1.- Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Si $E, F \in \mathcal{M}$, comprobar que

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

2.- Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Para $E \in \mathcal{M}$ fijo, definimos $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_E es una medida sobre $\mathcal{M}$.

3.- Sea X un conjunto infinito numerable. Consideremos el álgebra

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \ : \ A \text{ es finito ó } \complement A \text{ es finito }\}.$$

Definimos para $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito,} \\ 1 & \text{si } \complement A \text{ es finito.} \end{cases}$$

(a) Probar que μ es finitamente aditiva, pero no numerablemente aditiva.

(b) Probar que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, para una sucesión creciente de conjuntos A_n, con $\mu(A_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

4.- Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Para $E_j \in \mathcal{M}, j \in \mathbb{N}$ se consideran los conjuntos

$$\liminf E_j = \bigcup_n \bigcap_{j>n} Ej; \ \ \limsup E_j = \bigcap_n \bigcup_{j>n} E_j$$

y en caso de que sea $\liminf E_j = \limsup E_j$, se dice que existe $\lim E_n = \liminf E_j = \limsup E_j$.

Probar que si $\mu(\bigcup_j Ej) < \infty$, se tiene:

$$\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) \qquad \text{y} \qquad \mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j).$$

En particular si $\mu(X) < \infty$, entonces:

(a) $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) \leq \limsup \mu(E_j) \leq \mu(\limsup E_j)$.

(b) Si existe $\lim E_j$, entonces $\mu(\lim E_j) = \lim \mu(E_j)$

5.- Sean $X = \{a_1, a_2, a_3\}$, y $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Sea μ una medida dada por $\mu(a_1) = \mu(a_2) = \mu(a_3) = \frac{1}{3}$. Consideremos la sucesión de conjuntos

$$A_n = \begin{cases} \{a_1, a_2\} & \text{si } n \text{ es par} \\ \{a_3\} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} .$$

Probar que

$$\mu(\liminf A_n) < \liminf \mu(A_n) < \limsup \mu(A_n) < \mu(\limsup A_n).$$

6.- Sean $X = \mathbb{N}, \mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, y μ la medida contadora. Construir una sucesión $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $\lim A_n = \emptyset$; pero $\lim \mu(A_n) \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ (*dorso*)

7.- Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ conjuntos medibles tales que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Demostrar que casi todo elemento x (respecto a μ) pertenece a un número finito de conjuntos A_n, o, en otras palabras, el conjunto de los puntos x que pertenecen a infinitos de los A_n, que no es otro que $\limsup A_n$, mide cero.

8.- Sea $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ un espacio de medida completo, es decir, tal que todos los subconjuntos de un conjunto medible de medida cero también son medibles. Sea $g : X_1 \to X_2$ una aplicación cualquiera. Definimos $\mathcal{M}_2 = \{A \subset X_2 : g^{-1}(A) \in \mathcal{M}_1\}$ y $\mu_2(A) = \mu_1(g^{-1}(A))$. Comprobar que $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ es un espacio de medida completo.