CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 0.

1) **Falacias y paradojas.** Todo el mundo comete errores. En particular, todo el mundo comete errores en matemáticas, incluso los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Ahora bien, hay distintos tipos de errores, si uno suma dos números y obtiene una suma equivocada lo más probable es que aquello sea justamente un error. Ahora bien, si el error en una respuesta viene de un razonamiento que "parece correcto", entonces el error es una falacia. Es más, también sería una falacia un resultado correcto obtenido por medio de un razonamiento incorrecto, como aquel chico que simplificaba fracciones así: $1\cancel{6}/\cancel{6}4 = 1/4$, $1\cancel{9}/\cancel{9}5 = 1/5$.

Una falacia. Sea $x = 1$. Multiplicando ambos miembros por x tenemos que $x^2 = x$. Restando 1 de cada miembro, $x^2 - 1 = x - 1$. Dividiendo por $x - 1$ uno y otro miembro, $x + 1 = 1$. Y restando 1 a cada lado, tenemos $x = 0$. ¡Pero x era igual a 1! ¿Dónde está el fallo?

Podemos definir (vagamente) una paradoja como un resultado que por contrario a la intuición y al sentido común alcanza a provocar de inmediato un sentimiento de sorpresa. Por supuesto, muchas de las paradojas son también falacias (como el ejemplo anterior).

Una paradoja. Consideramos la frase: "Esta frase consta de siete palabras". Claramente es falsa. Por tanto, su contrario debería ser verdadero. ¿Es esto correcto? ¡Es falso! La oración contraria, "Esta frase no consta de siete palabras", también es falsa. Este ejemplo nos enseña que hay que tener mucho cuidado con la auto-referencia...

2) **¿Deberes fraudulentos?** A Antonio le han dicho que demuestre por inducción la siguiente propiedad, $P(n)$, para $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Ha empezado probando que si $P(n)$ es verdadera entonces $P(n+1)$ es verdadera. Demuéstralo tú también. ¿Es $P(n)$ verdadera para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$?

3) **Los búhos.** Vamos a demostrar que, dado un conjunto B de n búhos, todos los búhos de B son del mismo color. Lo haremos por inducción sobre n.

a) Si $n = 1$ sólo hay un búho, luego todos son del mismo color (podíamos incluso haber empezado con $n = 0$, ningún búho, de modo que también son todos del mismo color, pero no es el caso más interesante).

b) Supongámoslo cierto para conjuntos de n búhos, y sea $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$ un conjunto con $n+1$ búhos. Por la hipótesis de inducción, los n búhos del conjunto $B' = \{b_1, \ldots, b_n\}$ tienen el mismo color, y lo mismo sucede con los n búhos del conjunto $B'' = \{b_2, \ldots, b_{n+1}\}$. Como b_n está en B' y en B'', todos los búhos de B tienen el mismo color que b_n, y por tanto son todos del mismo color.

Como todos hemos visto búhos de al menos dos colores, ¿dónde está el fallo de esta "demostración"?

4) La mayor toca el piano. Pedro y Sixto se encuentran en la calle tras muchos años sin verse.

- ¿Cuántos hijos tienes? - le pregunta Pedro a Sixto.

- Tengo tres hijas, el producto de sus edades es 36 y la suma el número de tu portal.

- Me falta algún dato para adivinar las edades - replica Pedro.

- Es cierto - responde Sixto -, te diré entonces que la mayor toca muy bien el piano.

¿Qué edades tenían las hijas de Sixto?

5) El cura y el sacristán. Un cura le dice a un sacristán que se ha encontrado con tres forasteros y le da un par de pistas para calcular sus edades:

a) La suma de sus edades es el doble de la tuya.

b) El producto de sus edades es 2450.

El sacristán, después de tirarse toda la noche sin dormir, le dice al cura que casi lo tiene, pero que necesita alguna pista más, lo cual reconoce el cura que le da la última pista:

c) Yo soy mayor que los tres forasteros.

¿Cuál es la edad del cura?

6) El metro. A mi abuelo le encanta ver pasar el metro, así que se baja a diario a la estación de Sol. Ha observado que los trenes de la línea 1 (de Valdecarros a Pinar de Chamartín) pasan cada 2 minutos, los de la línea 2 (de Cuatro Caminos a La Elipa) cada 3 y los de la línea 3 (de Moncloa a Villaverde Alto) cada 4.

a) Hace un minuto en cada andén había un tren, ¿cuándo volverán a coincidir?

b) He bajado a buscar a mi abuelo y me ha dicho que le espere hasta que haya un tren en cada andén. El de la línea 1 pasó hace un minuto, el de la línea 2 está en el andén y el de la línea 3 pasará dentro de un minuto. ¿Cuánto me va a hacer esperar mi abuelo?

c) El metro que me ha traído hasta Sol desde Moncloa ha llegado a la estación exactamente a las 20:00 y en ese momento estaban todos los metros en sus andenes. A partir de las 12 las frecuencias de los metros pasan a ser de uno cada 13 minutos en la línea 1 y de uno cada 16 minutos en la línea 2. Son las 12 de la noche y quiero ir desde Tirso de Molina hasta Retiro (cogiendo primero la línea 1 y haciendo transbordo a la 2 en Sol). En Sol tardo 2 minutos en hacer el transbordo y me da miedo esperar en el andén. Además el metro desde Tirso de Molina hasta Sol tarda exactamente 5 minutos ¿A qué hora tengo que llegar al andén de Tirso de Molina para coger el metro y no tener que esperar en ningún andén?

7) Un producto. Simplifica el producto

$$(3^{2^0}+1)(3^{2^1}+1)(3^{2^2}+1)\dots(3^{2^n}+1).$$

8) El hotel infinito. El matemático alemán David Hilbert[1] inventó la idea de un hotel infinito para tratar de explicar de una manera sencilla las "paradojas" relacionadas con el infinito descubiertas por el también matemático alemán Georg Cantor.

Imaginemos que existe un hotel con infinitas habitaciones numeradas 1, 2, 3, 4... Todos los clientes del hotel tienen que cambiar de habitación cada vez que se les solicite.

a) Un día, estando ocupadas todas las habitaciones llega un hombre al hotel. A pesar de no disponer de habitaciones, el gerente consigue darle alojamiento ¿Cómo puede hacerlo?

[1]Hilbert llegó a decir: "*Ningún pensamiento como el del infinito ha turbado tan profundamente el espíritu humano, ni ninguna otra idea ha estimulado tan intensamente su intelecto*".

b) Al día siguiente se presentan 10 personas en el hotel ¿Puede el hotel recibirlos?

c) Ese fin de semana llega una excursión de infinitos turistas ¿Cómo dar habitación a un número infinito de huéspedes?

d) Por último, la semana siguiente llegan un número infinito de excursiones con un número infinito de turistas cada una ¿Se puede hospedar a un número infinito de infinitos turistas?

9) El ubicuo número 9. Durante el pasado Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) celebrado en Madrid en 2006, se comentó la siguiente curiosísima coincidencia. Consideramos las fechas de nacimiento de cada uno de los cuatro galardonados con la medalla Fields (Andrei Okounkov, 26 de julio de 1969; Grigori Perelman, 13 de junio de 1966; Terence Tao, 17 de julio de 1975; Wendelin Werner, 23 de septiembre de 1968). Escribimos todos los dígitos de cada fecha juntos, formando un número (por ejemplo, 2671969 para el primero) y después los reordenamos en cualquier otro orden (por ejemplo, 1299766). Ahora restamos el menor número del mayor y sumamos todas las cifras de la diferencia (en el ejemplo, $2671969 - 1299766 = 1372203$, $1 + 3 + 7 + 2 + 2 + 0 + 3 = 18$). De nuevo, sumamos todas las cifras del resultado y continuamos así hasta lograr un número de una sola cifra (en el ejemplo, $1 + 8 = 9$). Pues bien, sin importar cuál de los 4 matemáticos escojamos ni cómo reordenemos las cifras, siempre llegamos al número 9. Alguien comentó que un famoso matemático del siglo XVIII nació en una fecha con la misma propiedad. ¿Estaba en lo cierto o se equivocaba? ¿Has probado con tu fecha de nacimiento?

10) El criptaritmo de jamón. En el siguiente criptaritmo, cada letra representa una cifra decimal (distinta para letras distintas).

$$7(\text{FRY HAM}) = 6(\text{HAM FRY}).$$

Determina todas estas letras.