Hoja 6 Para entregar hasta el 23 de mayo de 2007

1.- Sea un dado tal que la probabilidad de las distintas caras es proporcional al número de puntos inscritos en ellas. Hallar la probabilidad de obtener una puntuación par al tirar este dado.

2.- Un examen consta de 14 temas. Se debe escoger un tema entre dos elegidos al azar. Calcular la probabilidad de que a un alumno que ha preparado 5 temas, le toque, al menos, uno que sabe. ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para tener una probabilidad superior a 1/2 de aprobar el examen?

3.- Se hacen tres disparos simultáneos con tres cañones distintos, siendo la probabilidad de alcanzar el objetivo $0,1,\ \ 0,2\ $ y $0,3$ respectivamente. Calcular la probabilidad para cada uno de los números posibles de blancos. Calcular la probabilidad de hacer, al menos, un blanco.

4.- Un jurado compuesto por tres personas tiene dos miembros que toman la decisión correcta, cada uno de ellos, con probabilidad p. El tercer miembro lanza una moneda al aire cada vez que tiene que tomar una decisión. Las decisiones se toman por mayoría. Debido al curioso comportamiento del tercer miembro, se decide formar otro jurado que, puesto que debe estar formado por un número impar de miembros, consta sólo de uno cualquiera de los otros dos componentes. ¿Es justificable este modo de proceder desde el punto de vista de la teoría de probabilidades? Es decir, ¿es ahora mayor la probabilidad de que el jurado tome la decisión correcta?

5.- Los cuatro grupos sanguíneos se reparten, en una población, según los porcentajes: A 43 %, B 8 %, AB 4 % y O 45 %. Teniendo en cuenta las incompatibilidades que existen entre los grupos, calcular la probabilidad de que, dadas dos personas elegidas al azar, X e Y, X pueda recibir sangre de Y, suponiendo que la población es muy grande.

6.- Dos estudiantes quedan en encontrarse en un lugar determinado entre las 12 y las 13, con la siguiente regla: el primero que llega espera al otro un cuarto de hora y después se marcha. Si cada uno de ellos llega al azar entre las 12 y las 13, calcular la probabilidad de que se encuentren.

7.- Supongamos que tenemos ratones negros y marrones. Los ratones negros son de dos tipos genéticos: homocigóticos (BB) y heterocigóticos (Bb); los marrones son de un sólo tipo (bb). Los genes actúan independientemente. Si tenemos un ratón negro que sabemos que ha sido engendrado por el apareamiento de dos ratones de tipo Bb:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea homocigótico? ¿Y heterocigótico?

b) Si además sabemos que el ratón negro del apartado anterior se ha apareado con un ratón marrón y ha engendrado 7 ratones, todos negros, ¿cuál es, ahora, la probabilidad de que sea homocigótico?

8.- En un examen se plantean 10 preguntas a las que debe responderse: verdadero o falso. Un alumno aprueba si al menos 7 de sus respuestas son acertadas. ¿Qué probabilidad de aprobar tiene un estudiante que responde todo al azar? ¿Y uno que sabe sólo el 30 % de la asignatura?

⇝ *dorso*

9.- Una compañía de refrescos anuncia premios en las chapas asegurando que en cada 1000 chapas hay 500 de "inténtelo otra vez", 300 con premios de 50 céntimos, 150 con premios de 1 euro, 40 con premios de 5 euros y 10 con premios de 10 euros. Un individuo, al que no le gusta el refresco, decide comprar una botella cuyo coste es de 1 euro. Caracterizar su ganancia mediante una variable aleatoria. ¿Es razonable su decisión? Calcular su probabilidad de perder dinero.

10.- De una estación parte un tren cada 20 minutos. Un viajero llega de improviso. Hallar:

1) La función de distribución de la variable aleatoria "tiempo de espera".
2) La probabilidad de que espere al tren menos de 7 minutos.
3) La esperanza y la varianza de la variable aleatoria del primer apartado.
4) La probabilidad de que espere exactamente 12 minutos.

11.- La acidez X de un cierto compuesto depende de la proporción Y de uno de sus componentes químicos y viene dada por la relación $X = (1+Y)^2$. Se sabe que Y es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(y) = \begin{cases} 2y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular la función de distribución de X, su función de densidad de probabilidad, su varianza, y la acidez media del compuesto.

12.- La proporción de cierto aditivo en la gasolina determina su peso específico, lo que a su vez determina el precio. Supongamos que en la producción de gasolina, la proporción de aditivo es una variable aleatoria X, con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si $X < 0,50$, tendremos gasolina de tipo 1 a $0,80$ euros el litro; si $0,50 \leq X \leq 0,80$, tendremos gasolina del tipo 2 a $0,90$ euros el litro y si $X > 0,80$, tendremos gasolina de tipo 3 a 1 euro el litro.

a) Calcular y representar gráficamente tanto la función de densidad de probabilidad como la función de distribución de$X$.
b) Calcular los porcentajes de producción de cada tipo de gasolina.
c) Calcular el precio medio por litro.

13.- El tiempo de vida en minutos de un determinado virus es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de vida sea superior a 100 minutos e inferior a 1000 minutos.
b) Observamos el virus a los 500 minutos y comprobamos que ha muerto. ¿Cuál es la probabilidad de que estuviese vivo a los 100 minutos?

14.- La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y con distribución continua es:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+xy) & \text{si } 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar el valor de k.
b) Encontrar las funciones de densidad marginales.
c) ¿Son X e Y independientes?

15.- Sea (X, Y) un vector aleatorio que tiene por función de densidad de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| < x, \ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Comprobar que es función de densidad.

b) Encontrar las medias de X e Y.

c) Hallar:

$$P(X < 1/2; Y < 0) \qquad \text{y} \qquad P(X > 1/2; |Y| < 1/2).$$

16.- El vector aleatorio (X, Y) tiene como función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} 15x^2 y & \text{si } (x,y) \in R \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde R es el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 1$ y $x = y$.

a) Hallar la densidad marginal de X.

b) Encontrar la esperanza matemática de X.

17.- Dos personas juegan a cara o cruz. La partida termina cuando han salido al menos tres caras y tres cruces. Hallar la probabilidad de que el juego no haya terminado habiéndose hecho 10 tiradas.

18.- La probabilidad de que un individuo tenga una reacción alérgica al inyectarle un suero es $0,001$. Hallar la probabilidad de que en 2,000 individuos, tengan reacción alérgica

a) exactamente tres

b) más de dos.

19.- El número de erratas por página en un libro se supone que sigue una distribución de Poisson. En una muestra de 95 páginas se han observado las siguientes frecuencias:

n^0 de erratas :	0	1	2	3	4	5
frecuencia :	40	30	15	7	2	1

Hallar la probabilidad de que en una página elegida al azar haya alguna errata.

20.- Una muestra de sangre se examina al microscopio sobre una cuadrícula dividida en 400 cuadrados iguales. Suponiendo que la muestra ha sido diluida y homogeneizada de manera que los hematíes quedan distribuidos al azar sobre la cuadrícula y habiéndose observado 25 cuadrados vacíos, hallar el número medio de hematíes por cuadrado.

Si la muestra ha sido diluida al $0,25\,\%$ y el volumen de disolución distribuido sobre la cuadrícula es $0,1\ mm^3$, ¿cuántos hematíes por mm^3 de sangre tiene el paciente?

⇝ *dorso*

21.- Cierto individuo valora como factor decisivo para la compra de un coche el consumo de gasolina. Debe decidir entre dos modelos A y B.

El fabricante de A afirma que el consumo de su vehículo sigue una distribución $N(8,5)$ (en litros por 100 Km.), mientras que el de B dice que el consumo del suyo es $N(8,3)$.

a) Hallar la probabilidad de que el coche A consuma más de 9 litros y de que el B consuma entre 7 y $8,5$ litros.

b) Si decide comprar el modelo B, calcular la probabilidad de que ahorre más de 2 litros cada 100 Km.

22.- El coeficiente de inteligencia es una variable aleatoria con distribución $N(100,16)$. Calcular:

a) La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un coeficiente superior a 120.

b) Suponiendo que un individuo con carrera universitaria debe tener un coeficiente superior a 110, hallar la probabilidad de que un licenciado tenga un coeficiente superior a 120.

23.- La anchura en $mm.$ de una población de coleópteros sigue una distribución $N(\mu,\sigma)$. Se estima que el 77 % de la población mide menos de $12mm.$ y que el 84 % mide más de $7mm.$

a) ¿Cuál es la anchura media de la población?

b) ¿Cuánto vale la desviación típica σ?
