Teoría de la Integral y de la Medida. 3^{er} **curso de C.C. Matemáticas. U.A.M.** **12/09/2001**

Apellidos ______________________ Nombre ______________ DNI ____________ Grupo ______

INSTRUCCIONES: POR FAVOR, NO OLVIDES PONER TU NOMBRE EN LA HOJA DE ENUNCIADOS; DÉJALA VISIBLE SOBRE LA MESA, JUNTO CON UN DOCUMENTO DE IDENTIDAD.

TIEMPO: 3 horas.

1.– Contestar a los siguientes apartados:

a.– Sea μ una medida sobre el espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Demostrar que para toda colección numerable de conjuntos $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

b.– Sea ν^* una medida exterior en X tal que para todo par de subconjuntos $A,\ B \subset X$ con $A \cap B = \emptyset$ se cumple que $\nu^*(A \cup B) = \nu^*(A) + \nu^*(B)$. Probar que ν^* es una medida sobre $(X, \mathcal{P}(X))$. (*Sugerencia:* Sólo hace falta utilizar, junto con la condición dada para ν^*, la definición de medida exterior)

2.– Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un expacio de medida y sea $f : X \longrightarrow [0,1]$ una función integrable. Consideramos $E = \{x \in X : f(x) = 1\}$. Demostrar que $\mu(E) < \infty$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f(x))^n \, d\mu(x) = \mu(E).$$

Explicar con claridad los teoremas utilizados.

3.– Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = M < \infty$.
Si $X = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \geq 0\}$, sea ν la medida de contar en $\mathcal{P}(X)$. Consideramos el espacio de medida producto $(X \times X, \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X), \nu \times \nu)$. Definimos la función $f : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula $f(m,n) = a_n 2^{-|n-m|}$.

a.– Demostrar que f es integrable.

b.– Demostrar que la integral de f vale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(3 - 2^{-n})$

Explicar con claridad qué teoremas se han utilizado.

4.–Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sea ν otra medida sobre $(X, \mathcal{M})$.

a.– Demostrar que si $\nu \perp \mu$ y $\nu << \mu$, entonces $\nu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$.

b.– Sea $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de medidas sobre $(X, \mathcal{M})$ tal que $\lambda_n << \mu$ para todo n. Se define $\lambda(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(A)$. Probar que λ es una medida sobre $(X, \mathcal{M})$ y que $\lambda << \mu$.

c.– Sea δ la medida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ definida por

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{si } 0 \notin A \end{cases}$$

Describir todas las medidas λ tales que $\lambda \perp \delta$ y todas las medida ν tales que $\nu << \delta$.
