Matemática Discreta y Probabilidad (Ingeniería de Telecomunicación). Curso 2006-2007

Hoja 5 Para entregar hasta el 3 de mayo de 2007

1.- Sea n par, $n \geq 4$. Encontrar un grafo con n vértices todos de grado 3.

2.- La “rueda de bicicleta”R_n es el grafo que se obtiene del ciclo C_n añadiendo un vértice en el centro y uniendo ese vértice central con el resto. ¿Cuántos ciclos de longitud n hay en un R_n?

3.- Sea $G = (V, A)$ un grafo con n vértices, $G \neq K_n$. Se define entonces su *grafo complementario* $G^c = (V^c, A^c)$ como aquel que tiene los mismos vértices que G y cuyas aristas son precisamente las que le “faltan.ª G, es decir,

$$V^c = V \qquad A^c = A(K_n) \setminus A$$

a) Demostrar que $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ son isomorfos si y sólo si lo son sus complementarios.

b) Encontrar un grafo con cinco vértices que sea isomorfo a su complementario.

c) ¿Existe un grafo con 3 vértices que sea isomorfo a su complementario? ¿y de 6?

d) Encontrar una condición necesaria sobre n para que pueda existir un grafo con n vértices que sea isomorfo a su complementario.
¿Es una condición suficiente?

4.- Demostrar que los dos grafos siguientes son isomorfos. ¿Cuántos isomorfismos distintos hay entre ellos?

5.- Decir si los dos grafos siguientes son isomorfos.

6.- Sea G un grafo con n vértices y 2 componentes conexas. Hallar el número mínimo y el número máximo de aristas que G puede tener en esas condiciones.

7.- Sea G un grafo con n vértices, m aristas y p componentes conexas. Probar que se cumple la siguiente desigualdad:

$$n - p \leq m \leq \frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)$$

$\rightsquigarrow$ *dorso*

8.- Supongamos que un grafo G de n vértices tiene 56 aristas y su complementario G^c tiene 80 ¿Qué valor tiene n?

9.- ¿Cuántos grafos conexos con 6 vértices y 5 aristas, no isomorfos, podemos encontrar?

10.- Construir cinco grafos con 8 vértices, todos de grado 3, de forma que cada dos de esos grafos no sean isomorfos.

11.- En un grafo G de $2k+1$ vértices, todos ellos tienen grado al menos k. Probar que G es conexo.

12.- Sea G un grafo con al menos una arista. Demuestra que G es un grafo bipartito $\Leftrightarrow \chi(G) = 2$.

13.- Hallar todos los polinomios cromáticos de grado 4 de grafos conexos.

14.- Hallar todos los polinomios cromáticos de grado 5 de grafos con dos componentes conexas.

15.- ¿Cuántas listas distintas (con repetición permitida) de longitud 7 se pueden formar con los cuatro símbolos $\{a, b, c, d\}$ de manera que en posiciones consecutivas aparezcan símbolos distintos, y que además el símbolo de la posición central sea distinto del símbolo en la posición primera y del símbolo en la posición última?

16.- Calcular el número de 7-listas con repetición que se pueden formar con 10 símbolos ajustándose a las siguientes exigencias: 1) No se puede poner el mismo símbolo en posiciones consecutivas, 2) los tres símbolos centrales han de ser distintos y, finalmente, 3) las posiciones 2^a y 6^a también han de ser ocupadas por símbolos distintos.

17.- Hallar el polinomio cromático del grafo rueda R_n. (SUGERENCIA: utiliza el polinomio cromático de C_n.)

18.- Calcular el polinomio cromático del grafo Escalera E_n:

que tiene $|V(E_n)| = 2n + 2$ y $|A(E_n)| = 3n + 1$.

19.- Para $n \geq 1$, sea a_n el número de formas de elegir en el grafo escalera E_{n-1} n aristas de modo que ningún par de ellas tengan vértice común. Encontrar una ecuación de recurrencia para los a_n y, resolviéndola, calcular los a_n.