1.- Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Ver que para que sea completo, es necesario y suficiente que se cumpla la siguiente propiedad: Si f es una función $\mathcal{M}-$medible y g coincide con f en casi todo punto con respecto a μ, entonces g es $\mathcal{M}-$medible.

2.- Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Ver que para que sea completo, es necesario y suficiente que se cumpla la siguiente propiedad: Si $f_n, n \in \mathbb{N}$ son funciones $\mathcal{M}-$medibles y $f_n(x) \to f(x)$ en casi todo x respecto a μ, entonces f es $\mathcal{M}-$medible.

3.- Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(X, \widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu})$ su completado. Probar que si f es una función $\widetilde{\mathcal{M}}-$medible, entonces existe una función $\mathcal{M}-$medible g, que coincide con f en casi todo punto respecto a $\widetilde{\mu}$.

4.- Sea $f : [\,0,1\,] \to [\,0,+\infty\,]$ definida mediante $f(x) = 0$, si x es racional, $f(x) = n$, si n es el número de ceros inmediatamente después de la coma en la representación de x en el sistema decimal. Demostrar que f es Borel medible y calcular $\displaystyle\int f dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

5.- Sea $f(x) = 0$ en cada punto del conjunto ternario de Cantor en $[\,0,1\,]$ y $f(x) = p$ en cada intervalo del complementario de longitud $\dfrac{1}{3^p}$. Demostrar que f es medible y calcular $\displaystyle\int f dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

6.- Sea f la función definida en $]\,0,1\,[$ mediante $f(x) = 0$, si x es racional, $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ si x es irracional, donde $\left[\dfrac{1}{x}\right]$ es la parte entera de $\dfrac{1}{x}$. Calcular $\displaystyle\int f dm$ siendo m la medida de Lebesgue.

7.- Llamemos $d_i(x)$ a los dígitos del desarrollo decimal $0.d_1d_2...$ de un $x \in]\,0,1\,[$. Decir por qué son convergentes las siguientes series:

$$f(x) = \sum_i d_i(x)/2^i \quad g(x) = \sum_i (-1)^{d_i(x)}/2^i,$$

y hallar $\displaystyle\int_0^1 f$, $\displaystyle\int_0^1 g$, expresándolas como sumas de series. ¿Por qué son válidas esas expresiones?

8.- Sea $f_{2n-1} = \chi_{[0,1]} \quad f_{2n} = \chi_{[1,2]}$ $n = 1, 2, \ldots$. Comprobar que se verifica la desigualdad de Fatou estrictamente.

9.- Comprobar $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x} dm = \infty$, siendo m la medida de Lebesgue.
