Hoja 6 *Integración, construcción de medidas.* PARA ENTREGAR EL 13 DE DICIEMBRE DE 2006

1.- Demostrar que para que el espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sea $\sigma-$finito, es necesario y suficiente que exista $f \in L^1(\mu)$ tal que, para todo $x \in X$, $0 < f(x) < \infty$.

2.- Sea $f \in L^1(\mu)$ con μ $\sigma-$finita. Sea S un conjunto cerrado del plano complejo. Supongamos que $\forall E \in \mathcal{M}$ tal que $0 < \mu(E) < \infty$, $\dfrac{1}{\mu(E)} \displaystyle\int_E f d\mu \in S$. Demostrar que, entonces $f(x) \in S$ para casi todo $x \in X$ con respecto a μ.

3.- Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ un anillo que genera la $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}$, es decir, tal que $\mathcal{M}$ es la mínima $\sigma-$álgebra que contiene a $\mathcal{A}$. Supongamos además, que X es $\sigma-$finito con respecto a $\mathcal{A}$, es decir, que $X = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ donde cada $A_j \in \mathcal{A}$ y tiene $\mu(A_j) < \infty$.

(a) Demostrar que, para todo $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \infty$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \infty$ y $\mu(E \Delta A) < \varepsilon$.

(b) Diremos que una función medible es "realmente simple"si es una combinación lineal finita de funciones características de conjuntos de $\mathcal{A}$. Ver que para toda $f \in L^1(\mu)$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe una función "realmente simple"s, tal que $\displaystyle\int_X |f(x) - s(x)| d\mu(x) < \varepsilon$.

(c) Explicar qué implican estos resultados para el caso en que $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ es el anillo de las uniones finitas de intervalos. ¿Se extienden, en este caso, las propiedades (a) y (b) a conjuntos o funciones medibles de Lebesgue?

4.- Sea X un conjunto infinito no numerable. Para cada $S \subset X$ se definen:

$$\mu^\star(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } S \text{ es no numerable} \end{cases} \qquad \nu^\star(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S \text{ es numerable} \\ +\infty & \text{si } S \text{ es no numerable} \end{cases}$$

Demostrar que $\mu^\star$ y $\nu^\star$ son medidas exteriores y encontrar los conjuntos medibles de cada una de ellas.

5.- Se consideran dos funciones de conjunto φ y ψ definidas sobre cada $A \subset \mathbb{R}^n$ de la forma siguiente:

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } A \text{ es no numerable y acotado} \\ \infty & \text{si } A \text{ es no numerable y no acotado.} \end{cases}$$

$$\psi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } A \text{ es no numerable y existe } B \text{ numerable} \subset A \text{ tal que } A \setminus B \text{ es acotado} \\ \infty & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

(a) Estudiar si alguna de las funciones φ ó ψ es una medida exterior.

(b) En caso de que alguna de las funciones φ ó ψ sea una medida exterior, encontrar la $\sigma-$álgebra de los conjuntos medibles que determina y ver cuál es la medida que les asigna.

⇝*dorso*

6.- Sea $\mu^\star$ una medida exterior en X y sea $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ una sucesión de conjuntos $\mu^\star-$medibles, disjuntos dos a dos. Demostrar que, para todo $E \subset X$,

$$\mu^\star\left(E \cap \left(\cup_{j=1}^\infty A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu^\star(E \cap A_j).$$

7.- Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra. Llamamos $\mathcal{A}_\sigma$ a la colección de las uniones numerables de conjuntos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ a la colección de las intersecciones numerables de conjuntos de $\mathcal{A}_\sigma$. Sea μ_0 una medida en $\mathcal{A}$ y $\mu^\star$ la medida exterior inducida por μ_0.

(a) Demostrar que, para cada $E \subset X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ y $\mu^\star(A) \leq \mu^\star(E) + \varepsilon$.

(b) Si $\mu^\star(E) < \infty$, entonces E es $\mu^\star-$medible si y sólo si existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset B$ y $\mu^\star(B \setminus E) = 0$.

(c) Ver que si μ_0 es $\sigma-$finita, entonces la restricción $\mu^\star(E) < \infty$ del apartado (b) es superflua.

8.- Sea $\mu^\star$ la medida exterior en X inducida por la medida finita μ_0 definida en el álgebra $\mathcal{A}$. Si $E \subset X$, se define la medida interior de E como $\mu_\star(E) = \mu_0(X) - \mu^\star(\complement E)$. Demostrar que, para que E sea $\mu^\star-$medible, es necesario y suficiente, que $\mu^\star(E) = \mu_\star(E)$. (Se puede aplicar el problema anterior)

9.- Sea μ una medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a cierta función creciente continua por la derecha. Tenemos, entonces, el espacio de medida completo $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\mu, \mu)$. Demostrar que para todo $E \in \mathcal{M}_\mu$,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \ : \ U \supset E \text{ y } U \text{ es abierto }\} = \sup\{\mu(K) \ : \ K \subset E \text{ y } K \text{ es compacto }\}$$

10.- En la situación del ejercicio anterior, demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $E \in \mathcal{M}_\mu$,

(b) $E = V \setminus N_1$ donde V es un G_δ y $\mu(N_1) = 0$,

(c) $E = H \cup N_2$, donde H es un F_σ y $\mu(N_2) = 0$.