universo de las Matemáticas. Willian Dunham. Ed. Pirámide. 1994.

[F] J.B: Fraleigh R. A. Beauregard. Algebra Lineal. Addison-Wesley Iberoamericana 1989.

[G] Matemáticas 1 Bachillerato. Carlos Gonzalez García. Jesús Llorente Medrano. Maria José Ruiz Jiménez. Ed. Editex. 2008.

[G1] Algebra Lineal con aplicaciones. Stanley I. Grossman. Ed. McGraw-Hill. 1992.

[Gr] Algebra lineal con aplicaciones. S. I. Grossman. Ed. Mc Graw Hill 2001.

[L] E. M. Landesman, M. R. Hestenes. Linear Algebra for Mathematics, Science, and Engineering. Prentice-Hall International, Inc. 1992.

[L1] S. Lipschutz. Algebra Lineal. 2ª edición. Ed. McGraw Hill/Interamericana de España. S. A. U. 1992.

[M] Matemáticas 2 Bachillerato. Mª Felicidad Monteagudo Martínez. Jesús Paz Fernández Ed. Luis Vives. 2003.

[S] Algebra Superior. M. R. Spiegel. Ed. Mc Graw Hill 2000.

[S1] Algebra lineal y sus aplicaciones. G. Strang Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. 1990.

[S2] Introduction to Linear Algebra. G. Strang. Wellesley-Cambridge Press 1993.

[Vi] Problemas de Algebra. A. de la Villa. Ed. Clagsa, 1994.

[X] S. Xambó Deschamps. Geometría. Ediciones UPC,1997.