Teoría de la Integral y de la Medida. 3^{er} **curso de C.C. Matemáticas. U.A.M.** **05/02/2001**

Apellidos ______________________ Nombre ____________ DNI __________ Grupo ______

INSTRUCCIONES: POR FAVOR, NO OLVIDES PONER TU NOMBRE EN LA HOJA DE ENUNCIADOS; DÉJALA VISIBLE SOBRE LA MESA, JUNTO CON UN DOCUMENTO DE IDENTIDAD. **TIEMPO: 3 horas.**

1.– Calcular, razonadamente,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

(Sugerencia: la acotación del integrando se puede conseguir quedándose con unos pocos términos del desarrollo de $(1+x/n)^n$ como binomio de Newton.)

2.– Para $t>0$, definimos

$$F(t)=\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

a.– Obtener que

$$F'(t)=-\frac{1}{1+t^2}\ ,$$

explicando con claridad por qué es legítimo derivar bajo el signo integral.

b.– Demostrar que $F(t)\longrightarrow 0$ para $t\longrightarrow\infty$.

c.– Utilizar **a.**– y **b.**– para calcular $F(t)$.

3.– Sea $(X;\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida σ-finito.

a.– Definir con precisión qué quiere decir que la aplicación $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ sea $\mathcal{M}$-medible.

b.– Demostrar que si f y g son dos aplicaciones $\mathcal{M}$-medibles de X en $\mathbb{R}$ y definimos

$$E=\{x\in X\ :\ f(x)\le g(x)\},$$

entonces $E\in\mathcal{M}$.

c.– Si $g:X\longrightarrow\mathbb{R}$ es $\mathcal{M}$-medible y $g(x)>0$ para todo $x\in X$, consideramos

$$S=\{(x,t)\in X\times\mathbb{R}\ :\ 0<t<g(x)\}.$$

Demostrar que $S\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$.

d.– Demostrar, enunciando con precisión los resultados utilizados, que, siendo S como en el apartado anterior y siendo m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, se tiene que

$$(\mu\times m)(S)=\int_X g(x)\,d\mu(x).$$

4.– Sea $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$. Si m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, consideramos la medida de Borel μ en $\mathbb{R}^n$ definida por $\mu(E)=m(\phi^{-1}(E))$ para todo $E\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Demostrar que μ es absolutamente continua con respecto a m y que su derivada de Radon–Nikodym con respecto a m es

$$\frac{d\mu}{dm}(x)=\frac{1}{|det\ D_{\phi^{-1}(x)}\phi|}.$$
