ÁLGEBRA LINEAL II. 1$^{\underline{\text{er}}}$ Curso de CC. Físicas.
Examen Final. Junio de 2009.

No está permitido el uso de calculadora (no es necesario).
Por favor, desconectar los teléfonos móviles.

APELLIDOS: NOMBRE:

DNI: GRUPO:

1.
Considérese el producto escalar en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

a) Hallar la matriz de la proyección ortogonal, respecto al producto escalar anterior, sobre el subespacio Π, de ecuación $x + y + z = 0$.

b) Hallar la matriz de S_Π, la simetría ortogonal respecto al plano Π (siempre respecto al producto escalar anterior).
(Sugerencia: $S_\Pi = P_\Pi - P_{\Pi^\perp}$ y $Id = P_\Pi + P_{\Pi^\perp}$).

---

2. Estudiar los valores $a \in \mathbb{R}$ para los que la forma cuadrática

$$(a+1)x^2 + (a+1)y^2 + az^2 + 2xy + 2ayz$$

proviene de un producto escalar.

3.
Dado el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en base canónica por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar razonadamente si es diagonalizable.

b) ¿Cuál es su forma de Jordan J?.

c) Hallar una base de Jordan del endomorfismo y escribir una matriz C tal que

$$C^{-1}AC = J.$$

4.
Estudiar qué tipo de movimiento rígido es el dado por:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y encontrar razonadamente sus elementos característicos.

5.
a) Demostrar que todo endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene una recta invariante.

b) Demostrar que todo endomorfismo ortogonal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene un plano invariante.