Teoría de la Integral y de la Medida. 3^{er} **curso de Matemáticas. U.A.M.** **7/09/2006**

Apellidos ______________________ Nombre ____________ DNI __________ Grupo _

NO OLVIDES PONER TU NOMBRE EN LA HOJA DE ENUNCIADOS; DÉJALA VISIBLE SOBRE LA MESA, JUNTO CON TU D.N.I. Y ENTRÉGALA AL FINAL **TIEMPO: 3 horas.**

1.– Para cada una de las siguientes afirmaciones, demostrarla en caso de que sea cierta o, en caso contrario, dar un contraejemplo que demuestre que es falsa.

(a) Si las funciones $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ son medibles de Lebesgue y para todo $t \in [0,1]$ se cumple que $\lim_{k\to\infty} f_k(t) = 0$ y además sabemos que existe $\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k(t)dm(t)$, donde m denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, entonces se cumple que $\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k(t)dm(t) = 0$.

(b) Si f no es medible, entonces $|f|$ tampoco es medible.

(c) Si $A, B \subset \mathbb{R}$ son tales que su producto cartesiano $A \times B$ es medible de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ y B es medible de Lebesgue en $\mathbb{R}$, entonces A es medible de Lebesgue en $\mathbb{R}$. ¿Cambia algo si se supone que B tiene medida de Lebesgue positiva?

2.– Calcular, razonadamente

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n^n}{(n+x)^n x^{1/n}}\, dx.$$

Observación: Puede ser útil tener en cuenta que, para todo $x > 0$, la sucesión $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge de forma monótona creciente a e^x para $n \to \infty$.

3.– Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida que no contiene átomos (un átomo es un conjunto $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) > 0$ y tal que para todo $B \subset A$ con $B \in \mathcal{M}$, se cumple que $\mu(B) = 0$ ó $\mu(B) = \mu(A)$). Sea $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) > 0$. Demostrar que

$$\sup\{\mu(B) \ : \ B \subset A, \mu(B) < \mu(A)\} = \mu(A).$$

4.– Sea

$$f(x,y) = \frac{x^5 y^5 \operatorname{sen}(y^4)}{(x^6 + y^6)^{4/3}}$$

para $0 < x < \infty$, $0 < y < \pi^{1/4}$.
Demostrar que f es integrable en $]0, +\infty[\times]0, \pi^{1/4}[$ y calcular su integral.

				=	
1	**2**	**3**	**4**		**Total**