El $\mu-$invariante de Z_2-esferas homológicas simétricas.

Lucía Contreras Caballero.

Demostramos aquí de forma progresiva que:

El $\mu-$invariante de una Z_2 esfera homológica tridimensional con un autohomeomorfismo que invierte la orientación de período mayor que 2 es cero.

Una esfera homológica tridimensional M con un autohomeomorfismo que invierte la orientación se dice simétrica.

Recordemos que el μ-invariante de una esfera homológica tridimensional M se define utilizando una variedad acíclica tetradimensional W^4 con frontera M, por medio de la signatura de la forma cuadrática de interseccción en $H_2(W^4)$

$$\mu M = -\frac{\sigma W^4}{16} \quad mod\ 1$$

Podemos establecer ya que el $\mu-$invariante de una Z_2 esfera homológica tridimensional con un autohomeomorfismo que invierte la orientación es cero, ya que entonces, la suma conexa de M con M es iqual a la suma conexa de M con $-$M, siendo esta suma conexa, la frontera de $(M-B^3)\times I$, variedad tetradimensional con forma cuadrática nula.

Fué demostrado por Birman y también por Galewski junto a Stern y por Hsiang junto a Pao que el $\mu-$invariante de una Z_2 esfera homológica tridimensional con un autohomeomorfismo periódico que invierte la orientación h de período 2 es cero.

Demostramos primero,

Teorema 1.

El $\mu-$invariante de una esfera homológica tridimensional M con un autohomeomorfismo que invierte la orientación h de periodo 4 es cero.

Demostración:

El conjunto de puntos fijos de h^4 está formado por dos puntos aislados y el conjunto de puntos fijos de h^2 es un nudo K, por la teoría de Smith, cuando M es una esfera homológica. Este nudo contiene los dos puntos fijos de h, que deja invariante el nudo, invirtiendo su orientación. Lo mismo es cierto cuando M es una Z_2 esfera homológica.

Llamemos $N = M/h^2$, entonces N es también una esfera homológica, por el teorema de dualidad de Poincaré. El autohomeomorfismo h se proyecta a un homeomorfismo h en N que designaremos con la misma letra porque no da lugar a confusión.

M es el recubridor doble de N ramificado sobre el nudo (K) anfiqueiral por h.

Cuando M es una Z_2-esfera homológica, $N = M/h^2$ es también una Z_2 esfera homológica y

$H_1(N) = Z_{2m_1+1} \oplus Z_{2m_2+1} \oplus \cdots \oplus Z_{2m_r+1}$, donde: $m_1, m_2, \cdots, m_r$ son números enteros.

Nuestro nudo K es nulhomólogo en una esfera homológica N pero no lo es necesariamente cuando N es sólo una Z_2 esfera homológica. En una Z_2 esfera homológica, un múltiplo de K: ((2s+1)K) es nulhomólogo y haciendo la suma conexa sum $\sum N$ de 2s+1 copias de N consigo misma por los puntos fijos de h de tal manera que la suma sea compatible con h, obtenemos también la suma conexa de K con él mismo 2s+1 veces, que es nulhomólogo en $\sum N$ y hacemos una demostración común a esferas homológicas y Z_2 esferas homológicas simétricas.

La variedad $\sum N$ es también una Z_2 esfera homológica con un autohomehomorfismo que invierte la orientación, por tanto su $\mu-$invariante es cero o 1/2. Llamamos K_σ el nudo suma conexa de 2s+1 copias of K; (el nudo K_σ es anfiqueiral para h).

La suma conexa de M con ella misma 2s+1 veces $\sum M$ es un recubridor doble de $\sum N$ ramificado sobre K_σ

Construimos un bordismo B_σ entre $\sum M$ y dos copias disjuntas de $\sum N$, considerando F, una superficie de Seifert de K_σ (que siempre existe cuando M es una esfera homológica), $(\sum N) \times I$, y haciendo el recubridor doble B_σ of $(\sum N) \times I$, ramificado sobre $F \times [0, 1/2)$, de dos copias de

$$\sum N \times I - bicollar(F \times [0, 1/2)) \approx \sum N \times I - F \times [-1, 1] \times [0, 1/2),$$

identificando de forma cruzada en las copias, las fronteras de

$$bicollar((F \times [0, 1/2)) - (F - K_\sigma) \times (-1, 1) \times \{0\} :$$

Si x^1 es el punto $x \in F$ en la primera copia y x^2 es el punto $x \in F$ en la segunda copia, (δ indicando frontera) y siendo

$$(\delta(F \times [-1,1] \times [0,1/2)) - (F - K_\sigma) \times (-1,1) \times \{0\} =$$
$$F \times \{-1,1\} \times [0,1/2) \cup (F) \times (-1,1) \times \{1/2\}$$

identificamos

$$(x^1, -1, t) \in (F \times \{-1\} \times [0,1/2)) \text{ con } (x^2, 1, t) \in (F \times \{1\} \times [0,1/2))$$

y

$$(x^1, 1, -s) \in (F \times \{1\} \times [0,1/2)) \text{ con } (x^2, -1, s) \in (F \times \{-1\} \times [0,1/2))$$

Identificamos también,
$(x^1, s, 1/2)$ with $(x^2, -s, 1/2)$ $\quad \forall x \in F \times (-1,1) \times \{1/2\}$.

La frontera de B_σ es la unión disjunta de $\sum M$ y dos copias de $\sum N$.

Por una sucesión de Mayer-Vietoris, $H_2(B_\sigma)$ es una suma directa de $H_2(N)$ con él mismo $2(2s+1)$ veces más un grupo abeliano de 2g generadores, donde cada generador corresponde a una c_i, generador de $H_1(F)$ que verifica $(2n_i+1)c_i$ es nulhomólogo.

Escribimos ahora cómo son los elementos de $H_2(B_\sigma)$ determinados por curvas cerradas nulhomólogas contenidas en la superficie de Seifert F contenida en $\sum N$:

Llamamos [a] el elemento de $H_2(B_\sigma)$ determinado por a, curva cerrada reprepresentativa de $H_1(F)$, nulhomóloga in $\sum N$, que bordea una superficie de Seifert $F_a \subset \sum N$;
Dada una curva cerrada $a \subset F \subset \sum N$, llamamos

$a^+ = a \times \{1\} \subset F \times \{1\} \subset bicollar(F) \subset \sum N$ and $F_{a^+} \subset \sum N$ la superficie de Seifert de a^+
$a^- = a \times \{-1\} \subset F \times \{-1\} \subset bicollar(F) \subset \sum N$, y $F_{a^-} \subset \sum N$ la superficie de Seifert de a^-

Denotamos por $F^1_{a^+} \subset \sum N$, la superficie de Seifert de a^+ en la primera copia de $N \times I$, en cualquier nivel $\{t\}$ y por $F^2_{a^+} \subset \sum N$, la superficie de Seifert de a^+ en la segunda copia, $(F_{a^+} \subset \sum N \subset \sum N \times I)$.
Entonces,

$$[a] = F^1_{a^+} \times \{1/2\} \cup a^+ \times [0,1/2) \cup a^- \times [0,1/2) \cup F^2_{a^-} \times \{1/2\}$$

y también,

$$[a] = F^1_{a^-} \times \{3/4\} \cup a^- \times [0,3/4) \cup a^+ \times [0,3/4) \cup F^2_{a^+} \times \{3/4\}.$$

Entonces, tenemos para un par $([a_i] = [(2n_i+1)c_i, [a_j] = (2n_j+1)c_j)$, donde a_i, a_j son curvas cerradas en F, generadores de $H_1(F)$, nulhomólogas in $\sum N$:

$$\begin{gathered}
[a_i] \cap [a_j] = \\
(F^1_{a_i^+} \times \{1/2\} \cup a_i^+ \times [0,1/2) \cup a_i^- \times [0,1/2) \cup F^2_{a_i^-} \times \{1/2\}) \cap \\
(F^1_{a_j^-} \times \{3/4\} \cup a_j^- \times [0,3/4) \cup a_j^+ \times [0,3/4) \cup F^2_{a_j^+} \times \{3/4\}) = \\
(lk \text{ representa linking number}) \\
= lk(a_i^+, a_j^-) + lk(a_i^-, a_j^+) = lk(a_i^+, a_j) + lk(a_i, a_j^+)
\end{gathered}$$

La matriz de la forma cuadrática de intersección de $H_2(B_\sigma)$ viene dada, entonces, por una matriz cuyas entradas son:

$$\begin{gathered}
(lk(a_i^+, a_j) + lk(a_j^+, a_i)) = \\
= (lk((2n_i+1)c_i^+, (2n_j+1)c_j + lk((2n_j+1)c_j^+), (2n_i+1)c_i)).
\end{gathered}$$

Demostramos que esta matriz tiene signatura cero porque el nudo K_σ es anfiqueiral:

En efecto, como el nudo K verifica $h(K) = -K$, el bordismo B_σ puede construirse también haciendo el recubridor doble de $N \times I$ ramificado sobre $h(F) \times [0,1/2)$.

Entonces, otra matriz para la forma cuadrática de intersección Q de B_σ puede calcularse de la base $\{h(c_1), h(c_2), \cdots, h(c_{2g-1}), h(c_{2g})\} \subset h(F)$, (que da una base diferente de $H_2(B_\sigma)$), y, como $(h(a))^+ = h(a^-)$ para cada curva de F, porque h invierte la orientación tenemos:

$$lk(h(a_i))^+, h(a_j)) = -lk(h(a_i^-), h(a_j)) = -lk(a_i^-, a_j) = -lk(a_i, a_j^+) =$$
$$= -lk(a_j^+, a_i)$$

$$lk(h(a_j))^+, h(a_i)) = -lk(h(a_j^-), h(a_i)) = -lk(a_j^-, a_i) = -lk(a_j, a_i^+) =$$
$$= -lk(a_i^+, a_j)$$

Sumando los términos anteriores, obtenemos como matrices de Q dos matrices opuestas que deberían tener la misma signatura, de aquí que esta signatura sea cero.

Entonces, el $\mu-$invariante de $\sum M$ es igual (mód 1) a
$-$signatura(Q)+ $2\mu-$invariante$\sum N = 0$,
porque $\sum N$ es una Z_2- esfera homológica con un autohomeomorfismo que invierte la orientación. ($\mu \sum N = 0$ *or* $1/2$), por tanto

$$0 = \mu \sum M = (2s+1)\mu M \Longrightarrow \mu M = 0$$

porque M is Z_2 esfera homológica con un autohomeomorfismo que invierte la orientación. ($\mu M = 0$ *or* $1/2$) y el μ-invariante está definido modulo 1.

De forma análoga, Teorema 2:
El $\mu-$invariante de una esfera homológica tridimensional M con un autohomeomorfismo que invierte la orientación h de periodo 2^3 es cero.
Demostración:
El conjunto de puntos fijos de h está formado por dos puntos aislados de M y el conjunto de puntos fijos de h^4 es un nudo por la teoría de Smith, Cuando M es una Z_2 esfera homológica. Este nudo contiene los dos puntos fijos de h, invirtiendo la orientación del nudo, que deja invariante.
Llamemos $N = M/h^4$. El autohomeomorfismo h se projecta a otro autohomeomorfismo h en N, que designaremos por la misma letra.
Cuando M es una Z_2-esfera homológica, $N = M/h^4$ es también una Z_2-esfera homológica, por el teorema de dualidad de Poincaré. Además M es recubridor doble de N, ramificado sobre el nudo K.
Con el mismo procedimiento anterior para M y N obtenemos que el $\mu-$invariante de M es cero.
Igualmente, Teorema 3:
El $\mu-$invariante de una esfera homológica tridimensional M con un autohomeomorfismo que invierte la orientación h de periodo h^r es cero.
Para ello, consideramos $N = M/h^{2^{r-1}}$ y repetimos el procedimiento anterior.

Hemos obtenido, junto al primer resultado de Birman, Galewski and Stern, Hsiang and Pao, que **El $\mu-$invariante de una esfera homológica tridimensional M con un autohomeomorfismo que invierte la orientación h cuyo período es una potencia de 2, es cero.**

Y podemos establecer **Teorema 4.**

El μ−invariante de una esfera homológica tridimensional con un autohomeomorfismo periódico h que invierte la orientación es cero.

El resultado se sigue ahora de la consideración de que cualquier número n mayor que 2 puede expresarse como $n = m2^r$ donde m es un número impar y $r > 1$, porque h^m es un autohomeomorfismo que invierte la orientación de período 2^r, en M.

REFERENCIAS.

[B]J. S. BIRMAN,'Orientation reversing involutions on 3-manifolds' Preprint, Columbia University, (1978).

[C]S.E. CAPPELL and J.L. SHANESON, 'Branched cyclic coverings', Knots, groups and 3-manifolds. Annals of Mahematics Studies 84 (1975), pp. 165-173.

[Co1] L. CONTRERAS CABALLERO, 'Periodic transformations in homology 3-spheres and the Ronlin invariant'. Notices of the Amer. Math. Soc. October 1979, p. A-530.

[Co2] L. CONTRERAS CABALLERO, Topología Lineal a Pedazos. Transformaciones Periódicas en Esferas homológicas y el Invariante de Rohlin.Editorial de la Universidad Complutense de Madrid. 1980. Dep. Legal: M-8922-1980. (Tesis Doctoral).

[Co3] L. CONTRERAS CABALLERO. 'Periodic transformations in homology 3-spheres and the Ronlin invariant'. Bangor Conference on Low Dimensional Topology. Wales U.K. 1979.

[D]A. DOLD, Lectures on Algebraic Topology. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[DK]A. DURFEE and L. KAUFFMAN, 'Periodiciy of branched cyclic covers', Math. Ann. 218 (1975), pp. 157-174.

[E]J. EELLS and K:H. KUIPER, 'An invariant for certain smooth manifolds', Ann. Mat. Pur Appl. (4) 60(1972), pp. 93-110.

[F]E.E. FLOYD, 'Periodic maps via Smith theory', Seminar on Transformation Groups. Annals of Mathematics Studies 46 (1960), pp. 35-47.

[G]D. GALEWSKI and R. STERN, 'Orientation reversing involutions on homology 3-spheres', Math. Proc. Cam. Phil. Soc. 85 (1979), pp.449-451.
————— 'Classification of Simplicial Triangulations of topological manifolds', Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), pp. 916-918.

[Go]C. Mc. GORDON,'Some aspects of classical knot theory', Knot theory: Plans sur Bex, Switzerland, 1977. Springer Lecture Notes in Math. 685 (1978), pp. 1-65.
————— 'Knots, homology spheres and contractible manifolds', Topology 14 (1975), pp. 151-172.

[H]W.C. HSIANG and P.S. PAO, Orientation reversing involutions on homology 3 spheres', Notices Amer. Math, Soc. 26, February 1979. p.A-251.

[Kf]L. KAUFFMAN, 'Branched coverings, open books and knot periodicity', Topology 13 (1974) pp. 143-160.

[Kw]A. KAWAUCHI, 'On three manifolds admitting orientation reversing involution' Preprint I.A.S. Princeton, (1979).
————- 'Vanishing of the Rohlin invariant of some Z_2-homology 3-spheres, Preprint I.A.S. Princeton (1979).

[KN]S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, Foundations of Differential Geometry. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

[Ko]S. KOBASYASHI, Transformation Groups in Differential Geometry. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[L]J. LEVINE, 'Invariant of knot cobordism', Inventiones Math. 8 (1969), pp. 98-110 and 355.

[M]A. MARDEN, 'The geometry of finitely generated Kleinian groups', Ann. of Math. 99 (1974), pp. 383-462.

[Mi]J. MILNOR, 'Infinite cyclic coverings', Conference on the Topology of Manifolds Prindle, Weber, and Smidt, Boston, Mass. (1968), pp.115-133.

[MH]J. MILNOR and D. HUSEMOLLER, 'Symmetric bilinear forms. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[Mo]G.D. MOSTOW, 'Strong rigidity of Locally Symmetric Spaces', Ann. of Math. Study, 78, 1976 Princeton Univ. Press.

[Nm]W. NEUMANN, 'Cyclic suspension of knots and periodicity of signature for singularities', Bull. Amer. Math. Soc. 80, pp 977-981, 1974.

[Nw]L.P. NEUWIRTH, 'Knot groups', Annals of Math. Studies 56, Princeton, 1965.

[R]W.A. ROHLIN, 'New results in the theory of four dimensional manifolds', Dokl. Acad. Nauc. SSRR 84 (1952), pp. 221-224.

[S]L. SIEBEMANN, 'On vanishing of the Rochlin invariant and nonfinitely amphichaeiral homology 3-spheres, Topology Symposium Siegen, 1979, Springer Lecture Notes in Math. 788 (1980), pp. 172-222

[T]W. THURSTON, 'The Geometry and Topology of 3-manifolds', Preprints, Princeton University, (1978).

[Tr]A.G. TRISTRAM, 'Some cobordism invariants for links', Proc. Cambridge Phil. Soc. 66 (1969), pp. 251-264.

[W]F. WALDHAUSEN, 'On irreducible 3-manifolds that are sufficiently large', Ann. of Math. 87 (1968), pp. 56-58.

Lucía Contreras Caballero.
Profesora Titular Numeraria Jubilada de la Universidad Autónoma de Madrid.
Enero 2021. Baeza (Jaén) España.