Teoría de la Integral y de la Medida. 3^{er} **curso de Matemáticas. U.A.M. 27/01/2006**

Apellidos ______________________ Nombre ______________ DNI ____________ Grupo __

NO OLVIDES PONER TU NOMBRE EN LA HOJA DE ENUNCIADOS; DÉJALA VISIBLE SOBRE LA MESA, JUNTO CON TU D.N.I. Y ENTRÉGALA AL FINAL **TIEMPO: 3 horas.**

1.– Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible. Demostrar, justificando apropiadamente todos los pasos, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \left\{ 1 - \left(\frac{2}{e^{f(x)} + e^{-f(x)}} \right)^n \right\} d\mu = \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$$

2.– Para $x \in [0, +\infty[$ e $y \in [0, \sqrt{\pi}\,]$ definimos

$$f(x,y) = \frac{x^3 y^3 \cos(y^2)}{(x^4 + y^4)^{3/2}}$$

Demostrar, identificando de forma precisa los teoremas utilizados, que f es integrable sobre $[0, +\infty[\times [0, \sqrt{\pi}\,]$ con la medida de Lebesgue en el plano y calcular, razonadamente, su integral.

3.– Se consideran dos funciones de conjunto φ y ψ definidas sobre cada $A \subset \mathbb{R}^n$ de la forma siguiente:

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } A \text{ es no numerable y acotado} \\ \infty & \text{si } A \text{ es no numerable y no acotado.} \end{cases}$$

$$\psi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } A \text{ es no numerable y existe } B \text{ numerable} \subset A \text{ tal que } A \setminus B \text{ es acotado} \\ \infty & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

(a) Estudiar si alguna de las funciones φ ó ψ es una medida exterior.

(b) En caso de que alguna de las funciones φ ó ψ sea una medida exterior, encontrar la σ–álgebra de los conjuntos medibles que determina y ver cuál es la medida que les asigna.

4.– Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : X \to [0, +\infty[$ una función medible e integrable. Definimos, para cada $t > 0$, $E_t = \{x \in X : f(x) > t\}$.

(a) Demostrar que para cada $t > 0$, E_t es un conjunto medible de medida finita.

(b) Si ponemos $F(t) = \mu(E_t)$, demostrar que F es una función decreciente continua por la derecha en $]0, +\infty[$. ¿Es F siempre continua? ¿Cómo es el conjunto de puntos de discontinuidad de F?

(c) Demostrar que $\int_0^\infty F(t)dt$ existe como integral (impropia) de Riemann y que

$$\int_0^\infty F(t)dt = \int_X f(x)d\mu(x).$$

Sugerencia: Se pueden usar funciones simples o el teorema de Fubini; pero siempre hay que justificar completamente los procedimientos.