1.- Sea μ la medida de contar sobre $\mathbb{R}$. Para un conjunto fijado $A \subset \mathbb{R}$, definimos $\nu(B) = \mu(B \cap A)$ para todo $B \subset \mathbb{R}$.
a) Si $A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, ¿es ν una medida de Lebesgue-Stieltjes? En caso afirmativo hallar su función de distribución .
b) Si $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, contestar a la misma pregunta del apartado anterior.

2.- Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1) \\ 1 + x & \text{si} \quad x \in [-1, 0) \\ 2 + x^2 & \text{si} \quad x \in [0, 2) \\ 9 & \text{si} \quad x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Si μ_F es la medida de Lebesgue-Stieltjes correspondiente a F, hallar la medida μ_F de los siguientes conjuntos: $\{2\}$, $[-1/2, 3)$, $(-1, 0] \cup (1, 2)$, $[0, 1/2) \cup (1, 2]$, $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

3.- Sean $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ (álgebra de los conjuntos de Borel de [0,1]), μ la medida de Lebesgue en $\mathcal{M}$, ν la medida contadora en $\mathcal{N}$. En el espacio de medida $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ se considera el conjunto $D = \{(x, y) \in X \times Y : x = y\}$. Comprobar que

$$D \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \qquad \int_Y \int_X \chi_D(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = 0; \qquad \int_X \int_Y \chi_D(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = 1;$$

$$\text{y, por otra parte} \qquad \int_{X \times Y} \chi_D(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \infty.$$

¿Por qué no se cumple el Teorema de Fubini-Tonelli?

4.- Sean $X = Y = \mathbf{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ y μ, ν las medidas de contar en $\mathbf{N}$. Probar que $d(\mu \times \nu)$ es la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$. Si definimos

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si} & m = n \\ -1 & \text{si} & m = n + 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} & \end{cases}$$

comprobar que $\int | f | \, d(\mu \times \nu) = \infty$, y $\int (\int f d\mu) d\nu$, $\int (\int f d\nu) d\mu$ existen y son distintas.

5.- Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $\mathcal{M}-$ medible; $g : Y \to \mathbb{R}$, $\mathcal{N}-$medible y h definida mediante $h(x, y) = f(x)g(y)$.

(a) Demostrar que h es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ medible
(b) Si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$ entonces $h \in L^1(\mu \times \nu)$ y además

$$\int h d(\mu \times \nu) = \left(\int f d\mu \right) \left(\int g d\nu \right)$$

Sugerencia: empezar con funciones simples.

$\rightsquigarrow$ (*dorso*)

6.- Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{M}$-medible , $f \geq 0$, y sea $A_f = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.

(a) Probar que $A_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra de Borel. *Sugerencia: empezar con f simple.*

(b) Dada una medida μ en $(X, \mathcal{M})$ σ-finita, probar que $\int_X f \, d\mu$ coincide con la medida producto $\pi = \mu \times m$ del conjunto A_f, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

7.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Comprobar que

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \frac{\pi}{4} \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = -\frac{\pi}{4}$$

¿Por qué no vale el Teorema de Fubini?

8.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en $[-1, 1] \times [-1, 1]$. ¿Por qué no vale el Teorema de Fubini?.

9.- Integrando $e^{-y} \sin 2xy$ con respecto a x e y calcular que

$$\int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin^2 y}{y} dy = \frac{1}{4} \log 5$$

Sugerencia: Comprobar en primer lugar que $e^{-y} \sin 2xy$ es integrable en $A = [0, 1] \times [0, \infty)$. Luego aplicar Fubini comprobando que

$$\int_0^1 e^{-y} \sin 2xy dx = \frac{e^{-y}}{y} \sin^2 y \int_0^\infty e^{-y} \sin 2xy dy = \frac{2x}{1 + 4x^2}.$$

10.- Denotamos por $I_k, k = 1, 2, ...$ el intervalo $]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ y sea $g_k(x) = k(k+1)\chi_{I_k}(x)$. Definimos $f :]0, 1] \times]0, 1] \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) g_k(y)$$

Probar que f es medible y que las integrales iteradas $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ y $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$ existen y son distintas. Explicar por qué esto no contradice el Teorema de Fubini.
