Hoja 1 *Integral de Riemann. Anillos, álgebras etc.* PARA ENTREGAR EL 18 DE OCTUBRE DE 2006

1.- Probar que para cada $a > 0$ hay abiertos B que son densos en $I = [0, 1]$ y que cumplen $|B| \leq a$. ¿Qué podemos afirmar si consideramos los complementos de estos conjuntos abiertos?

2.- Probar que si las funciones $f_n : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ son integrables Riemann y convergen uniformemente a cierta función f, entonces f es integrable Riemann y

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Dar ejemplos que demuestren que si el límite no es uniforme, f puede no ser integrable o, en caso de serlo, su integral puede no coincidir con el límite de las integrales de las funciones f_n.

3.- Ver que un anillo de conjuntos es realmente un anillo de los que se estudian en las asignaturas de Álgebra, con la diferencia simétrica jugando el papel de suma y la intersección el de producto. Y un álgebra de conjuntos ¿es un álgebra de las que se estudian en las asignaturas de Álgebra?(*Pensar antes que nada en cuál sería el cuerpo*)

4.- Sea $\mathcal{A}$ un $\sigma-$anillo de subconjuntos de X. Supongamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos $A_n \in \mathcal{A}$. Demostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

5.- (a) Ver que un anillo de conjuntos es $\sigma-$anillo si y sólo si es cerrado por uniones numerables disjuntas.

(b) Ver que un anillo de conjuntos es $\sigma-$anillo si y sólo si es cerrado por uniones numerables crecientes.

(c) Formular y demostrar criterios análogos para álgebras.

6.- Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra infinita.

(a) Ver que $\mathcal{A}$ contiene una sucesión infinita de conjuntos disjuntos no vacíos.

(b) Ver que $\mathcal{A}$ no es numerable, es decir, $\mathrm{card}(\mathcal{A}) > \aleph_0$.

7.- Sea $g : X \to Y$. Si $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra en X, probar que $\mathcal{B} = \{E \subset Y : g^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ es una $\sigma-$álgebra en Y.

8.- Sea $g : X \to Y$. Si $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra en Y, probar que $\mathcal{B} = \{g^{-1}(E) : E \in \mathcal{A}\}$ es una $\sigma-$álgebra en X.

9.- Determinar la $\sigma-$álgebra engendrada por la colección de los subconjuntos finitos de un conjunto X infinito no numerable.

10.- Probar que la unión de una sucesión creciente de álgebras $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset ...$ es un álgebra. Dar ejemplos de que, sin embargo, la unión de dos álgebras puede no ser un álgebra, y la unión de una sucesión creciente de $\sigma-$álgebras $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset ...$ puede no ser una $\sigma-$álgebra.
