1.- Ver que el lema de Fatou sigue siendo cierto si se reemplaza la hipótesis $f_n \geq 0$ por $f_n \geq -g$ para alguna función integrable $g \geq 0$. ¿Cuál es el análogo del lema de Fatou para funciones $f_n \leq 0$?

2.- Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $f_n \in L^1(\mu)$, y que $f_n \to f$ uniformemente. Demostrar que

(a) Si $\mu(X) < \infty$, entonces $f \in L^1(\mu)$ y $\displaystyle\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$.

(b) Si $\mu(X) = \infty$, las conclusiones de (a) pueden fallar. (Buscar ejemplos en $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue)

3.- (*Generalización del Teorema de Convergencia Dominada*) Probar que si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $f_n, g_n \in L^1(\mu)$, y sabemos que

1. $f_n \to f$ y $g_n \to g$ en casi todo punto respecto a μ, con $f, g \in L^1(\mu)$,
2. $|f_n| \leq g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y
3. $\displaystyle\int_X g_n d\mu \to \int_X g d\mu$, entonces

$\displaystyle\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$. (*Sugerencia: Rehacer la prueba del Teorema de Convergencia Dominada*)

4.- Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $f_n \in L^1(\mu)$, y que $f_n \to f$ en casi todo punto con respecto a μ, siendo $f \in L^1(\mu)$. Demostrar que

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0 \Leftrightarrow \int_X |f_n| d\mu \to \int_X |f| d\mu$$

5.- Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) < \infty$ y sea $(X, \widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu})$ su completación. Supongamos que $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada. Demostrar que para que f sea $\widetilde{\mathcal{M}}-$medible es necesario y suficiente que existan sucesiones $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples $\mathcal{M}-$medibles tales que

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \qquad \text{y} \qquad \int_X (\psi_n - \varphi_n) d\mu < \frac{1}{n}.$$

Además, cuando esto sucede, $\displaystyle\lim \int_X \varphi_n d\mu = \lim \int_X \psi_n d\mu = \int_X f d\widetilde{\mu}$.

6.- Calcular

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} (1 + (x/n))^{-n} \operatorname{sen}(x/n) dx.$$

7.- Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}dx.$$

8.- Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n\,\mathrm{sen}(x/n)[x(1+x^2)]^{-1}dx.$$

9.- Usando un cambio de variable, calcular

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty n(1+n^2x^2)^{-1}dx$$

para un número real fijo a. La respuesta depende de si $a>0$, $a=0$ o $a<0$. Decir, en cada caso, si hay igualdad entre el límite de las integrales y la integral del límite y, en caso afirmativo, si podría deducirse dicha igualdad de alguno de los teoremas de convergencia y cómo podría hacerse.

10.- (a) Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$ derivando la identidad $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}dx = \frac{1}{t}$.

(b) Análogamente, demostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ derivando $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-tx^2} = \sqrt{\pi/t}$.

11.- Demostrar que $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_0^k x^n\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx = n!$