1.- Sea $X = Y \biguplus Z$ una unión disjunta de dos conjuntos no vacíos Y y Z. Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Y y sea $\mathcal{B}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Z. Investigar si coinciden o no las siguientes colecciones de conjuntos

(a) La mínima $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. y

(b)
$$\{A \cup B \ : \ A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

2.- Sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos de X. Dado $E \subset X$, consideramos

$$\mathcal{A}_E = \{A \cap E \ : \ A \in \mathcal{A}\}.$$

Se pide:

(1) Demostrar que $\mathcal{A}_E$ es un anillo de subconjuntos de E.

(2) Encontrar una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{A}_E$ sea un álgebra de subconjuntos de E.

(3) Ver que si $\mathcal{M}$ es la $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{A}$ en X, entonces para todo $E \subset X$, $\mathcal{M}_E$ es la $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{A}_E$ en E.

3.- Sea $X = \mathbb{Q}$. Consideramos la colección $\mathcal{A}$ formada por las uniones finitas de intervalos acotados con extremos racionales. Se pide

(a) Demostrar que $\mathcal{A}$ es un anillo.

(b) Ver que para todo $E \in \mathcal{A}$ se puede definir sin ambigüedad su longitud $\mu(E)$.

(c) Demostrar que μ es una función de conjunto no-negativa y aditiva.

(d) Ver que, sin embargo, μ no es completamente aditiva.

4.- Sea $\mathcal{M}$ la $\sigma-$ álgebra formada por $\{\,\emptyset, \mathbb{R},]-\infty, 0\,],]\,0, \infty\,[\,\}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0\,] \\ 1, & \text{si} \quad x \in]\,0, 1\,] \\ 2, & \text{si} \quad x \in]\,1, \infty\,[\end{cases}$$

¿Es f medible? ¿Cómo son en general las funciones medibles $f : (\mathbb{R}, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$?

5.- Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R} \ : \ \text{Card}(E) \leq \aleph_0 \text{ ó } \text{Card}(\complement E) \leq \aleph_0\}$. Demostrar que toda función $\mathcal{M}-$medible coincide con una constante en el complemento de algún conjunto numerable.

6.- Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Para funciones reales definidas en X, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? a) $|\ f\ |$ $\mathcal{M}-$medible $\Rightarrow f$ $\mathcal{M}-$medible. b) $f_1 + f_2$ $\mathcal{M}-$medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 son $\mathcal{M}-$medibles. c) $f_1.f_2$ $\mathcal{M}-$medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 son $\mathcal{M}-$medibles d) $f_1 + f_2$ $\mathcal{M}-$medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 son $\mathcal{M}-$medibles e) $f_1 - f_2$ $\mathcal{M}-$medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 son $\mathcal{M}-$medibles.

$\rightsquigarrow$ *dorso*

7.- Sea $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ una función medible no-negativa, donde μ es una medida σ -finita en $\mathcal{M}$. Probar que $f(x) = \lim t_n(x)$ siendo $\{t_n\}_n$ una sucesión creciente de funciones simples no negativas, tales que t_n toma valores distintos de cero solamente en un conjunto de medida finita.

8.- Probar que si $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ verifica que $f^{-1}((r, \infty])$ es medible para todo $r \in \mathbb{Q}$, entonces f es medible. (El resultado es cierto en general si $r \in A$, con A denso en $\mathbb{R}$).

9.- Si $f_n : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $n = 1, 2, \ldots$, son medibles, probar que el conjunto

$$A = \{x \in X : \text{existe } \lim_{n \to \infty} f_n(x)\}$$

es un elemento de $\mathcal{M}$.