Hoja 3

Para entregar hasta el 21 de marzo de 2007

1.- Calcular cuántas 9-listas se pueden formar con los 9 símbolos a,a,a,b,b,b,c,c,c, de manera que no aparezcan 3 símbolos iguales consecutivamente.

Sugerencia: Utilizar el principio de inclusión/exclusión.

2.- ¿Cuántos números naturales menores que 60,000 son primos con 30?

3.- (Lewis Carroll) En una batalla entre 100 combatientes, 80 perdieron un brazo, 85 una pierna, 70 un ojo, y 75 una oreja. Un número indeterminado de ellos, x, perdió las cuatro cosas. Demostrar que $10 \leq x \leq 70$. ¿Es ésto lo mejor que se puede decir sobre x?

4.- Generalizar el problema 11 de la hoja de ejercicios número 1 de la siguiente manera: comprobar que las maneras de distribuir kn elementos en k subconjuntos de n elementos, sin que importe el orden de los subconjuntos es $\dfrac{(kn)!}{n!^k \cdot k!}$.

5.- En una zapatería se revuelven n pares de zapatos.

a) ¿De cuántas maneras se pueden emparejar de nuevo los n pares de zapatos si respetamos que cada par esté formado por un zapato derecho y otro izquierdo?

b) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden emparejar si ni siquiera respetamos que haya un zapato de cada pie? Simplificar la expresión obtenida.

6.- Probar con argumentos combinatorios las siguientes identidades:

$$a)\quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{n}{k+1} = \binom{2n}{n+1} \qquad\qquad b)\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(n-k)!^2 k!^2} = \binom{2n}{n}^2$$

Sugerencia para b): dado un conjunto de $2n$ elementos, contar de cuántas maneras distintas podemos elegir dos subconjuntos (no necesariamente disjuntos) de n elementos.

7.- ¿De cuántas formas se puede extraer del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, un conjunto de r números de forma que no haya dos consecutivos?

8.- Aproximadamente, en el 50 % de las ocasiones aparecen dos números consecutivos en la combinación ganadora de la lotería primitiva (6 números de un total de 49). ¿Es exactamente 1/2 la probabilidad de que esto ocurra?

9.- Sea $D_n(k)$ el número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que dejan fijos exactamente a k elementos de entre $\{1, 2, \ldots, n\}$. Probar que $D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$, donde D_j es el número de desbarajustes de j elementos.

Si definimos $D_0 = 1$, dedúzcase que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_j = n!$.

⇝ *dorso*

10.- Probar, usando el principio de inclusión/exclusión que

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 0$$

Sugerencia: Sea $\mathbb{N}_n = \{1, \dots n\}$, sea S la familia de los subconjuntos de $\mathbb{N}_n$ que tienen m elementos y, para cada $j = 1, \cdots, n$, sea E_j la colección de subconjuntos pertenecientes a S que contienen a j.

11.- Probar la identidad $S(n+1, m+1) = \displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} S(k, m)$.

Sugerencia: Construir primero el bloque que contiene a $n+1$.

12.- Llamemos B_n, el n-ésimo número de Bell, al número total de particiones del conjunto $\{1, \dots n\}$. Esto es, $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S(n,k)$. Probar la identidad $B_{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

Sugerencia: Utilizar el ejercicio anterior.

13.- Demostrar la identidad

$$k^n = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j! S(n,j)$$

14.- Hallar el número de maneras de repartir n libros en k cajas de tal manera que todas las cajas tengan algún libro si:

a) los libros son distintos y las cajas iguales.

b) los libros son iguales y las cajas distintas.

15.- Hallar el número de 10-listas formadas por los símbolos $\{0, 1, 2\}$ que difieren, a lo más, en 3 posiciones de la lista $(0, 1, 2, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 2)$.

16.- ¿ De cuántas maneras diferentes podemos distribuir n bolas rojas y n bolas blancas en k cajas numeradas?

17.- a) Comprobar, utilizando las fórmulas de los coeficientes binómicos, que para todo número natural m, se tiene: $m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + m$.

b) ¿Sabrías dar una demostración de la identidad del punto anterior, utilizando argumentos combinatorios?

c) Demostrar, preferiblemente con un razonamiento combinatorio, que para todos los números naturales n y k: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

d) Obtener, a partir de a) y c), que: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = \binom{n+1}{2}^2$.
