1.- Sean ν y μ medidas con signo.

(a) Comprobar que un conjunto E es ν-nulo si y sólo si $|\nu|(E) = 0$.

(b) Comprobar que $\nu \perp \mu$ si y sólo si $|\nu| \perp \mu$ si y sólo si $\nu^+ \perp \mu$ y $\nu^- \perp \mu$.

2.- Supongamos que $\nu(E) = \int_E f d\mu$, donde μ es una medida positiva y f es una función $\mu-$integrable en sentido amplio. Describir la descomposición de Hahn de ν y las variaciones (positiva, negativa y total) de ν en términos de f y μ.

3.- Sea ν una medida con signo tal que $\nu = \nu_1 - \nu_2$, siendo ν_1 y ν_2 medidas positivas.

(a) Comprobar que $\nu^+ \leq \nu_1, \quad \nu^- \leq \nu_2$, de forma que puede afirmarse que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ es la expresión más económica de ν como diferencia de dos medidas positivas.

(b) Comprobar que $|\nu| \leq \nu_1 + \nu_2$, y que la igualdad se cumple si y sólo si $\nu_1 = \nu^+$ y $\nu_2 = \nu^-$.

4.- Sean $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ν la medida de contar en $\mathbb{N}$, $\mu(E) = \sum_{n \in E} \frac{1}{2^n}$. Comprobar que $\nu \ll \mu$ y, sin embargo, no se cumple que dado $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \epsilon, \quad E \in \mathcal{M}$.

5.- Sean $X = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, m la medida de Lebesgue en $\mathcal{M}$ y μ la medida de contar en $\mathcal{M}$.

(a) $m \ll \mu$ pero $dm \neq f d\mu$ para toda f.

(b) μ no tiene descomposición de Lebesgue respecto de m.

6.- Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Supongamos que $\mathcal{N}$ es una sub-$\sigma-$álgebra de $\mathcal{M}$ y sea ν la restricción de μ a $\mathcal{N}$, que suponemos que es $\sigma-$finita. Si $f \in L^1(\mu)$, demostrar que existe g $\mathcal{N}$-medible, $g \in L^1(\nu)$, tal que $\int_E f d\mu = \int_E g d\nu$ para todo $E \in \mathcal{N}$, además g es única módulo alteraciones en conjuntos ν-nulos. A la función g se le llama en Teoría de la Probabilidad, esperanza condicionada de f con respecto $\mathcal{N}$. Se la suele denotar por $E(f|\mathcal{N})$.

7.- Sea ν una medida con signo en el espacio medible $(X, \mathcal{M})$ y sea $E \in \mathcal{M}$. Probar que

$$\nu^+(E) = \sup\{\nu(F),\ F \in \mathcal{M},\ F \subset E\},$$

$$\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F),\ F \in \mathcal{M},\ F \subset E\} \text{ y}$$

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)|,\ E_j \text{ disjuntos},\ E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j\right\}$$

.

⇝ *dorso*

8.- Sea ν una medida compleja en el espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Para cada $E \in \mathcal{M}$ definimos

$$\mu_1(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)|,\ E_j \text{ disjuntos},\ E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \right\},$$

$$\mu_2(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)|,\ E_j \text{ disjuntos},\ E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\} \text{ y}$$

$$\mu_3(E) = \sup \left\{ \left| \int_E f d\mu \right| \ :\ |f| \leq 1 \right\}.$$

Comprobar que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

9.- Sean $F(x) = x^2 \text{sen}(x^{-1})$ y $G(x) = x^2 \text{sen}(x^{-2})$ para $x \neq 0$ y $F(0) = G(0) = 0$. Ver que

(a) F y G son diferenciables en todo punto, incluyendo el 0.

(b) F es de variación acotada en $[-1, 1]$, pero G no es de variación acotada en $[-1, 1]$.

10.- Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Demostrar que las dos propiedades siguientes son equivalentes:

(a) Existe una constante M, tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$ (Se dice que F es Lipschitz con constante M.)

(b) F es absolutamente continua y $|F'(x)| \leq M$ para casi todo x.

11.- Supongamos que $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones crecientes ≥ 0 en $[a, b]$, tales que $F(x) = \sum_{1}^{\infty} F_j(x) < \infty$ para todo $x \in [a, b]$. Demostrar que $F'(x) = \sum_{1}^{\infty} F_j'(x)$ para casi todo $x \in [a, b]$.
