

250 PROBLEMAS RESUELTOS DE
TOPOLOGIA ALGEBRAICA Y GEOMETRICA.
HOMOTOPIA. ESPACIOS RECUBRIDORES. NUDOS.

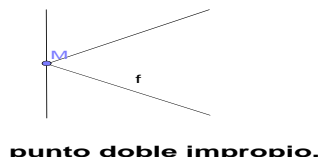
III. NUDOS.

Lucía Contreras Caballero
Profesora Titular de Geometría y Topología
Universidad Autónoma de MADRID

Isabel Contreras Caballero
Profesora Agregada de Bachillerato (Matemáticas)
Instituto de Bachillerato "Baelo Claudia"
Tarifa (Cádiz)

18.1 EJERCICIO F)

Sea $p : R^3 \rightarrow R^2$ la proyección natural de R^3 sobre R^2 . $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$. Un punto de cruce de un nudo K es un punto $x \in R^2$ tal que $p^{-1}(x) \cap K$ está formado por dos o más puntos. Es un punto doble si $p^{-1}(x) \cap K$ consta de dos puntos. En este caso decimos que no es un punto doble propio si moviendo ligeramente el nudo el punto doble desaparece. Véase figura a continuación.



Consideremos nudos tales que todos sus puntos de cruce son puntos dobles propios. Encontrar todos los nudos que tengan uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis puntos de cruce.

Solución:

La dificultad de este problema estriba en que cuando se mira la proyección del nudo por primera vez, se tiene la sensación de que los puntos dobles pueden aparecer desorganizados de manera caótica.

La idea para resolver el problema consiste en sistematizar esta distribución observando que siempre podemos considerar los puntos dobles distribuidos en filas de una dirección fija (que sin embargo puede ser arbitraria) con lo que las infinitas posibilidades de aparición de puntos dobles quedan reducidas a las de formar nudos con las posibilidades finitas de distribución de un número determinado de cruces en filas. (Véanse Fig. 1 y Fig. 2).

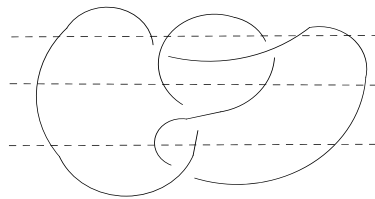


fig.1

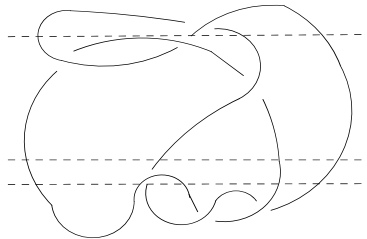


fig.2

Si en un nudo deshacemos una cruz y hacemos otra o vemos que al intentar deshacer una cruz siempre se crea otra nueva, estamos disminuyendo en 1 el número de cruces de una fila y aumentando en 1 el número de cruces de otra fila (que podía ser vacía al principio).

Pero al considerar desde el comienzo todas las posibilidades de distribución de cruces en filas, esta situación nueva ya ha sido incluida.

Distribuidas las cruces en filas, podemos desplazar las de cada fila hacia la izquierda sin cambiar el nudo ni la forma de pegar los bordes libres de las cruces.

Por ello supondremos que las filas dan lugar a columnas de longitud no creciente.

Las distribuciones simétricas respecto a la bisectriz del cuarto cuadrante dan lugar a los mismos nudos por lo que también podemos suponer que el número de columnas es menor o igual que el número de filas.

Cada cruz tiene cuatro bordes. Debido a que no se pueden crear más cruces, los bordes de todas las cruces quedan distribuidos también en filas horizontales (el doble del número de filas de cruces). Por la forma de disponer las cruces, los bordes superiores no exteriores de la primera fila quedan unidos entre sí por arcos que no intersecan las franjas. Análogamente los bordes exteriores izquierdos de las cruces de la primera columna quedan unidos por arcos que no intersecan las columnas determinadas por las cruces. Los demás bordes de cruce están unidos mediante la siguiente regla: Los bordes inferiores no exteriores de las cruces de una fila se unen entre sí o a los bordes superiores no exteriores de las cruces de la fila inmediatamente inferior.

Si unimos entre sí los extremos libres de una misma cruz, dicha cruz se deshace, por ello supondremos que este caso no se da.

Como consecuencia, para ver cuántos nudos hay con un cierto número k de puntos dobles vamos a considerar todas las posibilidades de distribuir en filas el número k de cruces, y luego veremos las posibilidades que surgen al unir los extremos libres de éstas de acuerdo con las reglas ya enunciadas.

Hemos de considerar cruces de dos tipos:



En el caso más general, al unir los extremos libres de las cruces obtenemos una variedad 1-dimensional cerrada con una o más componentes conexas. La conexión de la variedad obtenida no depende del tipo de cruz, por ello estudiamos primero la conexión obtenida con cruces de un solo tipo y, en los casos en que obtengamos una sola componente conexa, estudiaremos las variantes de este nudo que se pueden construir al cambiar el tipo de las cruces.

Tendremos en cuenta también que al cambiar en un nudo todas las cruces de un tipo a cruces de otro tipo, el nuevo nudo es la imagen en un espejo colocado horizontalmente encima del nudo primitivo, sin tocarlo. Si estos

dos nudos son equivalentes, el nudo se llama anfiqueiral.

1) Supongamos que el nudo tiene un solo punto doble.

Entonces tenemos que unir los extremos libres superiores de la única cruz entre sí, por lo que deshacemos la cruz.

EL UNICO NUDO CON UN PUNTO DOBLE ES EL TRIVIAL.

2) Supongamos que el nudo tiene dos puntos dobles.

Podemos distribuirlos en una fila o en una columna pero estos dos casos son simétricos respecto a la bisectriz del cuarto cuadrante, y por tanto iguales.



Fig. 3

Las únicas posibilidades de unir los extremos libres según las reglas y sin producir más cruces son las dibujadas en la figura 3. La primera da lugar a dos componentes conexas (no es nudo) y la segunda da lugar al nudo trivial. Un cambio del tipo de una cruz en este nudo trivial lo deja trivial. El simétrico respecto a un espejo de un nudo trivial es también trivial: EL UNICO NUDO CON DOS PUNTOS DOBLES ES EL TRIVIAL.

3) Supongamos que el nudo tiene tres puntos dobles.

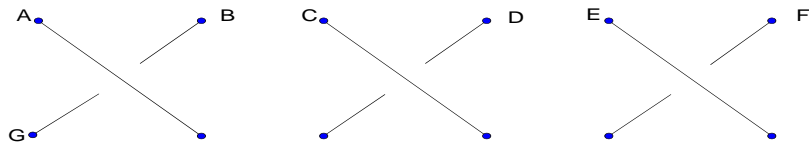


Fig. 4

Podemos distribuirlos en una fila o en dos filas. (Designaremos con letras mayúsculas los bordes que necesitamos considerar, véase figura 4).

Como hemos dicho, suponemos que A no está unido a B ni a G pues se desharía una cruz. Si unimos A con C no podríamos unir B a otro extremo de la misma fila sin producir un nuevo punto doble. Si unimos A con D , para que no haya nuevos puntos dobles, hay que unir E con F con lo que deshacemos una cruz. Si unimos A con E , para que ninguno de los extremos B, C, D quede libre, hay que producir un nuevo punto doble. Entonces sólo podemos unir A con F (Ver figura 5).

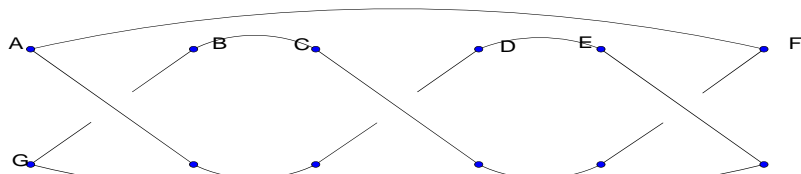


Fig. 5

Para no unir C y D entre sí y para no producir más puntos dobles unimos B con C y D con E .

Con los extremos inferiores ocurre lo mismo y así obtenemos el nudo trébol.

Si cambiamos el tipo de un punto doble, el nudo se transforma en trivial. Si cambiamos el tipo de dos puntos dobles obtenemos el simétrico respecto al espejo de este último nudo, también trivial. Si cambiamos el tipo de los tres puntos dobles obtenemos el simétrico respecto al espejo del nudo trébol, que no es equivalente al nudo trébol (se verá en el ejercicio 18.7 C)).

Ahora colocamos los puntos dobles en dos filas: figura 6 a) y b):

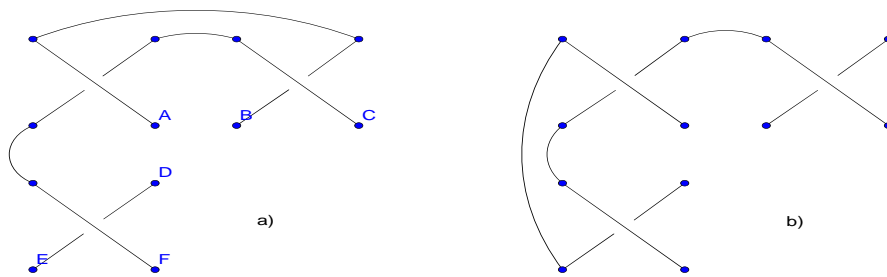


Fig. 6

Hay dos posibilidades de unir los extremos superiores de la primera fila: la dada en la figura 6 a) y la de la figura 6 b).

Veamos el caso a):

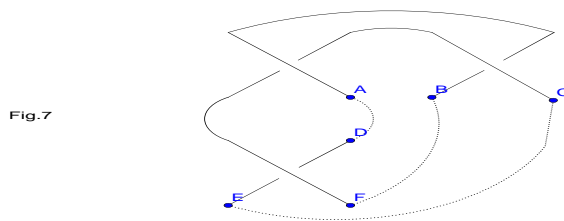


Fig.7

No podemos unir A con C pues entonces B quedaría libre. Lo mismo

ocurre al unir A con F respecto a D . Si unimos A con E habría que unir D y F entre sí y desharíamos una cruz.

Unimos A con B o con D .

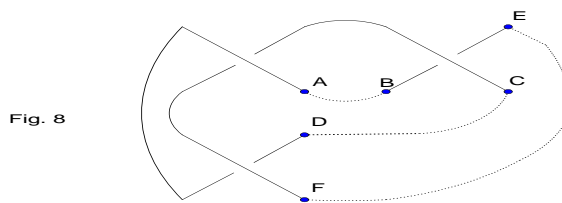
Si unimos A con B obtenemos más de una componente conexa.

Si unimos A con D lo único que podemos hacer para que no se deshagan cruces ni se produzcan más puntos dobles es unir B con F y C con E .

El nudo obtenido es de nuevo el nudo trébol (ver figura 7).

Las variantes del nudo al cambiar el tipo de puntos dobles son las mismas que las del caso anterior.

Veamos el caso b):

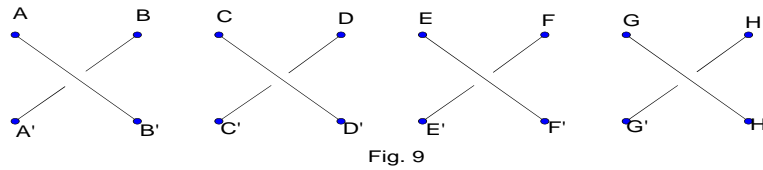


No podemos unir A con C ni con F porque quedan bordes libres. Si unimos A con E hemos de unir B y C entre sí y entonces deshacemos una cruz.

Uniendo A con D se produce más de una componente conexa. Entonces sólo podemos unir A con B , después C con D y E con F , y obtenemos de nuevo el nudo trébol de la figura 8.

Las variantes de este nudo al cambiar el tipo de cruz ya han sido estudiadas.

LOS NUDOS NO TRIVIALES CON TRES PUNTOS DOBLES SE REDUCEN AL TREBOL Y A SU SIMETRICO RESPECTO DEL ESPEJO.



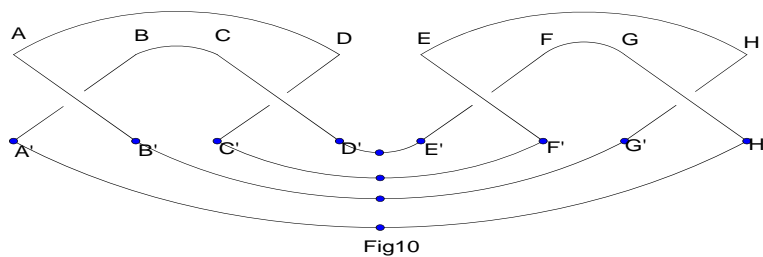
4) Supongamos que el nudo tiene cuatro puntos dobles.
Podemos distribuirlos en una, dos o tres filas.

a) En una fila tenemos la figura 9.

Si en la figura 9 unimos A con A' o H con H' deshacemos una cruz y pasamos al caso anterior. Lo mismo ocurre si unimos A con B o G con H .

No podemos unir A con C , E o G porque tendríamos que producir más puntos dobles para que no quedaran extremos libres. Tampoco podemos unir A con F porque habría que unir G y H entre sí y se deshacería una cruz. Nos quedan sólo dos posibilidades: unir A con D y A con H .

i) Unimos A con D (figura 10)



El razonamiento análogo con los extremos inferiores nos dice que sólo

podemos unir A' con D' y con H' .

Si unimos A' con D' obtenemos más de una componente conexa luego hemos de unir A' con H' .

No podemos unir B' con C' porque en este caso también se produciría más de una componente conexa, ni B' con D' porque quedaría C' libre.

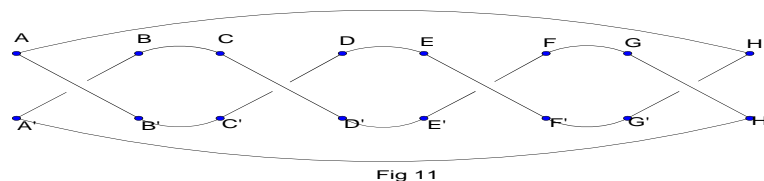
Si unimos B' con E' tenemos que unir F' con G' y tendremos más de una componente conexa y además al unir C' con D' se deshacería una cruz. Si unimos B' con F' , G' queda libre, luego la única posibilidad es unir B' con G' . Como además si unimos C' con E' queda el extremo F' libre tenemos que unir C' con F' y D' con E' obteniéndose dos componentes conexas.

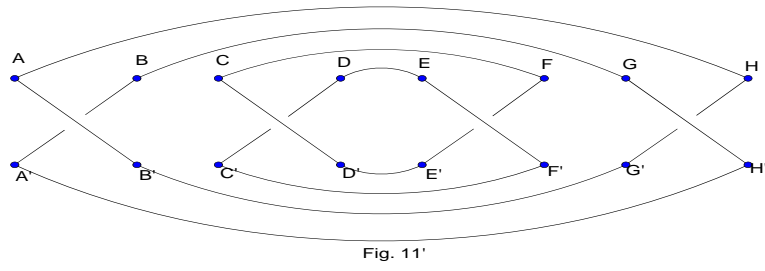
ii) Unamos A con H .

Si unimos B con C , para no deshacer cruces en la parte de arriba, hemos de unir D con E y F con G .

En esta situación, si unimos A' con B' deshacemos una cruz, lo mismo ocurre si unimos A' con F' pues habría que unir G' con H' . Si unimos A' con D' se produce más de una componente conexa. La única posibilidad restante que no deja extremos libres es unir A' con H' . Si ahora unimos B' con G' se produce más de una componente conexa y si unimos B' con E' , habría que unir C' con D' deshaciendo una cruz. La única posibilidad que queda que no deje extremos libres es unir B' con C' y ahora, para que no se deshagan cruces D' con E' y F' con G' , pero ahora se producen dos componentes conexas.

Si unimos B y E se deshace una cruz, y si unimos B con G , para que no se deshagan cruces unimos C con F y D con E . Ahora, para no obtener el simétrico del i) anterior, hemos de unir A' con H' , B' con G' , C' con F' y D' con E' , pero así se obtienen varias componentes conexas.





No podemos unir B con D ni con F porque quedarían extremos libres.

b) En dos filas tenemos:

i) Una fila con tres cruces y una fila con una cruz (ver figura 12).

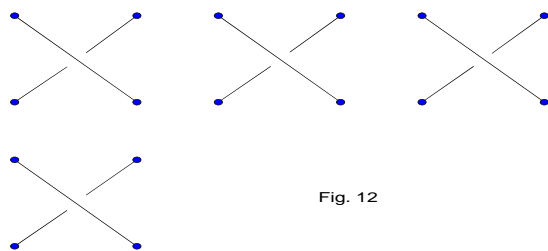


Fig. 12

Para no deshacer cruces tenemos las dos posibilidades siguientes:

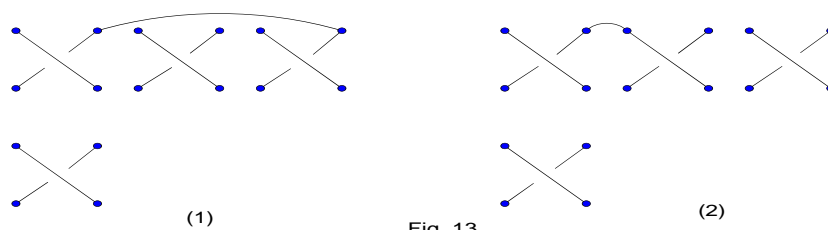


Fig. 13

La figura 13.1 no es válida porque queda un extremo libre.

La figura 13.2 se puede completar a la figura 14.1 o 14.2.

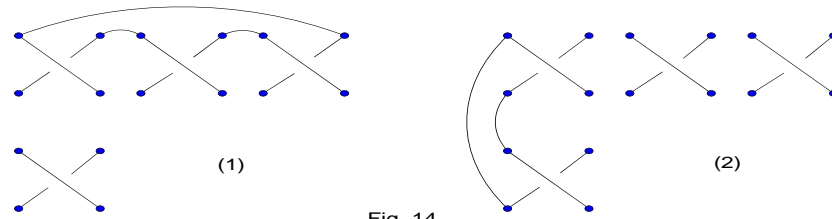


Fig. 14

Siguiendo con 14.1 tenemos:

Si unimos F con G se deshace una cruz. Si unimos F con H hay más de una componente conexa. Si unimos F con A hay que unir H con G y se deshace una cruz. Si unimos F con B queda un extremo libre. Si unimos F con C hay que unir D con E y se deshace una cruz. Si unimos F con D queda E libre. Hay que unir F con E .

Por razonamientos análogos concluimos que hay que unir G con D , H con C y A con B , o bien G con B , A con H y C con D .

Hemos obtenido el nudo figura ocho (ver figura 15) en los dos casos.

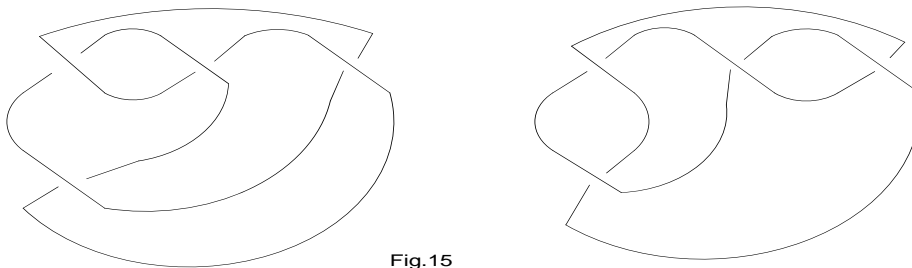


Fig.15

El cambio del tipo de una cruz deshace el nudo. Si cambiamos el tipo de

la cruz central de la primera fila el nudo se transforma en otro con sólo dos puntos dobles que, por tanto, es trivial (ver figura 16). Lo mismo ocurre si cambiamos el tipo de una de las restantes cruces.

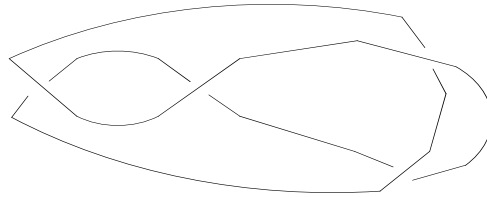


Fig.16

Un cambio simultáneo del tipo de las dos primeras cruces de la primera fila da el nudo trébol (ver figura 17). Lo mismo ocurre si cambiamos simultáneamente el tipo de las otras dos cruces.

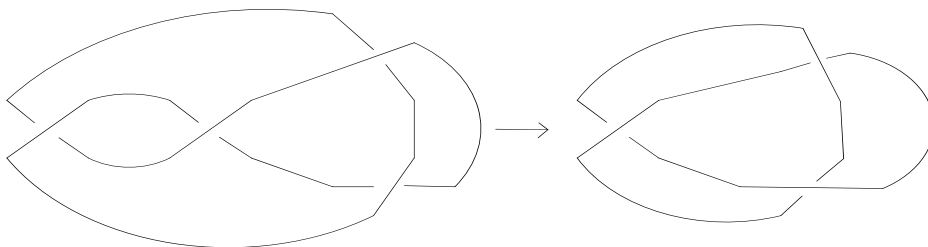


Fig.17

Si cambiamos tres cruces obtenemos los simétricos respecto al espejo de los obtenidos cambiando una sola cruz, que son triviales.

Si cambiamos las cuatro cruces obtenemos el simétrico del nudo figura ocho, pero éste es equivalente al nudo figura ocho como se verá en la figura 18.

Anfiqueiralidad del nudo figura ocho:

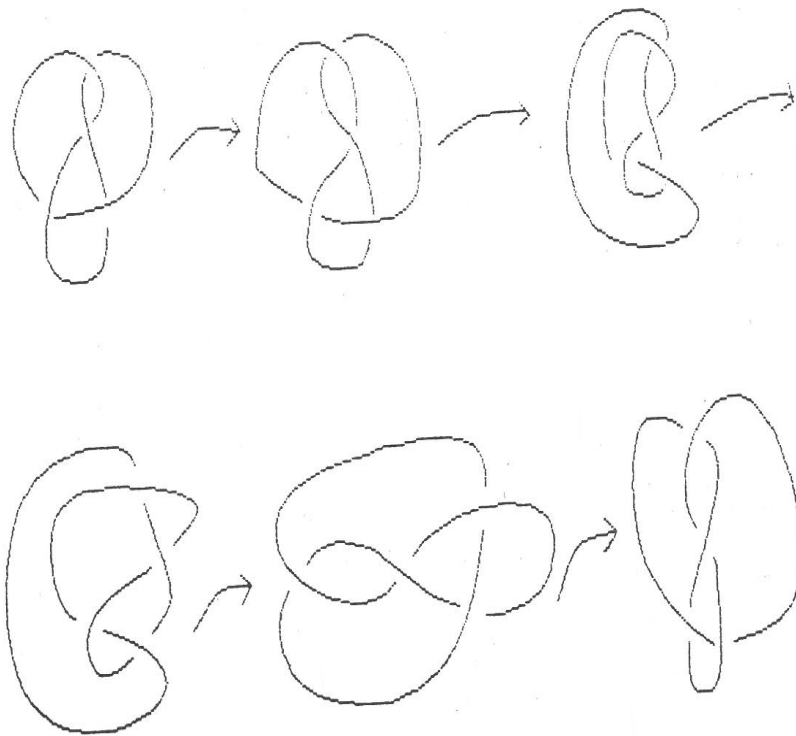


Fig. 18

Siguiendo con 14.2 tenemos:

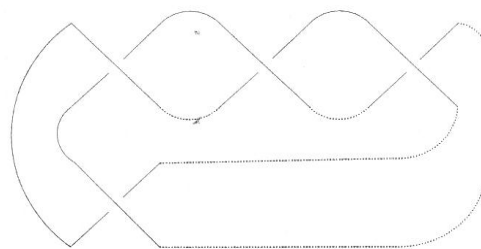
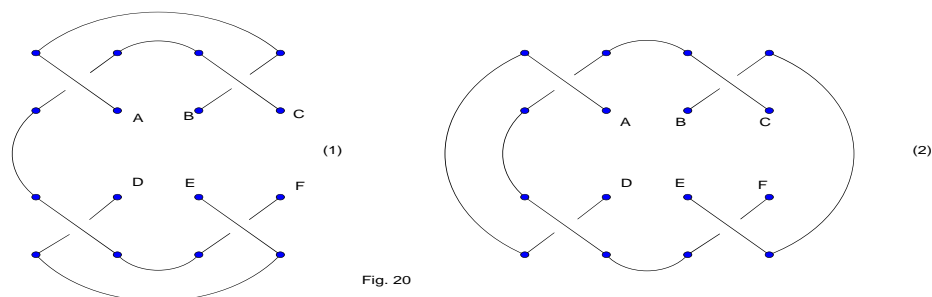


Fig. 19

donde la única posibilidad da dos componentes conexas (ver figura 19).

ii) Dos filas con dos cruces.



Uniendo en 20.1 C con F obtenemos más de una componente conexa.

Uniendo C con E queda F libre. Uniendo C con D hay que unir E con F con lo que se deshace una cruz. Uniendo C con A queda B libre. Uniendo C con B se deshace una cruz. Luego la figura 20.1 no da ningún nudo.

En la figura 20.2 se produce más de una componente conexa o quedan extremos libres.

c) El caso de tres filas se reduce al caso de una columna con tres cruces y otra columna con una cruz, esto es lo mismo que una fila con tres cruces y otra fila con una cruz.

LOS NUDOS NO TRIVIALES CON CUATRO PUNTOS DOBLES SON EL NUDO FIGURA OCHO Y EL NUDO TREBOL.

5) Supongamos que el nudo tiene cinco puntos dobles.
 Podemos distribuirlos en:
 a) Una fila con cinco cruces

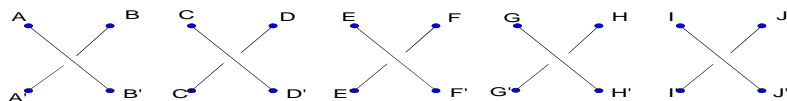


Fig. 21

No podemos unir A con A' ni J con J' porque se deshacería una cruz. Si unimos A con B se deshace una cruz. Si unimos A con C queda un borde libre.

i) Unamos A con D .

En este caso, si unimos E con H tenemos que unir I y J entre sí y se deshacería una cruz, por tanto, tenemos que unir E con J y para no deshacer ninguna cruz unimos F con G y H con I .

Al unir A' con F' hay que unir B' con C' obteniéndose más de una componente conexa.

Al unir A' con H' hay que unir I' con J' con lo que se deshace una cruz, por tanto, tenemos que unir A' con J' (ver figura 22).

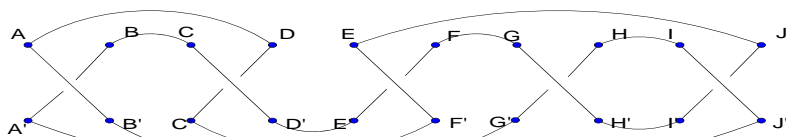


Fig. 22

Al unir B' con E' hay que unir C' con D' y se deshace una cruz. Al unir B' con G' hay que unir H' con I' , D' con E' y C' con F' para que no se deshaga ninguna cruz; se tiene entonces el nudo 5_2 (ver figura 23).

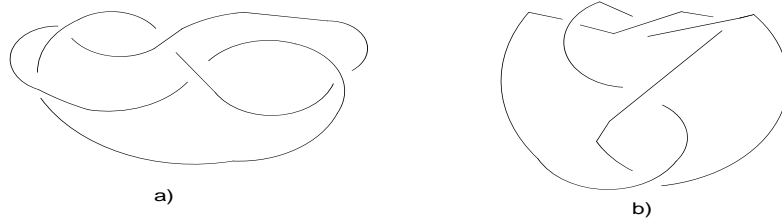


Fig. 23

Si cambiamos en este nudo el tipo de una cruz obtenemos el nudo trivial o el trébol. Si cambiamos el tipo de dos cruces obtenemos el nudo ocho o el trivial. Si cambiamos tres, cuatro o cinco cruces tenemos los simétricos en el espejo de los obtenidos al cambiar dos, una o ninguna cruz respectivamente.

ii) Unamos A con F . Los nudos que se pudieran obtener serían simétricos de los del caso i) ya que habría que unir G con J .

iii) Unamos A con H , entonces hay que unir I con J y se deshace una cruz.

iv) Unamos A con J .

Dentro de iv) vemos las posibilidades I) y II):

I) Unimos B con C , D con E , F con G y H con I . Unimos también A' con J' , B' con C' , D' con E' , F' con G' y H' con I' (ver figura 24). Entonces obtenemos el nudo 5_1 .

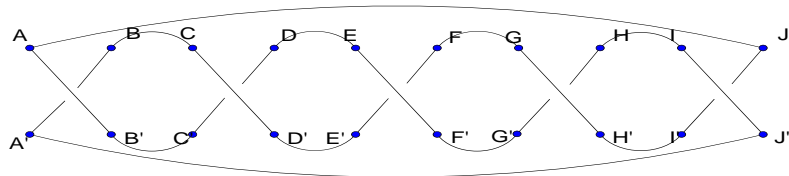


Fig.24

Si cambiamos el tipo de una cruz se obtiene el nudo trébol. Si cambiamos el tipo de dos cruces se obtiene el nudo trivial.

Las restantes posibilidades para unir A' con otro borde inferior han sido estudiadas y desechadas, por dar más de una componente conexas.

Una vez unido A' con J' vemos las restantes posibilidades para unir B' . Si unimos B' con C' , D' con E' y F' con I' deshacemos una cruz.

Si unimos B' con C' y D' con G' habría que unir E' con F' y se desharía una cruz.

Si unimos B' con C' y D' con I' , y no queremos deshacer cruces, hay que unir E' con H' obteniéndose más de una componente conexas.

Uniendo B' con E' deshacemos una cruz. Uniendo B' con G' , o bien deshacemos una cruz, o bien se tienen dos componentes conexas. La única posibilidad restante es unir B' con I' pero también se obtiene más de una componente conexas.

II) Manteniendo unido A con J vamos a estudiar las posibilidades de unión de B .

Si unimos B con C y D con E , al unir F con G se tiene la posibilidad ya estudiada, y al unir F con I se deshace una cruz.

Si unimos B con C y no unimos D con E , entonces la única posibilidad es unir D con I y, por tanto, E con H y F con G .

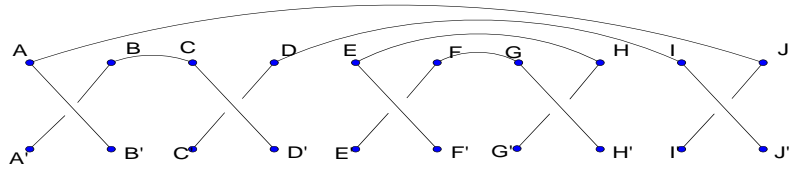


Fig. 25

Si unimos A' con B' se deshace una cruz. Si unimos A' con C' queda B' libre. Si unimos A' con D' se produce más de una componente conexas. Si unimos A' con E' queda algún extremo libre.

Unamos A' con F' , y para no deshacer cruces, B' con C' , D' con E' , G' con J' y H' con I' , obteniéndose el nudo de la figura 26.

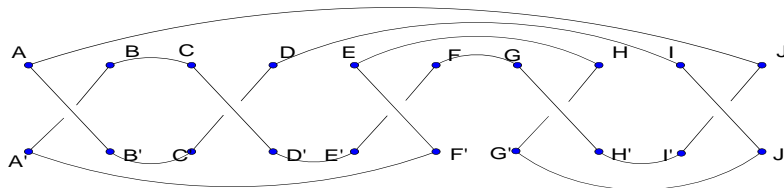


Fig. 26

Este nudo es el de la figura 22 girado 180 grados.

Estudiamos más posibilidades:

Si unimos A' con G' o con I' queda un extremo libre. Si unimos A' con H' habría que unir I' con J' y se desharía una cruz.

Unamos A' con J' .

Si unimos B' con C' y D' con E' , o bien se produce más de una componente conexa al unir F' con G' , o bien se deshace una cruz uniendo F' con I' y por tanto G' con H' .

Dejando unido B' con C' , si unimos D' con F' o con H' quedan extremos libres y si unimos D' con G' se deshace una cruz. Si unimos D' con I' se tiene más de una componente conexa. Luego no se obtiene ningún nudo con cinco cruces uniendo B' con C' .

No podemos unir B' con D' , F' ni H' porque quedan extremos libres.

Si unimos B' con E' se deshace una cruz.

Unimos B' con G' , H' con I' y, para no deshacer cruces, C' con F' y D' con E' . Se obtiene así el nudo de la figura 27.

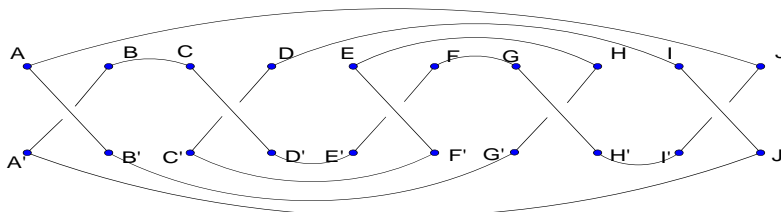
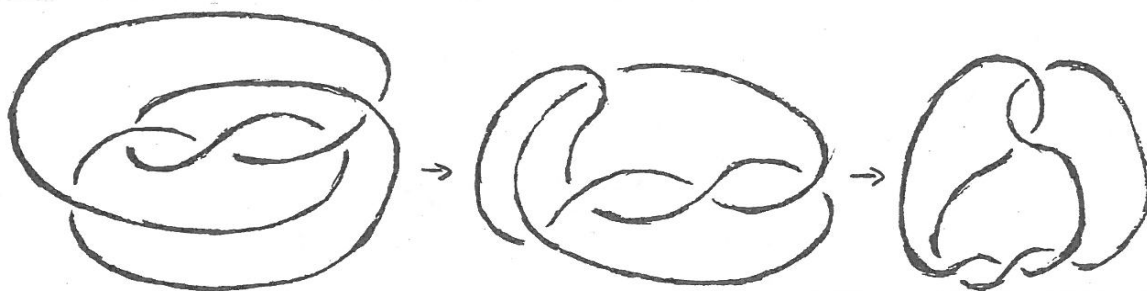
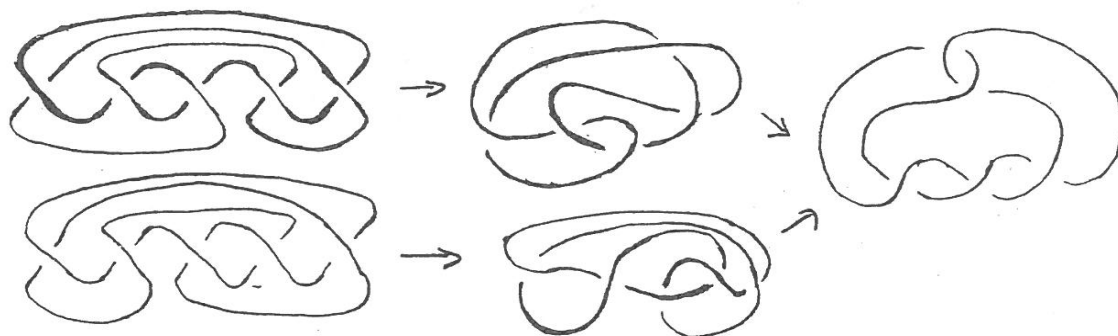


Fig. 27

Veamos que este nudo es el 5_2 :



Si unimos B' con I' obtenemos más de una componente conexas.
 Uniendo B con I , para que no se deshagan cruces, ha de unirse C con H , D con E y F con G . Entonces, las dos posibilidades de unión de los extremos inferiores corresponden al nudo 5_2 :



La única posibilidad restante de unión de B es la representada en la figura 29.

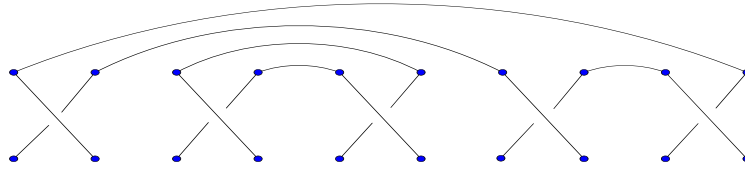


Fig. 29

Coincide con la figura 27 salvo una simetría respecto del espejo, por tanto están estudiados los nudos que puedan derivarse de ella.

b) Una fila con cuatro cruces y una fila con una cruz (ver figura 30).

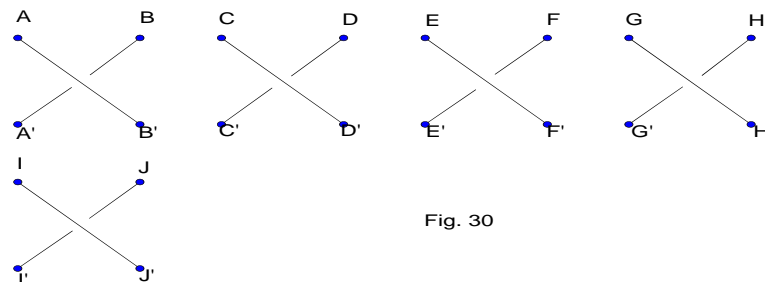


Fig. 30

i) Unamos A con I' y A' con I . Entonces se puede subir la cruz de la segunda fila a la primera en la operación descrita en la figura 31.

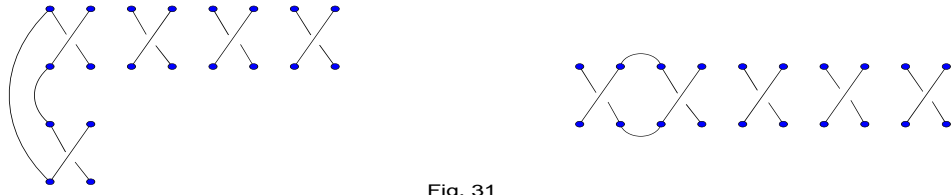


Fig. 31

ii) Unamos A' con I e I' con H' . Entonces sólo puede unirse A con D o con H .

I) Unimos A con D . Entonces la única posibilidad viene dada por la figura 32 que es el nudo 5_1 .

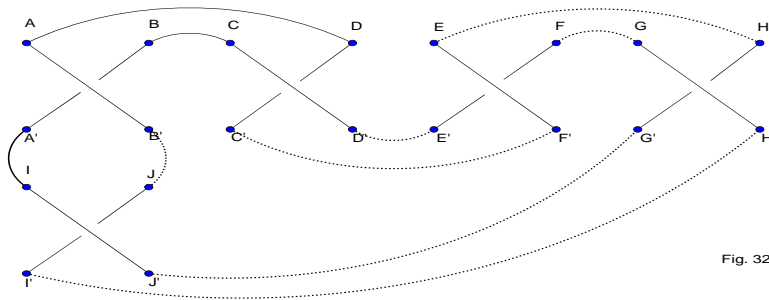


Fig. 32

II) Unimos A con H . Entonces, si unimos B con C las dos únicas posibilidades vienen dadas por las figuras 33 y 34 que corresponden al nudo 5_2 .

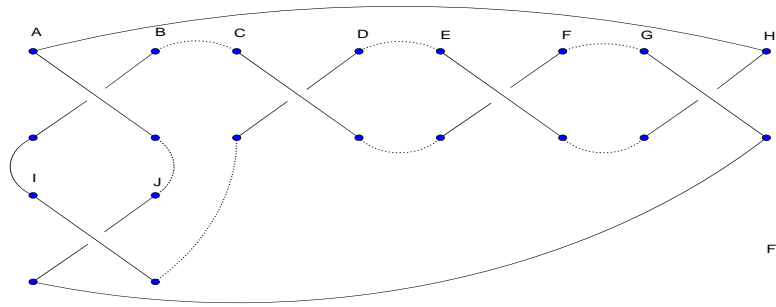


Fig. 33

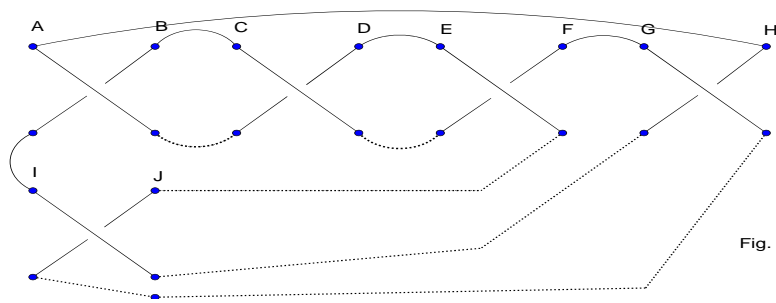


Fig. 34

Uniendo B con G la única posibilidad está dibujada en la figura 35 y corresponde al nudo 5_1 como se ve en la figura 36.

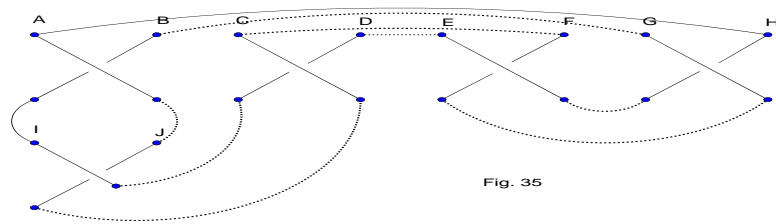


Fig. 35

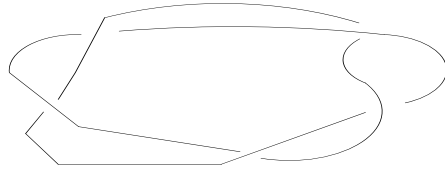


Fig. 36

c) Una fila con tres cruces y una fila con dos cruces (ver figura 37).

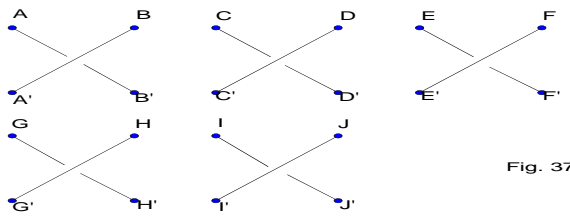


Fig. 37

Si en la figura 37 unimos A' con G y A con G' podemos subir la primera cruz a la primera fila y reducir el caso a uno anterior.

La posibilidad restante es unir A con F . Se comprueba en este caso que el extremo J sólo se puede unir con F' y con B' . En el primer caso sólo surgen dos nudos al unir B' con C' ó B' y H . Son los nudos 5_2 de la fig. 38.

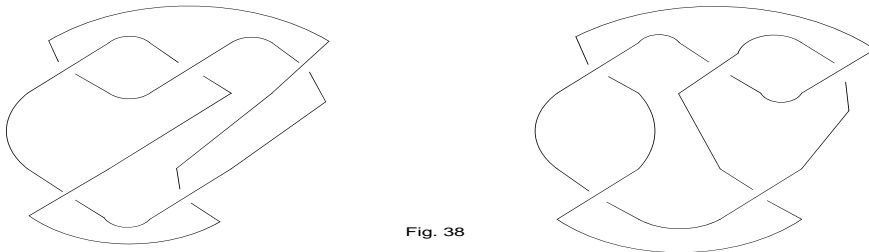
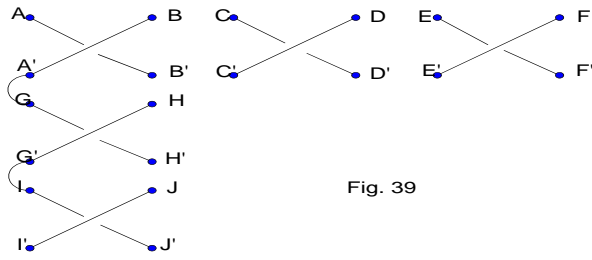


Fig. 38

En el segundo caso, como C' sólo puede unirse a D' , E' o F' ; o bien te-

nemos dos componentes conexas, o se deshace una cruz, o quedan extremos libres, no siendo válida esta posibilidad.

d) Una fila con tres cruces y dos filas con una cruz (ver figura 39).

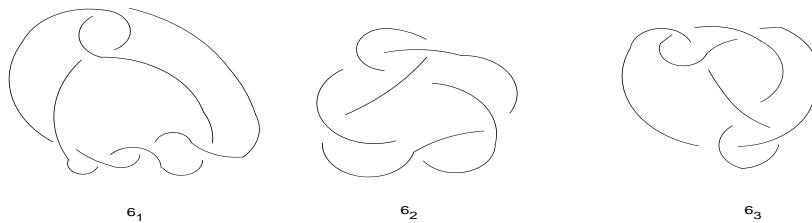


Necesariamente hay que unir A' con G y G' con I para no deshacer cruces. Si unimos A con I' , se pueden subir todas las cruces a la primera fila.

De nuevo para no deshacer cruces ni dejar extremos libres hay que unir A con F , B con C y D con E y podemos poner todas las cruces en una columna (caso equivalente al de una fila).

LOS NUDOS NO TRIVIALES CON CINCO PUNTOS DOBLES SON EL NUDO 5_1 , EL NUDO 5_2 , EL NUDO OCHO Y EL NUDO TREBOL.

Para hallar los nudos con seis cruces se sigue un procedimiento análogo y tenemos junto con sus simétricos respecto al espejo, los nudos siguientes:



Al cambiar en el nudo 6_1 el tipo de una cruz obtenemos el nudo ocho o el trivial. Al cambiar una cruz en los nudos 6_2 y 6_3 obtenemos el trébol, el ocho o el trivial.

Con técnicas que se escapan de este libro se demuestra que los nudos 5_1 , 5_2 y 6_1 , 6_2 no son anfiqueirales.

La anfiqueiralidad del nudo 6_3 se ve a continuación:

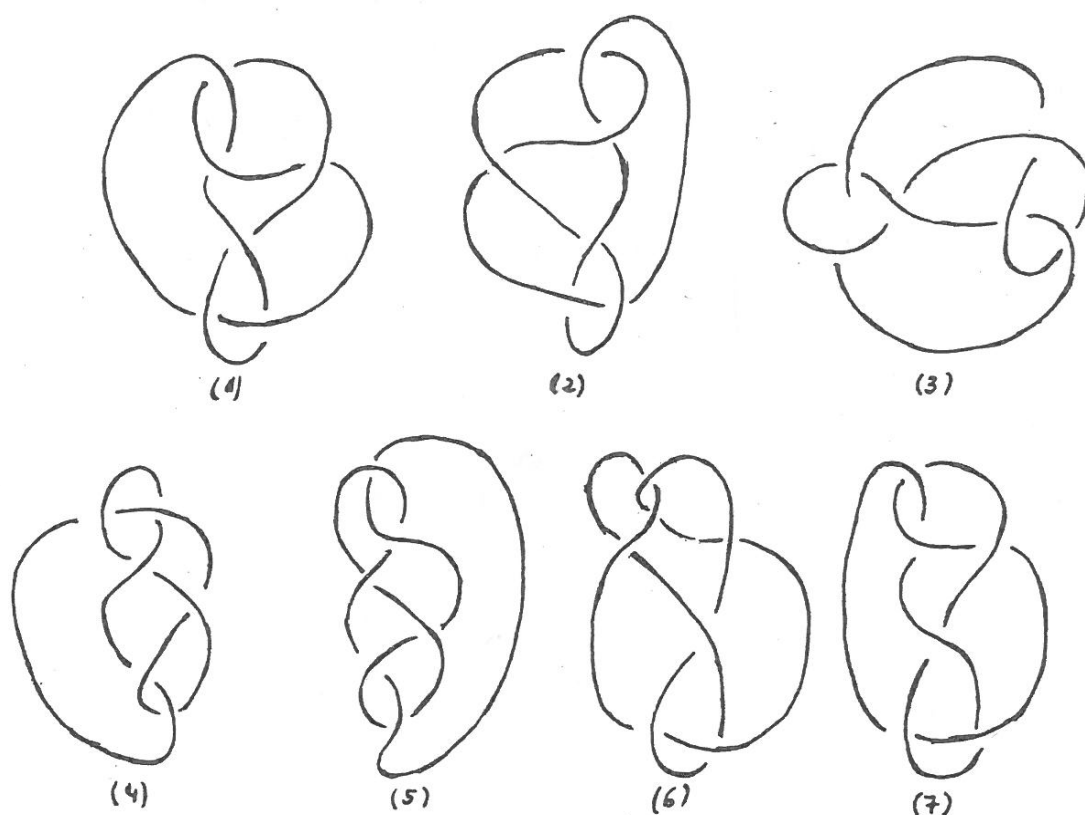


Fig. 41

Se pasa de (1) a (2) haciendo la simetría de las cruces respecto a un plano perpendicular al papel. Por tanto el nudo (2) es el simétrico respecto al espejo del nudo (1) y se ve que (2) se puede transformar en (7), que es el nudo (1).

De la figura 41 (5) se puede pasar a la figura 42, que es simétrica respecto al origen (los dos extremos libres se unen en el infinito) y da directamente la anfigeiralidad del nudo 6_3 .

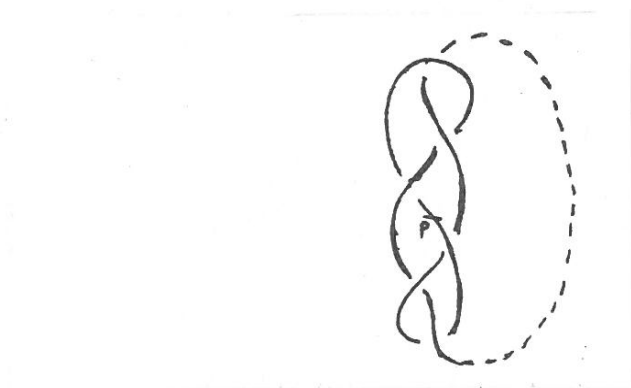


Fig. 42