Hoja 4

1.- Hallar la solución general de

$$a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

2.- Hallar la solución general de

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n, \quad n \geq 0.$$

3.- Resolver la recurrencia

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n + n, \quad n \geq 0,$$

con condiciones iniciales $a_0 = 0$ y $a_1 = 2$.

4.- Disponemos de n cerillas para formar palabras con las letras **I** (una cerilla) y **V** (dos cerillas). Sea P_n el número de palabras diferentes que podemos formar de este modo utilizando las n cerillas.

(a) Hallar una fórmula de recurrencia para los P_n.

(b) ¿Qué relación tienen los P_n con los números de Fibonacci, F_n, definidos mediante $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_1 = F_2 = 1$?. Justificar la respuesta.

(c) Sea $P_{n,k}$ el número de palabras contadas en P_n que tienen k letras. Calcular $P_{n,k}$.

(d) Utilizar los apartados b) y c) para demostrar la fórmula

$$F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$$

5.- Hallar, utilizando funciones generatrices, las siguientes expresiones:

a) $\sum_k k \binom{n}{k}$. b) $\sum_k 3^{-k} \binom{n}{k}$. c) $\sum_{k=1}^{n} k^2$. d) $\sum_n n^2/3^n$.

6.- Para $n \geq 0$ sea $a_n = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2^k}$.

(a) Calcular el valor de a_n.

b) Calcular $\sum_n \binom{n+1}{2} a_n$.

7.- Sea a_n, para todo n natural, el número de palabras de longitud n del alfabeto $\{a, b, c, d\}$ que contienen un número impar de b's. Se pide:

(a) Encontrar una relación de recurrencia para los a_n.

(b) Suponiendo $a_0 = 0$, encontrar la función generatriz de los a_n.

(c) Calcular a_n para todo n.

⇝ *dorso*

8.- Sea a_n, para todo n natural, el número de triángulos (de todos los tamaños) que son subgrafos del grafo formado por la red triangular equilátera T_n con longitud de los lados igual a n, donde cada arista mide 1, como se ilustra en la figura de más abajo para $n = 3$. Observar que $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, y $a_3 = 13$

(a) Encontrar una relación de recurrencia para los a_n.
(*Sugerencia: Ver cuantas veces se puede meter T_{n-1} en T_n y contar el número de triángulos en la unión de todas las copias de T_{n-1} contenidas en T_n utilizando el Principio de inclusión/exclusión. Añadir después los triángulos de T_n que no están en dicha unión, con la precaución de distinguir entre n par y n impar.*)

(b) Resolver la recurrencia por el método de superposición o usando funciones generatrices.
(*Sugerencia: Puede ser útil escribir el término no homogéneo de la recurrencia como $a + b(-1)^n$ y buscar separadamente soluciones correspondientes al sumando a, que serían polinomios apropiados, y al sumando $b(-1)^n$, para el que habría que ensayar soluciones del mismo tipo.*)